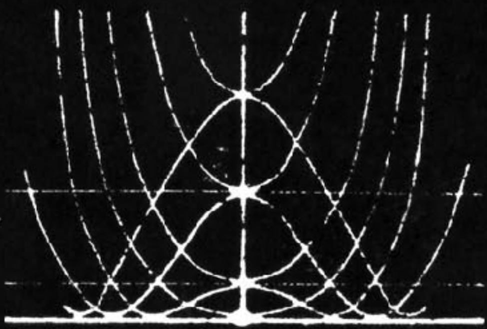
Г. Әһмәдов
Һ. Һүсејнов
М. Заһубов

Ади диференсиал тәнликләр



Маариф - 1978

| Г. ӘҺМӘДОВ, |
К. ҺӘСӘНОВ,
М. ЈАГУБОВ

АДИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР КУРСУ

АЛИ МӘКТӘБЛӘР ҮЧҮН ДӘРСЛИК

Азәрбајҹан ССР Али вә Орта Ихтисас Тәһсили Назирлији тәрәфиндән тәсдиг едилмишдир

«МААРИФ» НӘШРИЈЈАТЫ
Бакы—1978

517(075)
Ә 96

Дәрслик ади диференсиал тәнликләр курсунун мүасир сәвиііәсинә уіғун јазылмышдыр. Китабда университет курсларында кечилән програмдан әлавә, ади диференсиал тәнликләрин мүасир мәсәләләринә һәср олунмуш материал верилир вә нәзәри мәсәләләрин чоху мисалларла изаһ олунур.

Университет тәләбәләри үчүн нәзәрдә тутулмуш бу дәрсликдән дикәр али мәктәбләрин тәләбәләри дә истифадә едә биләрләр.

Дәрслиіә Азәрбаічан ССР Елмләр Академиіасынын Риіазиііат вә Механика Институту рә'і вермишдир.

Елми редактору: М. ГАСЫМОВ
проф., физика-риіазиііат елмләри доктору

$\frac{2-3-1}{М-652}$ 132—78

КИРИШ

Диференсиал тәнликләр нәзәриііәси XVII әсрин ахырларында механика вә физика мәсәләләринин һәлли илә әлагәдар олараг јаранмышдыр. Садә диференсиал тәнликләрә һәлә Нјутон вә Лејбнисин әсәрләриндә раст кәлинирди. Классик диференсиал тәнликләр нәзәриііәси исә аірыча бир фәнн кими XVIII әсрдә јаранмышдыр.

Диференсиал тәнликләр ади вә хүсуси төрәмәли тәнликләрә бөлүнүр: бирдәјишәнли функсијанын төрәмәләри дахил олан ади диференсиал тәнликләр, чохдәјишәнли функсијанын хүсуси төрәмәләри дахил олан хүсуси төрәмәли тәнликләр.

Али мәктәб тәләбәләри үчүн јазылмыш бу дәрслик ади диференсиал тәнликләр нәзәриііәсинә һәср олунмушдур. Китаб он бир фәсилдән ибарәтдир.

I фәсилдә төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш биртәртибли тәнликләр нәзәриііәсинин әсас анлајышлары верилир вә квадратура илә һәлл олунан бә'зи тәнликләр өјрәнилир.

II фәсилдә төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш биртәртибли тәнликләрин һәлләринин варлығы вә јеканәлији мәсәләләри арашдырылыр.

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш биртәртибли тәнликләр нәзәриііәсинин әсас анлајышлары, белә тәнликләрин һәлләринин варлығы вә јеканәлији мәсәләләри III фәсилдә верилмишдир.

Китабын IV фәслиндә тәнликләр системинин вә јүксәк тәртибли тәнликләр нәзәриііәсинин әсас анлајышлары верилир, һәллин варлығы вә јеканәлији һаггында теоремләр исбат олунур. Сонра исә квадратура илә һәлл олунан бә'зи тәнликләр өјрәнилир. V фәсилдә хәтти системләрин үмуми нәзәриііәсиндән бәһс едилир. Бурада системин фундаментал һәлләринин хассәләри, сабитләрин вариасијасы үсулу вә сабит әмсаллы системин һәлләринин гурулма гајдасы верилир. Сонра исә уіғун фактлар јүксәк тәртибли хәтти тәнликләрә көчүрүлүр. Бундан әлавә, бу фәсилдә периодик әмсаллы хәтти системләр үчүн Флоке теореми исбат олунур.

VI фәсил нормал системин һәллинин параметрләрдән вә башланғыч гијмәтләрдән асылылығы мәсәләләринә һәср олунмушдур. Бу фәсилдә һәмчинин нормал системин үмуми интегралынын варлығы исбат олунур, һәллин аналитиклији мә-

сәләси арашдырылыр вә сингулјар һәјәчанланмыш системләр һаггында гыса мә'лумат верилир.

Нормал системин һәллинин Лјапунов мә'нада дајаныглығы мәсәләси VII фәсилдә өјрәнилир. Бурада әввәлчә хәтти системләрин дајаныглығы һаггында теоремләр исбат олунур, сонра исә Лјапунов функсијалары үсулу вә биринчи јахынлашмалар үсулу илә гејри-хәтти системләрин дајаныглығы арашдырылыр. Фәслин сонунда дајаныгсызлыг һаггында теоремләр исбат олунур.

VIII фәсилдә икитәртибли хәтти тәнликләрин һәлләринин бә'зи хассәләри өјрәнилир, сәрһәд мәсәләси, Грин функсијасы анлајышлары верилир, мәхсуси әдәд вә мәхсуси функсија һаггында теоремләр исбат олунур. Сонра исә садә гејри-хәтти сәрһәд мәсәләсинин һәллинин варлығы вә јеканәлији мәсәләләри арашдырылыр. Бунлардан әлавә, бу фәсилдә Бессел тәнлији вә Бессел функсијалары һаггында мә'лумат верилир.

IX фәсилдә автоном системләрин һәлләринин хассәләри өјрәнилир, мүстәви үзәриндә трајекторијаларын јерләшмәси арашдырылыр вә мәхсуси нөгтәләрин тәснифаты верилир.

Китабын IV фәслиндә нормал системләри арашдыраркән көстәрилмишдир ки, системин диференсиалланан интегралынын тапылмасы мәсәләси, мүәјјән биртәртибли хүсуси төрәмәли хәтти тәнлијин һәллинин тапылмасы мәсәләсинә еквивалентдир. Бунунла әлагәдар олараг биртәртибли хүсуси төрәмәли тәнликләрин үмуми нәзәријјәси, адәтән, ади диференсиал тәнликләр курсунда верилир. Она көрә дә китабын X фәсли биртәртибли хәтти вә квазихәтти хүсуси төрәмәли тәнликләрә һәср олунмушдур. Бу фәсилдә белә тәнликләрин үмуми һәллинин варлығы, Коши мәсәләсинин һәллинин варлығы вә јеканәлији һаггында теоремләр исбат олунур.

Сон заманлар автоматик идарәетмә нәзәријјәсинә вә бир чох башга саһәләрә кениш тәтбигләри илә әлагәдар олараг мејл едән аргументли диференсиал тәнликләрә тәләбат артмышдыр. Китабын XI фәсли белә тәнликләрин өјрәнилмәсинә һәср олунмушдур. Бу фәсилдә мејл едән аргументли тәнликләрин тәснифаты, аддым үсулу, башланғыч мәсәләнин һәллинин варлығы вә јеканәлији өјрәнилир. Фәслин сонунда исә Лаплас чевирмәси вә онун сабит әмсаллы хәтти тәнликләрә (һәм ади диференсиал тәнликләрә, һәм дә мејл едән аргументли тәнликләрә) тәтбиги верилир.

Бүтүн фәсилләрин сонунда чалышмалар верилмишдир. Дәрсликдә верилән нәзәри мәсәләләрин чоху мисалларла изаһ олунур. Бу да китабы һәм сәрбәст өјрәнмәјә, һәм дә ондан али техники мәктәб тәләбәләринин истифадә етмәләринә көмәк едәр.

ТӨРӘМӘЈӘ НӘЗӘРӘН ҺӘЛЛ ОЛУНМУШ БИРТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

§ 1. ӘСАС АНЛАЈЫШЛАР ВӘ ТӘ'РИФЛӘР

а) *Диференсиал тәнлик анлајышы. Сәрбәст дәјишән* x, *ахтарылан функсија* $y(x)$ *вә онун төрәмәси* $y'(x)$ *арасында верилмиш*

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

мүнасибәтинә биртәртибли ади диференсиал тәнлик дејилир.

Ајдындыр ки, $F(x, y, z)$ функсијасы x, y дәјишәнләринин бириндән вә ја һәр икисиндән асылы олмаја да биләр, лакин (1) тәнлијинин диференсиал тәнлик олмасы үчүн бу функсија z-дән һөкмән асылы олмалыдыр.

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

шәклиндә олан тәнлијә ***төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш*** биртәртибли ади диференсиал тәнлик дејилир.

Бу фәсилдә әввәлчә (2) тәнлији үчүн диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин үмуми анлајышлары верилир, сонра исә белә тәнликләрин бә'зи синифләри өјрәнилир.

Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы xOy мүстәвисинин мүәјјән D областында* тә'јин олунмушдур.

Әкәр (a, b) интервалында диференсиалланан $y = \varphi(x)$ функсијасы

1) $(x, \varphi(x)) \in D, \quad x \in (a, b)$
2) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad x \in (a, b)$

шәртләрини өдәјирсә, һәмин функсијаја (2) тәнлијинин (a, b) интервалында *һәлли* дејилир.

---

* Област дедикдә, ашағыдакы ики шәрти өдәјән бош олмајан D нөгтәләр чохлуғу баша дүшүлүр: 1) D ачыг чохлугдур, јә'ни онун һәр бир нөгтәси өзүнүн мүәјјән әтрафы илә бу чохлуға дахилдир; 2) D чохлуғу әлагәли чохлугдур, јә'ни онун истәнилән ики нөгтәсини, тамамилә D-нин дахилиндә јерләшән вә тәшкиледичиләринин сајы сонлу олан сыныг хәтт васитәсилә бирләшдирмәк олар.

D областынын өзүнә дахил олмајан лимит нөгтәләри чохлугуна онун сәрһәд нөгтәләри дејилир. Сәрһәд нөгтәләринин күллисинә D областынын сәрһәди дејилир.

D областы өз сәрһәди илә бирликдә гапалы област адланыр вә $\bar{D}$ илә ишарә олунур.

Ејни гајда илә $[a, b]$ парчасында һәллин тә'рифини вермәк олар.

Бир чох һалларда диференсиал тәнлијин һәллини гејри-ашкар функсија кими вә ја параметрик шәкилдә тапмаг әлверишли олур.

Әкәр

$$\Phi(x, y) = 0 \qquad (3)$$

бәрабәрлијиндән гејри-ашкар функсија кими тә'јин олунан $y = \varphi(x)$ функсијасы (2) тәнлијинин һәлли оларса, (3) мүнасибәтинә (2) тәнлијинин *гејри-ашкар шәкилдә* һәлли дејилир.

Тутаг ки, параметрик шәкилдә

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (\alpha, \beta) \qquad (4)$$

функсијасы верилмишдир вә һәр бир $t \in (\alpha, \beta)$ үчүн:

1) $(\varphi(t), \psi(t)) \in D$; 2) сонлу $x' = \varphi'(t)$, $y' = \psi'(t)$, $(\varphi'(t) \neq 0)$ төрәмәләри вар; 3) $\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t), \psi(t))$ олур. Онда (4) функсијасына (2) тәнлијинин (α, β) интервалында параметрик шәкилдә һәлли дејилир.

Мисал 1. Печдән чыхарыларкән температуру 280° олан чисим 40 *дәг* әрзиндә 100°-јә гәдәр сојујур. Әтраф мүһитин температурунун 10° олдуғуну биләрәк, чисмин сојума ганунуну тапын.

Һәлли. Чисмин t анындакы температуруну $T = T(t)$ илә ишарә етсәк, онун сојума сүр'әти $\frac{dT}{dt}$ олар.

Нјутон ганунуна әсасән, чисмин һәр бир анда сојума сүр'әти, онун һәмин анда температуру илә әтраф мүһитин температуру фәргинә мүтәнасибдир, јә'ни

$$\frac{dT}{dt} = \kappa(T - 10°); \qquad (5)$$

бурада κ мүтәнасиблик әмсалыдыр. Демәли, бахылан мәсәләнин һәлли (5) ади диференсиал тәнлијинин һәллинә кәтирилир.

Асанлыгла јохламаг олар ки, истәнилән c сабити үчүн

$$T = 10° + c \cdot e^{kt} \qquad (6)$$

функсијасы (5) тәнлијинин $(-\infty; +\infty)$ интервалында һәллидир. Чисмин $t = 0$ анында температуру 280° олдуғундан (6) бәрабәрлијиндән c-јә нәзәрән

$$280° = 10° + c$$

тәнлијини аларыг. Бурадан $c = 270°$ вә $T = 10° + 270° e^{kt}$.

Мәсәләнин шәртинә көрә чисим 40 *дәг* әрзиндә 280°-дән 100°-јә гәдәр сојујур, јә'ни $t = 40$ *дәг* олдугда $T = 100°$ олур.

Буну (6) дүстурунда нәзәрә алсаг, κ параметрини тапмаг үчүн

$$100° = 10° + 270° e^{k \cdot 40}$$

тәнлијини аларыг. Бурадан

$$e^{\kappa} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{40}}.$$

Беләликлә, чисмин t анында температуру

$$T = 10° + 270° \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{40}} \qquad (7)$$

дүстуру илә тә'јин олунур.

Мисал 2. $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} - 1 = 0$ бәрабәрлијиндән тә'јин олунан $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{x^2 + 4}$ функсијасы

$$y' = \frac{xy}{x^2 + 4} \qquad (8)$$

тәнлијинин һәлли олдуғундан,

$$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} - 1 = 0$$

мүнасибәти һәмин тәнлијин гејри-ашкар шәкилдә һәлли олур.

Билаваситә јохламагла көстәрмәк олар ки, параметрик шәкилдә верилмиш

$$x = 2\,\mathrm{sh}\,t, \; y = \sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,t, \; t \in (-\infty, +\infty)$$

функсијасы (8) тәнлијинин һәллидир.

б) *Диференсиал тәнлик анлајышынын һәндәси изаһы.* Тутаг ки, (2) тәнлијинин сағ тәрәфиндәки $f(x, y)$ функсијасы D областында кәсилмәздир вә $y = \varphi(x)$ функсијасы һәмин тәнлијин (a, b) интервалында һәллидир. $y = \varphi(x)$ функсијасынын графикинә (2) тәнлијинин *интеграл әјриси* дејилир. Интеграл әјриси үзәриндә һәр һансы (x_0, y_0) нөгтәси көтүрәк вә бу нөгтәдә һәмин әјријә чәкилән тохунанла Ox охунун мүсбәт истигамәти арасындакы бучағы α илә ишарә едәк. Төрәмәнин һәндәси мә'насына көрә: $\operatorname{tg} \alpha = \varphi'(x_0)$.

Дикәр тәрәфдән $\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0))$ олдуғундан, $y = \varphi(x)$ интеграл әјрисинә (x_0, y_0) нөгтәсиндә чәкилән тохунанын бучаг әмсалы $\operatorname{tg}\alpha = f(x_0, y_0)$ олур. Демәли, $y = \varphi(x)$ интеграл әјриси үзәриндәки һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсиндә тохунанын бучаг әмсалы $f(x, y)$ функсијасынын һәмин нөгтәдәки гијмәти илә тә'јин олунур.

D областындан һәр һансы (x_0, y_0) нөгтәси көтүрүб, бу нөгтәдән бучаг әмсалы $f(x_0, y_0)$ олан дүз хәтт парчасы кечирәк.

Бу һалда илә D областынын һәр бир нөгтәсиндән дүз хәтт парчасы кечирмәк олар. Демәли, (2) тәнлији D областынын һәр бир нөгтәсиндә мүәјјән истигамәт тә'јин едир. Бу чүр гурулмуш истигамәтләр чохлуғуна *истигамәтләр мејданы* дејилир.

Беләликлә, диференсиал тәнлији һәлл етмәк, һәндәси олараг, елә әјри тапмаг демәкдир ки, бу әјринин һәр бир нөгтәсиндә она чәкилмиш тохунанын истигамәти, истигамәтләр мејданынын һәмин нөгтәдәки истигамәти илә үст-үстә дүшсүн. Көстәрилән хүсусијјәтинә көрә интеграл әјриләри, графикләри D областында јерләшән башга әјриләрдән фәргләнир.

Тәнлији һәлл етмәдән, онун тә'јин етдији истигамәтләр мејданынын көмәјилә интеграл әјриләрини тәгриби гурмаг олар. Бунун үчүн *изоклин* үсулундан истифадә олунур.

D областында јерләшән вә бүтүн нөгтәләриндә мејданын истигамәти ејни олан әјријә тәнлијин изоклини дејилир.

Тә'рифә әсасән, (2) тәнлијинин изоклинләри

$$f(x, y) = k \qquad (9)$$

тәнлији илә тә'јин олунур; бурада k—параметрдир.

Ајдындыр ки, $f(x, y)$ функсијасынын верилмәсиндән асылы олараг k параметринин бә'зи гијмәтләриндә (9) тәнлијинин тә'јин етдији (x, y) нөгтәләр чохлуғу бош вә ја сонлу чохлуг ола биләр.

Интеграл әјриләринин екстремум нөгтәләриндә $f(x, y) = 0$ олдуғундан $k = 0$ гијмәтинә ујғун изоклин *екстремал* адланыр.

Верилмиш тәнлијин изоклин үсулу илә интеграл әјриләринин тәхмини тәсвирини алмаг үчүн бир-биринә јахын k_1, $k_2, \dots$ әдәдләринә ујғун $f(x, y) = k_i$, $i = 1, 2, \dots$ изоклинләрини гурурук. Бундан сонра елә әјриләр чәкирик ки, онларын һәр биринин $f(x, y) = k_i$ изоклини илә кәсишмә нөгтәсиндә чәкилмиш тохунанын бучаг әмсалы k_i олсун.

Әлавә мә'луматларын һесабына бә'зи садә тәнликләрин интеграл әјриләринин даһа дәгиг тәхмини тәсвирини гурмаг олур.

Ајдындыр ки, D областынын $f(x, y) > 0$ шәртини өдәјән һиссәләриндә интеграл әјриләри артан, $f(x, y) < 0$ олан һиссәләриндә исә азалан функсијадыр.

Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасынын D областында кәсилмәз $f_x(x, y)$ вә $f_y(x, y)$ төрәмәләри вар. Онда (2) тәнлијинә әсасән,

$$y'' = f_x(x, y) + f_y(x, y)\,y' = f_x(x, y) + f_y(x, y)\,f(x, y)$$

олдуғундан, D областынын $f_x(x, y) + f_y(x, y)\,f(x, y) > 0$ шәртини өдәјән һиссәләриндә интеграл әјриләри чөкүк,

$f_x(x, y) + f_y(x, y)\,f(x, y) < 0$ олан һиссәләриндә исә габарыг олур. Бундан башга, интеграл әјриләринин әјилмә нөгтәләриндә

$$f_x(x, y) + f_y(x, y)\,f(x, y) = 0.$$

Она көрә бу тәнлијин тә'јин етдији әјријә (әкәр варса) (2) тәнлијинин *әјилмә хәтти* дејилир.

Бүтүн бу мә'луматларла јанашы изоклинләрин, екстремалларын вә әјилмә хәтләринин тәнлији өдәјиб-өдәмәдијини билаваситә тәнликдә јеринә јазмагла јохламаг лазымдыр.

Мисал 3. $y' = y - x^2$ тәнлијинин интеграл әјриләрини изоклин үсулу илә тәгриби гураг.

Тәнлијин изоклинләри $y = x^2 + k$ параболалар аиләсидир. Бурадан $k = 0$ олдугда алынан $y = x^2$ екстремал изоклини координат башланғычындан кечән параболадыр. Бу парабола xOy мүстәвисини ики һиссәјә бөлүр. $y' = y - x^2 > 0$ шәрти $y = x^2$ параболасынын дахилиндә галан һиссәдә, $y' = y - x^2 < 0$ шәрти исә харичиндә галан һиссәдә өдәнир. Она көрә интеграл әјриләри мүстәвинин $y = x^2$ параболасынын дахилиндәки һиссәсиндә артан, харичиндәки һиссәсиндә исә азалан функсијалар олур. Демәли, $y = x^2$ параболасынын харичи һиссәсиндән дахили һиссәсинә кечән интеграл әјрисинин бу парабола илә кәсишмә нөгтәси минимум нөгтәси, дахилиндән харичинә кечән интеграл әјриси илә кәсишмә нөгтәси исә онун максимум нөгтәси олур. Һәр һансы интеграл әјриси әввәлчә $y = x^2$ параболасыны кәсиб дахилә кечирсә, сонра исә кәсиб харичә чыхырса, кәсишмә нөгтәләри һәмин интеграл әјрисинин, ујғун олараг, минимум вә максимум нөгтәләри олур.

Интеграл әјриләринә $y = x^2 + 1$ $(k = 1)$ изоклини илә кәсишдикләри нөгтәләрдә чәкилән тохунанлар Ox оху илә 45°-ли бучаг, $y = x^2 - 1$ $(k = -1)$ изоклини илә кәсишдикләри нөгтәләрдә чәкилән тохунанлар исә 135°-ли бучаг әмәлә кәтирир.

Интеграл әјриләринин әјилмә хәттини тапаг.

Верилмиш тәнликдән $y'' = y' - 2x$. Бурада $y' = y - x^2$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $y'' = y - x^2 - 2x$ олар.

Әјилмә нөгтәләриндә $y'' = 0$ олдуғундан $y = x^2 + 2x$ параболасы интеграл әјриләринин әјилмә хәтти олур. Бу парабола xOy мүстәвисини ики һиссәјә бөлүр. $y'' > 0$ шәрти $y = x^2 + 2x$ параболасынын дахилиндә, $y'' < 0$ шәрти исә харичиндә өдәнир.

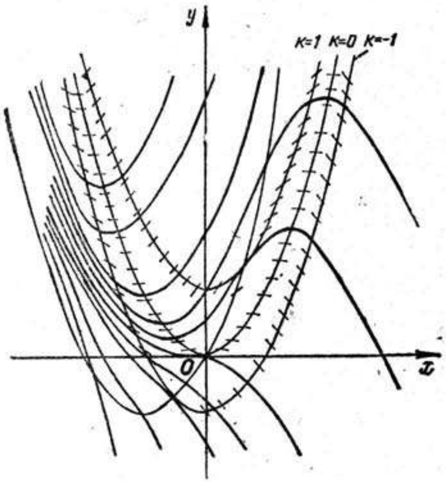
Демәли, интеграл әјриләринин $y = x^2 + 2x$ параболасынын дахилиндә јерләшән һиссәси габарыг, харичиндә јерләшән һиссәси исә чөкүк олур вә һәмин парабола илә кәсишдикләри нөгтәләрдә интеграл әјриләри әјилир.

Бу дејиләнләри нәзәрә алсаг, верилән тәнлијин интеграл әјриләринин тәхмини тәсвири 1-чи шәкилдә көстәрилән кими олар.

в) *Коши мәсәләси.* Тутаг ки, (a, b) интервалында кәсилмәз $f(x)$ функсијасынын ибтидаи функсијасыны тапмаг тәләб олунур. Ибтидаи функсијаны $y = y(x)$ илә ишарә етсәк, мәсәлә

$$y' = f(x) \qquad (10)$$

диференсиал тәнлијинин һәллинин тапылмасына кәтирилир.



Шәкил 1.

Интеграл һесабы курсундан мә'лумдур ки, бу тәнлијин һәлли $y = \int f(x)\,dx + c$ вә ја

$$y = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds + c \quad (a < x_0 < b) \qquad (11)$$

дүстуру илә верилир; бурада c ихтијари сабитдир. Демәли, ән садә диференсиал тәнлијин һәлли бир ихтијари сабитдән асылы аилә тәшкил едир. Она көрә дә көзләмәк олар ки, (2) тәнлијинин һәлләри дә бир ихтијари сабитдән асылы аилә тәшкил едир.

Кәләчәкдә көстәрәчәјик ки, $f(x, y)$ функсијасы D областында кәсилмәз олдугда (2) тәнлијинин интеграл әјриләри бу областы долдурур. Она көрә дә бу һәлләр ичәрисиндән тәнлијин мүәјјән һәллини сечмәк үчүн әлавә шәртләр верилмәлидир.

Верилмиш $(x_0, y_0) \in D$ нөгтәси үчүн

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

тәнлијинин

$$y(x_0) = y_0 \qquad (12)$$

шәртини өдәјән $y = \varphi(x)$ һәллинин тапылмасы мәсәләсинә *Коши мәсәләси*, (12) шәртинә исә *башланғыч шәрт* дејилир. x_0, y_0 әдәдләринә *башланғыч гијмәтләр* вә ја *Коши мә'лумлары* дејилир. (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән һәллини тапмаг, һәндәси олараг D областынын (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисини тапмаг демәкдир. Кәләчәкдә исбат едәчәјик ки, $f(x, y)$ функсијасы (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјјән $\mathring{U} \subset D$ әтрафында кәсилмәздирсә, (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән һеч олмаса бир һәлли вар (бах: II фәсил, § 3).

Тутаг ки, $y = \varphi(x)$ функсијасы $[x_0 - h, x_0 + h]$ парчасында (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән һәллидир вә бу тәнлијин (12) башланғыч шәртини өдәјән истәнилән $y = \psi(x)$ һәлли үчүн елә $\delta > 0\, (\delta \leqslant h)$ әдәди вар ки, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалында $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. Онда дејирләр ки, (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән һәлли (вә ја (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси) *јеканәдир*. Әкс һалда, јә'ни (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси јохдурса вә ја варса, амма бирдән чохдурса, (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән һәллинин јеканәлији позулур.

Кәләчәкдә көстәрәчәјик ки, $f(x, y)$ функсијасы (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјјән U әтрафында кәсилмәздирсә вә кәсилмәз $f_y(x, y)$ хүсуси төрәмәси варса, (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән јеканә һәлли вар (бах: II фәсил, § 7).

г) *Умуми һәлл.* Јухарыда көстәрдик ки, ихтијари c сабитиндән асылы олан (11) аиләси (10) тәнлијинин һәллидир. Ајдындыр ки, һәр бир $x_0 \in (a, b)$ вә истәнилән y_0 үчүн $c = y_0$ көтүрсәк, $\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds + y_0$ функсијасы (10) тәнлијинин $\varphi(x_0) = y_0$ шәртини өдәјән һәлли олар.

Гејд едәк ки, (11) һәллинә (10) тәнлијинин *үмуми һәлли*, c сабитинә гијмәт вермәклә алынан һәллә исә һәмин тәнлијин *хүсуси һәлли* дејилир.

(2) тәнлијинин һәлләринин јеканәлији сахланан максимал областы G илә ишарә едәк ($G \subset D$), јә'ни G областынын һәр бир нөгтәсиндән (2) тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир вә D областынын бу хассәјә малик олан бүтүн нөгтәләри G-јә дахилдир.

Тутаг ки, ихтијари c сабитиндән асылы

$$y = \varphi(x, c) \qquad (13)$$

аиләси верилмишдир вә 1) һәр бир $(x, y) \in G$ нөгтәси үчүн (13) тәнлији c-јә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$c = \psi(x, y); \qquad (14)$$

2) (x, y) нөгтәси G областында дәјишдикдә, c сабитинин (14) дүстуру илә тә'јин олунан һәр бир гијмәтиндә (13) функсијасы (2) тәнлијинин һәллидир. Онда (13) аиләсинә һәмин тәнлијин G областында үмуми һәлли, c-нин (14) дүстуру илә тә'јин олунан гијмәтләринә исә *мүмкүн гијмәтләр* дејилир. Һәр һансы $(x_0, y_0) \in G$ үчүн $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \psi(x, y) \quad \pm\infty$ оларса, $c = \pm\infty$ да мүмкүн гијмәт кими көтүрүлүр.

Тутаг ки, (13) аиләси G областында (2) тәнлијинин үмуми һәллидир вә $(x_0, y_0) \in G$. Онда (2) тәнлијинин (12) башланғыч шәртини өдәјән һәлли

$$y = \varphi(x, \psi(x_0, y_0)) \equiv \Phi(x, x_0, y_0) \qquad (15)$$

дүстуру илә тә'јин олунур. Бу дүстурда $(x_0, y_0) \in G$ шәрти өдәнмәклә x_0-ы гејд едиб, y_0-ы ихтијари көтүрсәк, (15) аиләсинә (2) тәнлијинин *Коши формада* үмуми һәлли дејилир.

Ихтијари c сабитиндән асылы

$$\Phi(x, y, c) = 0 \text{ вә ја } \Phi(x, y) = c \qquad (16)$$

гејри-ашкар шәклиндә верилмиш функсијалар аиләсинин тә'јин етдији $y = \varphi(x, c)$ аиләси G областында (2) тәнлијинин үмуми һәлли оларса, (16) аиләсинә һәмин тәнлијин G областында гејри—ашкар шәкилдә үмуми һәлли вә ја *үмуми интегралы* дејилир.

Тутаг ки, $\Phi(x, y) = c$ бәрабәрлији G областында (2) тәнлијинин үмуми интегралыдыр. Бу областдан ихтијари (x_0, y_0) нөгтәси көтүрәк вә $\Phi(x_0, y_0) = c_0$ илә ишарә едәк. Онда $\Phi(x, y) = c_0$ бәрабәрлији (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән јеканә $y = \varphi(x)$ интеграл әјрисини тә'јин едәр вә бу әјри бојунча

$$\Phi(x, \varphi(x)) = c_0 \qquad (17)$$

ејнилији өдәнәр.

Демәли, (2) тәнлијинин G областында јерләшән истәнилән интеграл әјриси бојунча $\Phi(x, y)$ функсијасы ејнилик кими сабитә бәрабәрдир. Белә хассәјә малик олан $\Phi(x, y)$ функсијасына (2) тәнлијинин ***интегралы*** дејилир.

Тутаг ки, $\Phi(x, y)$ интегралы диференсиалланан функсијадыр. Онда (17) ејнилијини диференсиаллајараг $y = \varphi(x)$ интеграл әјриси бојунча

$$\Phi_x(x, y) + \Phi_y(x, y) f(x, y) = 0 \qquad (18)$$

олдуғуну аларыг. Алынан (18) бәрабәрлијинин сол тәрәфинә $\Phi(x, y)$ функсијасынын (2) тәнлијинә әсасән төрәмәси дејилир. Демәли, $\Phi(x, y)$ функсијасы G областында (2) тәнлијинин диференсиалланан интегралы олдугда, онун һәмин тәнлијә әсасән төрәмәси сыфыра бәрабәрдир.

Мисал 4. Көстәрәк ки, ихтијари c сабитиндән асылы олан $y(x + c) - 1 = 0$ аиләси xOy мүстәвисиндә $y' = -y^2$ тәнлијинин үмуми интегралыдыр. Доғрудан да, $y(x + c) - 1 = 0$ тәнлијини y-ә нәзәрән һәлл етсәк

$$y = \frac{1}{x + c} \qquad (19)$$

олдуғуну аларыг.

Һәр бир (x, y), $(y \neq 0)$ нөгтәси үчүн (19)-дан

$$c = \frac{1}{y} - x$$

тә'јин едә биләрик вә ајдындыр ки,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \left(\frac{1}{y} - x\right) = \pm\infty.$$

Бу көстәрир ки, $c = \pm\infty$ гијмәтләри мүмкүн гијмәтләрдир вә $c = \pm\infty$ олдугда (19) дүстурундан бахылан тәнлијин $y = 0$ һәлли алыныр. c сабитинин һәр бир сонлу гијмәти үчүн (19) дүстуру илә тә'јин олунан $y = y(x)$ функсијасы $(-\infty, -c)$, $(-c, +\infty)$ интервалларында бахылан тәнлији едәјир.

Демәли, (19) аиләси xOy мүстәвисиндә бахылан тәнлијин үмуми һәлли, $y(x + c) - 1 = 0$ аиләси исә онун үмуми интегралы олур.

ғ) *Хүсуси һәлл.* Тутаг ки, $y = \varphi(x)$ функсијасы (a, b) интервалында (2) тәнлијинин һәллидир. Әкәр һәр бир $x \in (a, b)$ үчүн (2) тәнлијинин $(x, \varphi(x))$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси јеканә исә, $y = \varphi(x)$ һәллинә (2) тәнлијинин *хүсуси һәлли* дејилир.

Тә'рифдән ајдындыр ки, c сабитинин һәр бир мүмкүн гијмәтиндә үмуми һәллдән алынан һәлл, хүсуси һәллдир.

д) *Мәхсуси һәлл.* Тутаг ки, $y = \psi(x)$ функсијасы (2) тәнлијинин (a, b) интервалында тә'јин олунан һәллидир. Әкәр һәр бир $x \in (a, b)$ үчүн $(x, \psi(x))$ нөгтәсиндән, (2) тәнлијинин $y = \psi(x)$ һәлли дә дахил олмагла, ән азы ики интеграл әјриси кечирсә, $y = \psi(x)$ һәллинә диференсиал тәнлијин *мәхсуси һәлли* дејилир.

Беләликлә, Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији позулан нөгтәләрин һәндәси јериндән ибарәт олан интеграл әјрисинә ујғун һәлл мәхсуси һәлл олур.

Тутаг ки, G областы (2) тәнлијинин һәлләринин јеканәлији сахланан максимал областдыр, $y = \psi(x)$ исә бу тәнлијин (a, b) интервалында тә'јин олунмуш мәхсуси һәллидир. Ајдындыр ки, $y = \psi(x)$ һәллинин графикинин һеч бир нөгтәси G областына дахил ола билмәз. Она көрә дә мәхсуси һәлли (әкәр варса) үмуми һәлдән c сабитинә мүмкүн әдәди гијмәт

вермәклә алмаг олмаз вә бу һәллин графики G областынын сәрһәддиндә јерләшир.

Мисал 5.

$$y' = \sqrt{|y|} \qquad (20)$$

тәнлијинә бахаг. Бурада $f(x,y)=\sqrt{|y|}$ функсијасы xOy мүстәвисиндә тә'јин олунуб вә кәсилмәздир. Она көрә тәнлијин истәнилән (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси вар. Көстәрәк ки, $y_0 \neq 0$ исә (20) тәнлијинин (x_0, y_0) нөгтәсиндән јеканә интеграл әјриси кечир, јә'ни бу нөгтәдә Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир. Доғрудан да тутаг ки, $y_0 > 0$. Онда (x_0, y_0) нөгтәсинин елә U әтрафына бахмаг олар ки, бу әтраф Ox оху илә кәсишмәсин. (U әтрафы олараг мәркәзи (x_0, y_0) нөгтәсиндә вә радиусу $\varepsilon = \frac{y_0}{2}$ олан даирә көтүрмәк олар.) Бу әтрафда $f(x,y)=\sqrt{y}$ функсијасы кәсилмәздир вә кәсилмәз $f_y(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ төрәмәси вар.

Демәли, һәр бир (x_0, y_0), $(y_0>0)$ нөгтәсиндән (20) тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир. Ејни гајда илә $y_0<0$ шәрти өдәнән һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсиндән дә јеканә интеграл әјриси кечдијини көстәрмәк олар.

Истәнилән x_0 үчүн $(x_0, 0)$ нөгтәсиндә $f_y(x_0, 0)=\infty$ олур. Демәли, бу нөгтәдә һәллин јеканәлији позула биләр. Ајдындыр ки, белә нөгтәләрин һәндәси јери $y=0$ хәттини верир вә бу хәтт тәнлијин интеграл әјрисидир. Дикәр тәрәфдән $\alpha < x_0 < \beta$ шәртини өдәјән истәнилән α, β әдәдләри үчүн

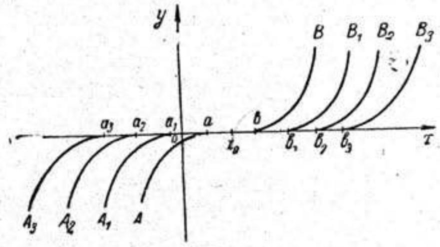
$$\varphi(x)=\begin{cases} -\frac{1}{4}(\alpha - x)^2, & x<\alpha \text{ оларса},\\ 0, & \alpha \leqslant x \leqslant \beta \text{ оларса},\\ \frac{1}{4}(x-\beta)^2, & x>\beta \text{ оларса},\end{cases}$$

дүстуру илә тә'јин олунан функсија да тәнлијин $(x_0, 0)$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси олдуғундан, $y=0$ бахылан тәнлијин мәхсуси һәллидир (шәкил 2).

е) *Квадратура илә һәлл олунан тәнликләр.* Диференсиал тәнликләр курсунда мүһүм мәсәләләрдән бири диференсиал тәнлијин бүтүн һәлләрини тапмаг вә онун хассәләрини өјрәнмәкдән ибарәтдир. Диференсиал тәнлијин һәллинин тапылмасына онун *интегралланмасы* дејилир.

Верилмиш диференсиал тәнлији һәлл етмәк, биринчи нөвбәдә ахтарылан функсијаны сәрбәст дәјишәндән асылы ашкар шәкилдә елементар функсијаларын көмәјилә ифадә етмәкдән ибарәтдир. Бу мүмкүн олмадыгда диференсиал тәнлијин һәллинин тапылмасы елементар функсијалардан вә тәнлијә дахил

олан функсијалардан ибарәт ифадәләрин интегралланмасына кәтирилир. Бу һалда дејирләр ки, бахылан диференсиал тәнлик *квадратура илә һәлл олунур.*



Шәкил 2.

Ашағыда төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш вә квадратураја кәтирилән бә'зи диференсиал тәнликләр синфи илә таныш олачағыг. Бу синифләри тә'јин етмәк үчүн бә'зән (2) тәнлијини башга шәкилләрдә јазмаг лазым кәлир. Бу тәнликлә јанашы

$$\frac{dx}{dy}=f_1(x,y),\quad f_1(x,y)=\frac{1}{f(x,y)} \qquad (2')$$

тәнлијинә бахаг. Гејд едәк ки, (2) тәнлијиндә x-ә сәрбәст дәјишән, y-ә исә x-ин ахтарылан функсијасы кими, (2′) тәнлијиндә исә y-ә сәрбәст дәјишән, x-ә онун ахтарылан функсијасы кими бахылыр.

$f(x,y)$ функсијасы D областында вә онун бә'зи сәрһәд нөгтәләриндә тә'јин олунмушдурса, онда (2) тәнлији D областында вә онун һәмин сәрһәд нөгтәләриндә верилмиш һесаб олунур.

Мүәјјән (x_0, y_0) нөгтәси үчүн $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\infty$ оларса, $f_1(x,y)$ функсијасы үчүн $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_1(x,y)=0$ олур. Она көрә $f_1(x,y)$ функсијасынын (x_0, y_0) нөгтәсиндә гијмәтини сыфыра бәрабәр көтүрсәк, бу нөгтәдә (2′) тәнлијинин сағ тәрәфи сонлу олур. Одур ки, (x_0, y_0) нөгтәси әтрафында (2) тәнлији әвәзинә (2′) тәнлијинә бахмаг әлверишли олур.

Ајдындыр ки, (2) вә (2′) тәнликләринә диференсиал шәкилдә јазылмыш

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (21)$$

тәнлијинин хүсуси һалы кими бахмаг олар. Бу тәнлијә x вә y дәјишәнләри ејни һүгугла дахилдир, јә'ни һәмин дәјишәнләрин истәнилән бирисинә сәрбәст дәјишән, дикәринә исә ахтарылан функсија кими бахмаг олар.

Фәрз олунур ки, (21) тәнлијиндә $M(x, y)$ вә $N(x, y)$ функсијалары мүәјјән D областында кәсилмәздирләр вә бу областда $M^2(x, y)+N^2(x, y)>0$ шәрти өдәнир. Ајдындыр ки; $M^2(x, y)+N^2(x, y)=0$ олан (x, y) нөгтәләриндә (21) тәнлији истигамәт тә'јин етмир. Белә нөгтәләрә тәнлијин *мәхсуси нөгтәләри* дејилир.

§ 2. ДӘЈИШӘНЛӘРИНӘ АЈРЫЛАН ТӘНЛИКЛӘР

Тутаг ки,

$$M(x)\,dx+N(y)\,dy=0 \qquad (22)$$

тәнлији верилмишдир; бурада $M(x)$, $N(y)$ ујғун олараг (a,b) вә (c,d) интервалларында кәсилмәз функсијалардыр вә $M^2(x)+N^2(y)>0$.

Бу тәнликдә dx-ин әмсалы анҹаг x-дән, dy-ин әмсалы исә анҹаг y-дән асылы функсијадыр. Белә тәнликләрә *дәјишәнләринә ајрылмыш диференсиал тәнликләр* дејилир.

Ихтијари $x_0\in(a,b)$, $y_0\in(c,d)$ көтүрүб,

$$\Phi(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(\xi)\,d\xi+\int_{y_0}^{y} N(\eta)\,d\eta \qquad (23)$$

функсијасыны дүзәлдәк.

Ајдындыр ки, $\Phi(x,y)$ функсијасы $D=\{a<x<b;\ c<y<d\}$ областында кәсилмәз, диференсиалланандыр вә (22) тәнлијинин интеграл әјриләри бојунча

$$d\,\Phi(x,y)=d\left(\int_{x_0}^{x} M(\xi)\,d\xi+\int_{y_0}^{y} N(\eta)\,d\eta\right)=0$$

мүнасибәти өдәнир. Демәли, (22) тәнлијинин үмуми интегралы

$$\Phi(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(\xi)\,d\xi+\int_{y_0}^{y} N(\eta)\,d\eta=c \qquad (24)$$

шәклиндәдир; бурада c ихтијари сабитдир. Үмуми интегралдан $c=0$ көтүрмәклә алынан

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi)\,d\xi+\int_{y_0}^{y} N(\eta)\,d\eta=0 \qquad (25)$$

мүнасибәти (22) тәнлијинин (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисинин гејри-ашкар шәкилдә тәнлији олур. Доғрудан да, (23) дүстуру илә тә'јин олунан $\Phi(x, y)$ функсијасы үчүн $\Phi(x_0, y_0)=0$, $\Phi_x^2(x_0, y_0)+\Phi_y^2(x_0, y_0)=M^2(x_0)+N^2(y_0)>0$ олдуғундан, гејри-ашкар функсијанын варлығы вә јеканәлији һаггында теоремә әсасән (25) тәнлији (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән јеканә интеграл әјриси тә'јин едир.

Демәли, D областынын һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсиндән (22) тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир.

Арашдырдығымыз (22) тәнлијиндән үмуми олан

$$M_1(x)N_1(y)\,dx+M_2(x)N_2(y)\,dy=0 \qquad (26)$$

тәнлији дә дәјишәнләринә ајрылмыш тәнлијә кәтирилир; бурада $M_i(x), N_i(y), (i=1,2)$ функсијалары ујғун олараг (a,b), (c,d) интервалында кәсилмәздир. Ајдындыр ки, D областынын $M_1^2(x)N_1^2(y)+M_2^2(x)N_2^2(y)>0$ шәрти өдәнән нөгтәләриндә (26) тәнлији тә'јин олунмушдур. (26) шәклиндә олан тәнликләрә *дәјишәнләринә ајрылан тәнликләр* дејилир.

Тутаг ки, $(x_0, y_0)\in D$ нөгтәсиндә $M_2(x_0)\neq 0$, $N_1(y_0)\neq 0$ шәртләри өдәнир. Онда (x_0, y_0) нөгтәсинин әтрафында (26) тәнлијинин һәр тәрәфини $N_1(y)M_2(x)$ һасилинә бөлмәклә дәјишәнләринә ајрылмыш

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}\,dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}\,dy=0$$

тәнлији алынар вә јухарыдакы мүһакимәләрә әсасән онун үмуми интегралы

$$\int_{x_0}^{x}\frac{M_1(\xi)}{M_2(\xi)}\,d\xi+\int_{y_0}^{y}\frac{N_2(\eta)}{N_1(\eta)}\,d\eta=c \qquad (27)$$

шәклиндә олар.

Тутаг ки, (a,b) интервалында $M_2(x)\neq 0$ вә $N_1(y_1)=0$ $(c<y_1<d)$. Тәнликдә $y=y_1$ јазсаг, $dy_1=0$ олдуғундан аларыг ки, $y=y_1$ функсијасы һәмин тәнлијин (a,b) интервалында һәллидир. Бундан башга, $M_2(x_1)=0$ $(a<x_1<b)$ оларса, $y=y_1$ функсијасы (a,x_1), (x_1,b) интервалларында, $x=x_1$ функсијасы исә (c,y_1), (y_1,d) интервалларында (26) тәнлијинин һәлләридир. Бу һәлләр (27) дүстурундан c-јә мүмкүн әдәди гијмәт вермәклә алынарса хүсуси һәлл, алынмырса мәхсуси һәлл олур. Ајдындыр ки, (x_1, y_1) нөгтәсиндә тәнлик тә'јин олунмамышдыр.

Беләликлә, (26) тәнлијинин мәхсуси һәлләри анҹаг $N_1(y)$ вә $M_2(x)$ функсијаларанын сыфырлары ичәрисиндә олар.

Мисал. $\sqrt[3]{4-y^2}\,dx+4y(x-1)^2\,dy=0$ тәнлијинин һәлл едәк.

Һәлли. Бу тәнликдә $M_1(x)=1$, $M_2(x)=(x-1)^2$, $N_1(y)=\sqrt[3]{4-y^2}$, $N_2(y)=4y$ функсијалары бүтүн һәгиги охда кәсилмәздир вә xOy мүстәвисинин $(1, 2)$, $(1, -2)$ нөгтәләри мүстәсна олмагла һәр јердә $M_1^2(x)N_1^2(y)+M_2^2(x)N_2^2(y)>0$ шәрти өдәнир. Тәнлијин һәр тәрәфини $(x-1)^2\sqrt[3]{4-y^2}$ һасилинә бөлсәк, дәјишәнләринә ајрылмыш

260—2

$$\frac{ax}{(x-1)^2} + \frac{4y}{\sqrt[3]{4-y^2}}\,dy = 0$$

тәнлији алынар. Онун үмуми интегралы

$$1 + 3(x-1)\sqrt[3]{(4-y^2)^2} - c(x-1) = 0$$

шәклиндәдир.

Бундан башга, $x = 1$ функсијасы $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$ интервалларында, $y = \pm 2$ функсијалары исә $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ интервалларында бахылан тәнлијин һәлләридир.

Ајдындыр ки, $x = 1$ һәллини үмуми интегралы

$$c_1\left[1 + 3(x-1)\sqrt[3]{(4-y^2)^2}\right] - (x-1) = 0 \left(c_1 = \frac{1}{c}\right)$$

шәклиндә јазыб, $c_1 = 0$ көтүрмәклә алмаг олар. Демәли, $x = 1$ һәлли хүсуси һәллдир. $y = \pm 2$ һәлләри исә үмуми интегралдан c сабитинә әдәди гијмәт вермәклә алынмыр. Демәли, бу һәлләр бахылан тәнлијин мәхсуси һәлләридир.

§ 3. БИРЧИНС ТӘНЛИКЛӘР

а) Үмуми интегралын гурулмасы. Тутаг ки, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләринин мүәјјән G областында тә'јин олунмушдур. Мүәјјән m әдәди, һәр бир $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$ нөгтәси вә $(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \in G$ шәртини өдәјән истәнилән t үчүн

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

оларса, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасы G областында *m дәрәчәли бирчинс функсија* адланыр.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{21}$$

тәнлијиндә $M(x, y)$, $N(x, y)$ функсијалары D областында ејни дәрәчәли бирчинс функсијалар олдугда, һәмин тәнлијә *бирчинс тәнлик* дејилир. Тә'рифдән ајдындыр ки, (21) тәнлији бирчинс тәнлик исә, $\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ вә $\frac{N(x, y)}{M(x, y)}$ функсијалары сыфыр дәрәчәли бирчинс функсијалар олур.

$$F(x, y, dx, dy) \equiv M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

ишарә едәк. Мүәјјән κ, m әдәдләри, һәр бир $(x, y) \in D$ нөгтәси вә $(tx, t^\kappa y) \in D$ шәртини өдәјән истәнилән t үчүн

$$F(tx, t^\kappa y, dx, t^{\kappa-1} dy) = t^m F(x, y, dx, dy) \tag{28}$$

оларса, (21) тәнлији *үмумиләшмиш бирчинс тәнлик* адланыр. Хүсуси һалда, $\kappa = 1$ олдугда үмумиләшмиш бирчинс тәнлик бирчинс тәнлијә чеврилир.

Бирчинс тәнликләри араштырыркән фәрз едәчәјик ки. $M(x, y)$, $N(x, y)$ функсијалары $D = \{0 < x < +\infty, ax^\kappa < y < bx^\kappa\}$ областында кәсилмәздир вә $M^2(x, y) + N^2(x, y) > 0$ шәрти өдәнир.

Тә'рифдән ајдындыр ки, (28) шәртинин өдәнмәси үчүн

$$M(tx, t^\kappa y) = t^m M(x, y), \qquad N(tx, t^\kappa y) = t^{m-\kappa+1} N(x, y)$$

олмалыдыр. Бурадан, $t = \frac{1}{x}$ көтүрмәклә

$$M(x, y) = x^m M\left(1, \frac{y}{x^\kappa}\right), \quad N(x, y) = x^{m-\kappa+1} N\left(1, \frac{y}{x^\kappa}\right)$$ бәрабәрлик-

ләрини алырыг. Бу мүнасибәтләри (21) тәнлијиндә јазсаг

$$x^m M\left(1, \frac{y}{x^\kappa}\right) dx + x^{m-\kappa+1} N\left(1, \frac{y}{x^\kappa}\right) dy = 0 \tag{29}$$

тәнлији алынар. (Ајдындыр ки, $\kappa = 0$ оларса, алынмыш тәнлик дәјишәнләринә ајрылан тәнлик олар).

Алынмыш (29) тәнлијиндә

$$y = x^\kappa z$$

әвәзләмәси апараг; бурада z јени ахтарылан функсијадыр. (Бирчинс тәнлик үчүн әвәзләмәдә $\kappa = 1$ көтүрүлүр). Онда

$$dy = \kappa x^{\kappa-1} z\,dx + x^\kappa dz$$

олдуғу нәзәрә алсаг; (29) тәнлијини

$$[M(1, z) + \kappa z N(1, z)]\,dx + x N(1, z)\,dz = 0 \tag{30}$$

шәклиндә јаза биләрик. Ајдындыр ки, $M(1, z) + \kappa z N(1, z)$, $N(1, z)$ функсијалары (a, b) интервалында кәсилмәздир.

Алынан тәнлик дәјишәнләринә ајрылан тәнликдир вә $M(1, z) + \kappa z N(1, z) \neq 0$ фәрз етсәк онун үмуми интегралы $x = c \exp \omega(z)$ олар; бурада $\omega(z) = -\int \frac{N(1, z)\,dz}{M(1, z) + kz N(1, z)}$.

Бурадан, $z = \frac{y}{x^\kappa}$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$x = c \exp \omega\left(\frac{y}{x^\kappa}\right)^{*} \tag{31}$$

аиләси (21) тәнлијинин үмуми интегралы олар.

Ајдындыр ки, $M(1, z) + \kappa z N(1, z) = 0$ тәнлијинин һәр бир $z = z_0$ һәгиги көкү (варса) (30) тәнлијинин һәллидир. Онда (21) тәнлијинин $z = z_0$-а ујғун һәлли $y = z_0 x^\kappa$ шәклиндә олар. Бу һәлл мәхсуси һәлл ола биләр.

$$M(1, z) + \kappa z N(1, z) \equiv 0$$

оларса (21) тәнлији $\kappa y\,dx - x\,dy = 0$ дәјишәнләринә ајрылан тәнлијинә чеврилир.

---

* Бурада $\exp z$ илә e^z ишарә олунур.

б) *Бирчинс тәнлијин һәлләринин һәндәси хассәләри.* Тә'рифдән ајдындыр ки, бирчинс тәнлији һәмишә

$$y' = \Phi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{32}$$

шәклинә кәтирмәк олар. Фәрз едәк ки, $\Phi(z)$ функсијасы (a, b) интервалында кәсилмәздир, онда $\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ функсијасы $a < \frac{y}{x} < b$ шәртини өдәјән (x, y) нөгтәләри чохлуғунда кәсилмәз олар вә (32) тәнлијинин үмуми интегралы

$$x - c \exp\omega\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad \omega(z) = \int\frac{dz}{\Phi(z) - z} \tag{33}$$

дүстуру илә верилләр.

Ајдындыр ки, һәр бир $\kappa \in (a, b)$ үчүн $y = \kappa x$ дүз хәтти бојунча $y' = \Phi(\kappa)$. Демәли, $y = \kappa x$ дүз хәтти (32) тәнлијинин изоклинидир.

Фәрз едәк ки, $y = \varphi(x)$ функсијасынын тә'јин етдији әјри (32) тәнлијинин координат башланғычындан чыхан шүадан фәргли интеграл әјрисидир. Бу интеграл әјрисинин ихтијари (x, y) нөгтәси вә (a, b) интервалындан олан истәниләи κ $(\kappa \neq 0)$ әдәди үчүн $(\kappa x, \kappa y)$ нөгтәләри дә тәнлијин башга интеграл әјриси үзәриндәдир. Башга сөзлә десәк, $y = \frac{1}{k}\varphi(\kappa x)$ функсијасы да (32) тәнлијинин һәллидир.

Доғрудан да, $\left[\frac{1}{k}\varphi(\kappa x)\right]' = \varphi'(\kappa x)$ мүнасибәтиндән вә $\varphi'(x) = \Phi\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)$ ејнилијиндән алынар ки, $\varphi'(\kappa x) = \Phi\left(\frac{\varphi(\kappa x)}{\kappa x}\right)$ ејнилији өдәнир. Бу исә о демәкдир ки, $y = \frac{1}{\kappa}\varphi(\kappa x)$ функсијасы да (32) тәнлијинин һәллидир.

Беләликлә, $y = \varphi(x)$ интеграл әјрисинин бүтүн (x, y) нөгтәләри үзәриндә

$$x_1 = \kappa x, \quad y_1 = \kappa y, \quad \kappa \in (a, b) \quad (\kappa \neq 0) \tag{34}$$

чевирмәси апармагла алынан (x_1, y_1) нөгтәләринин һәндәси јери дә интеграл әјриси верир. Мә'лумдур ки, (34) чевирмәси охшарлыг мәркәзи координат башланғычында олан охшар чевирмәдир.

Демәли, бирчинс тәнлијин интеграл әјрисиндән охшарлыг мәркәзи координат башланғычында олан охшар чевирмә васитәсилә алынан әјри дә бирчинс тәнлијин интеграл әјриси олур. Бу тәклифин тәрси дә доғрудур; јә'ни бирчинс тәнлијин үмуми интегралындан алынан вә координат башланғычындан чыхан шүадан фәргли олан һәр бир интеграл әјрисини, һәмин

тип интеграл әјриләринин бириндән охшарлыг мәркәзи координат башланғычында олан охшар чевирмә васитәсилә алмаг олар. Доғрудан да, тутаг ки,

$$x = c\exp\omega\left(\frac{y}{x}\right) \text{ вә } x = c_1\exp\omega\left(\frac{y}{x}\right)$$

(32) тәнлијинин ики мүхтәлиф интеграл әјриләридир. Биринчи интеграл әјрисинин тәнлијини $\kappa x = \kappa c \exp\omega\left(\frac{\kappa y}{\kappa x}\right)$ шәклиндә јазараг $\kappa = \frac{c_1}{c}$ гәбул етсәк вә $x_1 = \kappa x$, $y_1 = \kappa y$ ишарә етсәк

$$x_1 = c_1\exp\omega\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$$

олар. Бу исә көстәрир ки, икинчи интеграл әјриси биринчи интеграл әјрисиндән (34) чевирмәси васитәсилә алыныр.

Бирчинс тәнлијин һәлләринин исбат етдијимиз хассәләриндән ашағыдакылар алыныр:

1) һәр һансы интеграл әјриси координат башланғычындан чыхан шүадан фәргли исә вә ики $y = \alpha_1 x$, $y = \alpha_2 x$ $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$ шүалары арасында јерләшмәклә координат башланғычына јанашырса, һәмин шүалар арасында галан бүтүн интеграл әјриләри координат башланғычына јанашыр. ((32) тәнлијиндә $\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$ функсијасы (0, 0) нөгтәсиндә тә'јин олунмадығындан бу нөгтәдән кечән һәллин варлығыны демәк олмаз вә һәр һансы $y = \varphi(x)$ һәлли координат башланғычына јанашыр дедикдә $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0$ баша дүшүлүр);

2) һәр һансы әјри (32) тәнлијинин интеграл әјриси исә, координат башланғычына нәзәрән бу әјри илә симметрик олан әјри дә интеграл әјриси олур;

3) (32) тәнлијинин интеграл әјриләриндән бири гапалы әјри исә, бүтүн интеграл әјриләри гапалыдыр.

в) *Бирчинс тәнлијә кәтирилән тәнликләр.* Тутаг ки,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{35}$$

тәнлији верилмишдир. Ајдындыр ки, $c_1 = c_2 = 0$ олдугда (35) тәнлији бирчинс тәнликдир. Она көрә дә c_1, c_2 әдәдләриндән һеч олмаса бирини сыфырдан фәргли гәбул едәрәк ашағыдакы һаллары арашдыраг:

1) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Бу һалда $a_1 = \kappa a_2$, $b_1 = \kappa b_2$ олур вә $z = a_2x + b_2y$ әвәзләмәси васитәсилә (35) тәнлији дәјишәнләринә ајрылан тәнлијә кәтирилир.

2) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Бу һалда (35) тәнлијиндә

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta$$

əvəzləməsi aparaг; burada α, β həlelik namə'lum ədədlərdir. Onda (35) tənliji

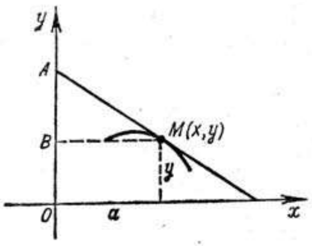
$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2\xi + b_2\eta + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)}\right) \qquad (35)$$

şəklinə düşür. Ajdındır ki, α və β ədədlərini

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

sisteminin həlli kimi tə'jin etsək, (35) tənliji birçins tənlik olar.

Misal 1. Hər bir nöqtəsində toxunanın ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsi koordinat başlanğıcından və toxunma nöqtəsindən ejni məsafədə jerləşən əjrini tapmalı.



Şəkil 3.

Həlli. Axtarılan əjrini $y = y(x)$ ilə işarə edək. Bu əjri üzərində $M(x, y)$ nöqtəsi götürək və tutaг ki, AM həmin nöqtədə əjrijə çəkilmiş toxunandır (şəkil 3). Şərtə görə $AM = OA$. Toxunanın həndəsi mə'nasına görə $\operatorname{tg}\alpha = y'$ olduğundan $AB = -xy'$ və $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{x^2y'^2 + x^2}$ olar. $AM = OA$ şərtinə əsasən

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

tənlijini alırıг. Bu tənlik birçins tənlikdir və $y = xz$ əvəzləməsi vasitəsilə dəjişənlərinə ajrılmış

$$\frac{2z\,dz}{1 + z^2} = -\frac{dx}{x}$$

tənlijinə gətirilir. Onun ümumi integralı $x(1 + z^2) - c = 0$ şəklindədir və $z = \frac{y}{x}$ olduğundan, alırıг ki, axtarılan əjrilər $x^2 + y^2 - cx = 0$ olur.

Misal 2.

$$4xy^2\,dx + (3x^2y - 1)\,dy = 0$$

tənlijini həll edək.

Həlli. Bu tənlikdə x, y, dx, dy dəjişənlərini ujğun olaraг $tx, t^{\kappa}y, dx, t^{\kappa-1}dy$ ilə əvəz edərək toplananların t-jə nəzərən dərəcələrini bərabərləşdirək. Onda κ ədədi üçün

$$1 + 2\kappa = 2 + 2\kappa - 1 = \kappa - 1$$

tənliklər sistemi alınar. Buradan $\kappa = -2$ və deməli, verilən tənlik ümumiləşmiş birçins tənlikdir. Onda

$$y = zx^{-2}$$

əvəzləməsi vasitəsilə onu dəjişənlərinə ajrılan

$$2x^{-3}(z - z^2)\,dx + x^{-2}(3z - 1)\,dz = 0$$

tənlijinə gətirə bilərik. Bu tənlijin ümumi integralı

$$z(z - 1)^2 - cx^2 = 0$$

şəklindədir. Burada $z = x^2y$ jazsaг baxılan tənlijin ümumi integralı

$$y(x^2y - 1)^2 - c = 0$$

olar.

Misal 3. $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x + y - 2}{x - 1}\right)^2$ tənlijini həll edək.

Həlli. Bu tənlik üçün $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Odur ki, tənlikdə $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$ əvəzləməsi aparıb, α, β məçhullarına nəzərən

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2 = 0, \\ \alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

tənliklər sistemini alırıг. Bu sistemin həlli $\alpha = 1$, $\beta = 1$ olduğundan $x = \xi + 1$, $y = \eta + 1$ əvəzləməsi nəticəsində

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi + \eta}{\xi}\right)^2$$

birçins tənliji alınır. Ona görə $\eta = z\xi$ əvəzləməsi aparaг, bu tənlikdən

$$2\xi\,dz = (1 + z^2)\,d\xi$$

dəjişənlərinə ajrılan tənliji alarıг. Bu tənlijin ümumi integralı

$$\xi - c\exp(2\operatorname{arctg} z) = 0$$

olduğundan, baxılan tənlijin ümumi integralı

$$x - 1 - c\exp\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{y - 1}{x - 1}\right)\right) = 0.$$

§ 4. XƏTTI TƏNLIKLƏR

Kvadratura ilə həll olunan tənliklərdən bir sinfi də xətti tənliklərdir. Axtarılan funksija və onun törəməsinə nəzərən xətti olan

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0$$

тәнлијинә биртәртибли *хәтти тәнлик* дејилир. $A(x)\neq 0$ гәбул едәрәк бу тәнлији

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (36)$$

шәклиндә јазаг.

Фәрз едәчәјик ки, $p(x)$, $q(x)$ функсијалары мүәјјән (a,b) интервалында кәсилмәздир. (a,b) интервалында $q(x)\equiv 0$ оларса, (36) тәнлији

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (37)$$

шәклинә дүшәр. Бу тәнлик (36) тәнлијинә ујғун олан хәтти бирчинс тәнлик адланыр.

(36) хәтти тәнлијиндә $f(x,y) = -p(x)\,y + q(x)$ функсијасы $D=\{a<x<b,\ -\infty<y<+\infty\}$ областында кәсилмәздир вә кәсилмәз $f_y(x,y) = -p(x)$ хүсуси төрәмәси вар. Буна көрә дә D областынын һәр бир (x_0,y_0) нөгтәсиндән (36) тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир. Беләликлә, $p(x)$, $q(x)$ функсијалары кәсилмәздирсә, (36) тәнлијинин мәхсуси һәлли јохдур.

Ајдындыр ки, (37) тәнлији дәјишәнләринә ајрылан тәнликдир вә онун үмуми һәлли

$$y = c\,\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right),\ x_0\in(a,b) \qquad (38)$$

шәклиндәдир.

Бирчинс олмајан (36) тәнлијини һәлл етмәк үчүн

$$y = c(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right) \qquad (39)$$

әвәзләмәси апараг; бурада $c(x)$ јени ахтарылан функсијадыр. Бу әвәзләмәни (36) тәнлијиндә нәзәрә алсаг, $c(x)$-ә нәзәрән

$$\frac{dc}{dx} = q(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right)$$

тәнлијини аларыг. Бурадан интегралламараг аларыг ки,

$$c(x) = \int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} p(\tau)\,d\tau\right)ds + c.$$

Бу ифадәни (39)-да нәзәрә алсаг (36) тәнлијинин үмуми һәллини

$$y = c\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right) + $$

$$+\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right)\int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} p(\tau)\,d\tau\right)ds \qquad (40)$$

шәклиндә гурарыг; бурада c ихтијари сабитдир.

Бирчинс олмајан (36) тәнлијинин үмуми һәллини гураркән јухарыда тәтбиг етдијимиз үсула *сабитин вариасијасы үсулу* дејилир. Ајдындыр ки, үмуми һәллин ифадәсиндәки биринчи топланан бирчинс тәнлијин үмуми һәлли, икинчи топланан исә (36) тәнлијинин бир хүсуси һәллидир.

Демәли, бирчинс олмајан хәтти тәнлијин үмуми һәллини ики квадратура илә гурмаг олар.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, (36) тәнлијинин $(x_0,y_0)\in D$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисини тә'јин едән функсија

$$y = y_0\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right) +$$

$$+\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right)\int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} p(\tau)\,d\tau\right)ds$$

дүстуру илә верилир.

Бундан әлавә, (40) дүстурундан ајдындыр ки, (36) тәнлијинин һәлләри (a,b) интервалында, јә'ни $p(x)$, $q(x)$ функсијаларынын кәсилмәз олдуглары интервалда, тә'јин олунублар.

Гејд едәк ки, бу хассә гејри-хәтти тәнликләр үчүн, үмумијјәтлә, сахланылмыр. Доғрудан да, $y' = 1+y^2$ тәнлијиндә $f(x,y) = 1+y^2$ функсијасынын xOy мүстәвисиндә кәсилмәз олмасына бахмајараг, $y=\operatorname{tg}(x+c)$ һәлли, c-нин һәр бир гијмәтиндә һәгиги охдан $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi - c$, $k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots$ нөгтәләрини чыхдыгдан сонра галан һиссәдә тә'јин олунмушдур.

Мисал. Һәчми 200 $м^3$ олан отаг һавасынын 0,15%-и карбон газыдыр. Отаға һәр дәгигә тәркибинин 0,04 %-и карбон газы олан 20 $м^3$ һава вурулур вә һәмин сүр'әтлә отагдан гарышыг чыхыр. Нә гәдәр вахтдан сонра отагдакы карбон газынын мигдары 1,5 дәфә азалар?

Һ ә л л и. Тутаг ки, t анында отагда $x(t)$ гәдәр карбон газы вар. Бир дәгигәдә отаға $\frac{20\cdot 0{,}04}{100} = 0{,}008$ гәдәр карбон газы дахил олдуғундан, Δt мүддәтиндә $0{,}008\Delta t$ гәдәр карбон газы дахил олар. Дикәр тәрәфдән Δt мүддәтә отагдан $\frac{20}{200}\ [x(t)+\alpha]\Delta t = 0{,}1\,[x(t)+\alpha]\Delta t$ гәдәр карбон газы чыхыр; бурада α кәмијјәти Δt сыфра јахынлашдыгда сыфра јахынлашыр. Демәли, Δt мүддәтдә отагда карбон газынын дәјишмәси гануну

$$x(t+\Delta t) - x(t) = 0{,}008\Delta t - 0{,}1\,[x(t)+\alpha]\,\Delta t$$

олар. Бу бәрабәрлијин һәр тәрәфини Δt-јә бөлүб, Δt сыфра јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк

$$\dot{x} + 0{,}1x = 0{,}008$$

тәнлијини аларыг. Алынан тәнлик хәтти тәнликдир вә онун үмуми һәлли

$$x = c\cdot e^{-\frac{t}{10}} + 0{,}08$$

олур. $t=0$ анында отагда $\frac{200\cdot 0{,}15}{100} = 0{,}3$ гәдәр карбон газы олдуғундан, t анында отагдакы карбон газынын мигдары

$$x(t) = 0{,}22\cdot e^{-0{,}1t} + 0{,}08$$

олар. Шәртә көрә мүәјјән T анында карбон газынын мигдары 1,5 дәфә азалдығындан,

$$0{,}2 = 0{,}22\cdot e^{-0{,}1T}+0{,}08$$

олмалыдыр. Бурадан, $T\approx 6$ *дәг.*

§ 5. БЕРНУЛЛИ ТӘНЛИЈИ

Бә'зи гејри-хәтти тәнликләр әвәзләмә васитәсилә хәтти тәнлијә кәтирилир. Белә тәнликләрдән бири *Бернулли тәнлији* адланан

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \qquad (41)$$

тәнлијидир; бурада m сыфырдан вә ваһиддән фәргли ихтијари һәгиги әдәддир. Ајдындыр ки, $m=0$, $m=1$ олдугда (41) тәнлији хәтти тәнлијә чеврилир.

Фәрз едәк ки, $p(x)$, $q(x)$ функсијалары (a,b) интервалында кәсилмәздир.

Бернулли тәнлијини һәлл етмәк үчүн онун һәр тәрәфини y^{-m}-ә вураг ($y\neq 0$) вә алынан

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x)$$

тәнлијиндә $y^{1-m}=z$ әвәзләмәси апараг. Бу заман z-ә нәзәрән

$$z' + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x)$$

хәтти тәнлији алынар. Онун үмуми һәлли

$$z = \exp\left[(m-1)\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right]\left\{c + \right.$$

$$\left. + (1-m)\int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left[(1-m)\int_{x_0}^{s} p(\tau)\,d\tau\right]ds\right\} \qquad (42)$$

дустуру илә верилир. Бурада $z=y^{1-m}$ олдуғуну нәзәрә алсаг Бернулли тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = \exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(s)\,ds\right)\left\{c+\right.$$

$$\left.+(1-m)\int_{x_0}^{x} q(s)\exp\left[(1-m)\int_{x_0}^{s}p(\tau)\,d\tau\right]ds\right\}^{\frac{1}{1-m}} \qquad (43)$$

олар. Ајдындыр ки, $m>0$ олдугда $y=0$ Бернулли тәнлијинин һәллидир. $m>1$ олдугда $y=0$ һәлли (43) үмуми һәллиндән $c=\infty$ көтүрмәклә алыныр, јә'ни $m>1$ олдугда $y=0$ һәлли Бернулли тәнлијинин хүсуси һәллидир. $0<m<1$ олдугда исә $y=0$ һәлли, үмуми һәллдән c сабитинә мүмкүн әдәди гијмәт вермәклә алынмыр. Демәли, $0<m<1$ олдугда $y=0$ һәлли Бернулли тәнлијинин мәхсуси һәлли олур.

Мисал. Елә әјри тапын ки, онун һәр бир нөгтәсиндә чәкилмиш тохунанын ординат охундан ајырдығы парчанын узунлуғу, радиусу тохунма нөгтәсинин ординаты олан даирәнин саһәсинә гијмәтчә бәрабәр олсун.

Һәлли. Тутаг ки, $y=y(x)$ ахтарылан әјринин тәнлијидир. Әјри үзәриндә ихтијари (x,y) нөгтәси көтүрәк вә бу нөгтәдә әјријә чәкилмиш тохунанын чари координатларыны X, Y илә ишарә едәрәк онун тәнлијини јазаг:

$$Y - y = y'(x)(X-x).$$

Бурадан, тохунанын ординат охундан ајырдығы парчанын узунлуғунун $y-xy'$ олдуғуну аларыг. Радиусу $|y|$-ә бәрабәр олан даирәнин саһәси πy^2-на бәрабәрдир. Онда мәсәләнин шәртинә әсасән

$$y - xy' = \pi y^2 \text{ вә ја } xy' - y = -\pi y^2$$

Бернулли тәнлији алыныр. Онун үмуми һәлли

$$y = \frac{x}{c+\pi x}.$$

§ 6. ТАМ ДИФЕРЕНСИАЛЛЫ ТӘНЛИКЛӘР

Квадратура илә һәлл олунан биртәртибли тәнликләрин бир синфи дә там диференсиаллы тәнликләрдир.

Тутаг ки,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (21)$$

тәнлији верилмишдир. Бурада $M(x,y)$, $N(x,y)$ функсијалары мүәјјән биррабитәли D областында аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәздир, $M(x,y)$ функсијасынын y дәјишәнинә нәзәрән, $N(x,y)$ функсијасынын исә x дәјишәнинә нәзәрән бу областда кәсилмәз хүсуси төрәмәси вар, $M^2(x,y)+N^2(x,y)>0$.

Мә'лумдур ки, D областында тә'јин олунмуш икидәјишәнли $u=u(x,y)$ функсијасынын там диференсиалы

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (44)$$

дүстуру илә һесабланыр.

(21) тәнлијин сол тәрәфи һәр һансы $u(x, y)$ функсијасынын там диференсиалы оларса, јә'ни

$$du = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \tag{45}$$

исә, һәмин тәнлијә D областында *там диференсиаллы тәнлик* дејилир. Беләликлә, (21) тәнлији там диференсиаллы тәнлик олдугда ону

$$du = 0$$

шәклиндә јазмаг олар вә һәмин тәнлијин умуми интегралы

$$u(x, y) = c \tag{46}$$

олур. Демәли, (21) тәнлији верилдикдә, 1) һәмин тәнлијин там диференсиаллы олдуғуну билмәк вә 2) тәнлик там диференсиаллы олдугда $u(x, y)$ функсијасыны гурмаг лазымдыр.

Теорем 1 (Там диференсиаллыг әламәти). *D областында (21) тәнлијинин там диференсиаллы тәнлик олмасы үчүн бу областда*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{47}$$

шәртинин өдәнмәси зәрури вә кафидир.

Зәруриликин исбаты. Тутаг ки, (21) тәнлији там диференсиаллыдыр. Онда (44), (45) мүнасибәтләриндән алыныр ки, D областында

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \equiv M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy.$$

Бурадан, dx, dy диференсиаллары ихтијари олдуғундан

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv M(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv N(x, y) \tag{48}$$

ејниликләри алынар. Бу ејниликләрин биринчисинин y-ә, икинчисинин x-ә нәзәрән төрәмәсини алсаг

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$

олар. Бурадан, гарышыг төрәмәләрин бәрабәрлији һаггында Шварс теореминә әсасән (47) шәртинин өдәндијини алырыг.

Кафилијин исбаты. Көстәрәк ки, (47) шәрти өдәндикдә елә $u(x, y)$ функсијасы вар ки, бу функсијанын там диференсиалы (21) тәнлијинин сол тәрәфинә бәрабәр олур. Бунун үчүн D областындан һәр һансы (x_0, y_0) нөгтәси көтүрәрәк (48) бәрабәрликләринин биринчисини x_0-дан x-ә гәдәр интеграллламагла аларыг ки,

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi + \varphi(y); \tag{49}$$

бурада $\varphi(y)$ һәләлик намә'лум диференсиалланан функсијадыр. Бу функсијаны елә сечәк ки, (49) дүстуру илә тә'јин олунан $u(x, y)$ функсијасы (48) бәрабәрликләриндән икинчисини дә өдәсин, јә'ни

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi\right) + \varphi'(y) = N(x, y)$$

олсун. Бурадан, $M(x, y)$ функсијасы үзәринә гојулан шәртләр дахилиндә y параметринә көрә интеграл алтында диференсиалламаг ганунн олдуғундан

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(\xi, y)}{\partial y}\,d\xi + \varphi'(y) = N(x, y)$$

олар. (47) шәртинә әсасән бу мүнасибәти

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(\xi, y)}{\partial \xi}\,d\xi + \varphi'(y) = N(x, y)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан $\varphi(y)$-ә нәзәрән

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

диференсиал тәнлији алынып вә онун һәлли

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\,d\eta + c \tag{50}$$

олур; бурада c ихтијари сабитдир.

Ајдындыр ки, (50) илә тә'јин олунан $\varphi(y)$ функсијасыны (49)-да јеринә јазсаг, алынан

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\,d\eta + c$$

функсијасы үчүн (45) мүнасибәти өдәниләр. Бу исә көстәрир ки, (47) шәртинин өдәнмәси (21) тәнлијинин там диференсиаллы олмасы үчүн һәм дә кафидир.

Теоремин кафилијинин исбатындан ајдындыр ки, там диференсиаллы тәнлијин үмуми интегралы

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\,d\eta = c \tag{51}$$

дүстуру илә вериләр.

Көстәрмәк олар ки, там диференсиаллы (21) тәнлијинин $(x_0, y_0) \in D$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси, јә'ни онун $y(x_0) = y_0$ башланғыч шәртини өдәјән һәлли

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\,d\eta = 0$$

тәнлиjиндән гејри-ашкар функсиjа кими тә'jин олунур.

Гејд едәк, (48) бәрабәрликләриндән икинчисини көтүрүб јухарыдакы мүһакимәләри апармагла тәнлијин үмуми интегралыны

$$\int_{x_0}^{x} M(\xi, y_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x, \eta)\,d\eta = c \qquad (51)$$

шәклиндә дә тапмаг олар.

Мисал. $(3x^2 - 2x - y)\,dx + (2y - x + 3y^2)\,dy = 0$ тәнлиjини һәлл едәк.

Һәлли. $M(x, y) = 3x^2 - 2x - y$, $N(x, y) = 2y - x + 3y^2$ вә $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -1$, jә'ни верилән тәнлик там диференсиаллы тәнликдир. Она көрә дә тәнлиjин үмуми интегралы

$$\int_{x_0}^{x} (3\xi^2 - 2\xi - y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} (2\eta - x_0 + 3\eta^2)\,d\eta = c$$

шәклиндәдир. Бурада

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0$$

көтүрмәк әлверишлидир вә онда тәнлиjин үмуми интегралы

$$x^3 - x^2 - xy + y^2 + y^3 = c.$$

§ 7. ИНТЕГРАЛЛАJЫЧЫ ВУРУГ

а) *Интеграллаjычы вуруғун тапылмасы.* Там диференсиаллы тәнликләр квадратура илә һәлл олундуғундан, бә'зи тәнликләри там диференсиаллы тәнликләрә кәтирмәк јолу илә һәлл етмәк олур. Одур ки, там диференсиаллы олмаjан тәнликләрин там диференсиаллы тәнлиjә кәтирилмәси мәсәләси илә мәшғул олаг.

Тутаг ки,

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \qquad (21)$$

тәнлиjи верилмишдир. Бурада $M(x, y)$, $N(x, y)$ функсиjалары 5-чи параграфда гојулан шәртләри өдәjир вә $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$.

Тутаг ки, ејнилик кими сыфыр олмаjан елә $\mu = \mu(x, y)$ функсиjасы вардыр ки, (21) тәнлиjинин һәр тәрәфини бу функсиjаjа вурдугда алынан

$$\mu M(x, y)\,dx + \mu N(x, y)\,dy = 0 \qquad (52)$$

тәнлиjи там диференсиаллы тәнликдир; jә'ни мүәjјән $U = U(x, y)$ функсиjасы үчүн

$$dU = \mu M(x, y)\,dx + \mu N(x, y)\,dy.$$

Белә $\mu = \mu(x, y)$ функсиjасына (21) тәнлиjинин *интеграллаjычы вуруғу*, $U(x, y)$ функсиjасына исә бу интеграллаjычы вуруға уjғун интегралы деjилир. Бу заман (21) тәнлиjинин үмуми интегралы

$$U(x, y) = c$$

дүстуру илә верилир.

Тутаг ки, $\mu = \mu(x, y)$ функсиjасы (21) тәнлиjинин интеграллаjычы вуруғу, $U(x, y)$ исә она уjғун интегралыдыр. Онда

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \frac{1}{\mu}\,dU$$

бәрабәрлиjинә әсасән (21) тәнлиjини

$$\frac{1}{\mu}\,dU = 0$$

шәклиндә јазмаг олар вә сонунчу тәнлик

$$dU = 0, \quad \frac{1}{\mu} = 0$$

тәнликләринә парчаланыр. Бу тәнликләрдән биринчиси (21) тәнлиjинин $U(x, y) = c$ үмуми интегралыны верир.

Икинчи тәнликдән тә'jин олунан функсиjалар (21) тәнлиjинин һәлләри ола биләр. Бу функсиjаларын һансы (21) тәнлиjинин һәлли исә вә үмуми интегралдан алынырса, хүсуси һәлл, алынмаjанлар исә мәхсуси һәлл олур.

Верилмиш диференсиал тәнлиjи там диференсиаллы тәнлиjә кәтирмәк јолу илә һәлл едәркән әсас чәтинлик интеграллаjычы вуруғу тапмагдан ибарәтдир.

Инди исә $\mu = \mu(x, y)$ интеграллаjычы вуруғунун ејнилик кими сыфыр олмадығыны вә кәсилмәз төрәмәләринин варлығыны фәрз едәрәк онун тапылмасы мәсәләси илә мәшғул олаг. Там диференсиаллыг әламәтинә әсасән, (52) тәнлиjинин там диференсиаллы тәнлик олмасы үчүн D областында

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

шәрти өдәнмәлидир. Бурада $\mu = \mu(x, y)$ функсиjасына ахтарылан функсиjа кими бахсаг, бу функсиjаjа нәзәрән

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \qquad (53)$$

диференсиал тәнлиjи алынар. Бу тәнлиjә $\mu(x, y)$ функсиjасынын хүсуси төрәмәләри дахилдир. Белә тәнлиjә *хүсуси төрәмәли тәнлик* деjилир.

Үмуми һалда, (53) тәнлиjини һәлл етмәк (21) тәнлиjини һәлл етмәкдән чәтиндир. Лакин хүсуси һалларда (53) тәнли-

јинин бә'зи һәлләрини тапмаг олур. Бу һаллары нәзәрдән кечирәк.

1. Тутаг ки, (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруглары ичәрисиндә јалныз x дәјишәниндән асылы олан интеграллајычы вуруғу вар. Бу вуруг үчүн $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$ олдуғундан, (53) тәнлији

$$N\frac{d\mu}{dx}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

шәклиндә ади диференсиал тәнлијә чеврилир. Бурадан

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} \qquad (54)$$

мүнасибәтини алырыг. Алынан бәрабәрлијин сол тәрәфи јалныз x-дән асылы олдуғундан, сағ тәрәфи дә јалныз x-дән асылы функсија олмалыдыр. Онда (54) тәнлијини

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx$$

шәклиндә јазыб интегралласаг,

$$\mu(x)=c\exp\left(\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\,dx\right). \qquad (55)$$

Бурада c ихтијари сабитдир.

Беләликлә, $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ нисбәти анчаг x-дән асылы оларса, (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруглары ичәрисиндә јалныз x-дән асылы олан интеграллајычы вуруғу вар вә (55) шәклиндәдир.

2. Тутаг ки, (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруглары ичәрисиндә јалныз y дәјишәниндән асылы интеграллајычы вуруғу вар. Белә интеграллајычы вуруг үчүн $\frac{\partial\mu}{\partial x}=0$ вә бу һалда (53) тәнлији

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

шәклинә дүшүр. Бурадан, јухарыдакына охшар гајда илә мүһакимә апармагла аларыг ки, јалныз y-дән асылы олан интеграллајычы вуруг

$$\mu(y)=c\exp\left(\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}\,dx\right)$$

дүстуру илә тә'јин олунур.

3. Тутаг ки, (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруглары ичәрисиндә верилмиш $\omega(x,y)$ функсијасындан асылы интеграллајычы вуруғу вар: $\mu=\mu[\omega(x,y)]$. Онда

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x} \quad \text{вә} \quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}$$

олдуғундан, (53) тәнлији ашағыдакы шәклә дүшүр:

$$\left(N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)\frac{d\mu}{d\omega}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(\omega).$$

Бурадан

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\omega}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}.$$

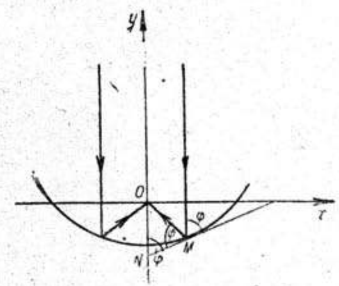
Бу бәрабәрлијин сол тәрәфи анчаг ω дәјишәнинин функсијасы олдуғундан, сағ тәрәф дә ω дәјишәнинин функсијасы олмалыдыр вә бу шәрт өдәндикдә (21) тәнлијинин

$$\mu=\exp\left(\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}\,d\omega\right)$$

шәклиндә интеграллајычы вуруғу вар.

Мисал 1. Ординат охуна паралел дүшән ишыг шүалары күзкүдә әкс олунуб координат башланғычында топланыр. Күзкүнүн формасыны тә'јин един.

Һәлли. Күзкүнүн xOy мүстәвиси илә кәсијини $y=y(x)$ илә ишарә едәк вә бу функсијаны тапаг. $y=y(x)$ әјриси үзәриндә $M(x,y)$ нөгтәси көтүрүб MN тохунаныны чәкәк (шәкил 4). Ишығын сынма ганунуна әсасән $\angle MNO=\angle OMN$ олар. Бурадан, $ON=MO$ олдуғуну нәзәрә алсаг,



Шәкил 4

$$xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$$

диференсиал тәнлијини аларыг. Бу тәнлик бирҹинс тәнликдир. Ону

$$(y+\sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0$$

шәклиндә јазыб $\mu = \frac{1}{x\sqrt{x^2+y^2}}$ функсијасына вураг. Онда

$$\left(\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}\right)dx - \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

там диференсиаллы тәнлији алынар, јә'ни $\mu=\frac{1}{x\sqrt{x^2+y^2}}$ функсијасы алынмыш тәнлијин интеграллајычы вуруғудур. Бу тәнлијин үмуми интегралы

$$2cy = c^2x^2 - 1.$$

Бурада c ихтијари сабитдир.

Демәли, күзкүнүн xOy мүстәвиси илә кәсији, симметрија оху ординат оху олан параболалар аиләси верир. Күзкүнүн формасы исә һәмин параболаларын ординат оху әтрафында фырланмасындан алынан

$$2cy = c^2(x^2+z^2)-1$$

параболоидләр шәклиндә олар.

Мисал 2. $y(xy+1)dx + x(xy-1)dy = 0$ тәнлијини һәлл едәк.

Һәлли. Тәнликдә $M(x,y) = y(xy+1)$, $N(x,y) = x(xy-1)$, $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \neq 0$ олдуғундан, бахылан тәнлик там диференсиаллы дејил.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2}{x(xy-1)}, \qquad \frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = -\frac{4}{y(xy+1)}$$

олдуғундан тәнлијин интеграллајычы вуруглары ичәрисиндә јалныз x вә јалныз y дәјишәниндән асылы интеграллајычы вуруғу јохдур. Интеграллајычы вуруғу $\mu=\mu(\omega(x,y))$ шәклиндә ахтараг; бурада $\omega = xy$. Онда

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}} = -\frac{1}{xy}$$

олдуғундан, тәнлијин $\mu = \frac{1}{xy}$ шәклиндә интеграллајычы вуруғу вар. Тәнлијин һәр тәрәфини $\frac{1}{xy}$ функсијасына вурсаг

$$\left(y+\frac{1}{x}\right)dx + \left(x-\frac{1}{y}\right)dy = 0$$

там диференсиаллы тәнлији алынар вә онун үмуми интегралы

$y = cxe^{xy}$. Бахылан тәнлијин бу һәлләриндән башга $\frac{1}{\mu}=0$ тәнлијиндән тапылан $x=0\ (y\neq 0)$ вә $y=0\ (x\neq 0)$ һәлләри алыныр. Лакин бу һәлләр үмуми интегралдан c сабитинә мүмкүн әдәди гијмәтләр вермәклә алыныр. Она көрә бахылан тәнлијин мәхсуси һәлли јохдур.

б) *Интеграллајычы вуруғун варлығы.* Интеграллајычы вуруг һаггында ашағыдакы теоремләри исбат едәк.

Теорем 2. *(21) тәнлијинин диференсиалланан $u(x,y)$ интегралы варса, онун интеграллајычы вуруғу вар.*

Исбаты. Интегралын тә'рифинә әсасән (21) тәнлијинин интеграл әјриләри бојунча

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0.$$

Дикәр тәрәфдән, интеграл әјриләри бојунча (21) тәнлији өдәндијиндән dx, dy-ә нәзәрән

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0,\\ Mdx + Ndy = 0\end{cases}$$

системи алынар. Лакин (21) тәнлијинин интеграл әјриләри бојунча dx, dy елементләриндән бири сыфырдан фәргли олдуғундан, бурадан алырыг ки,

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ M & N\end{vmatrix} \equiv 0$$

олмалыдыр. Демәли, $\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \mu N$. Бу гајда илә тә'јин олунан $\mu=\mu(x,y)$ функсијасы үчүн

$$\mu Mdx + \mu Ndy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = du$$

олдуғундан алырыг ки, $\mu=\mu(x,y)$ функсијасы (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруғудур.

Интеграллајычы вуруғун тә'рифиндән ајдындыр ки, $\mu = \mu(x,y)$ интеграллајычы вуруг исә, истәнилән c сабит әдәди үчүн $c\mu(x,y)$-дә интеграллајычы вуругдур.

Теорем 3. *Тутаг ки, $\mu_0=\mu_0(x,y)$ функсијасы (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруғу, $u_0(x,y)$ исә һәмин вуруға ујғун интегралыдыр. Онда ејнилик кими сыфыр олмајан кәсилмәз $\varphi(z)$ функсијасы үчүн*

$$\mu = \mu_0(x,y)\,\varphi(u_0) \qquad (56)$$

функсијасы да (21) тәнлијинин интеграллајычы вуруғудур.

Исбаты. Доғрудан да,

$$\mu_0(x,y)\varphi(u_0)(M\,dx+N\,dy)=\varphi(u_0)(\mu_0 M\,dx+\mu_0 N\,dy)=\varphi(u_0)\,du_0=d\int\varphi(u_0)\,du_0$$

мүнасибәти көстәрир ки, $\mu_0\varphi(u_0)(Mdx+Ndy)$ ифадәси $\int\varphi(u_0)du_0$ функсиjасынын там диференсиалына бәрабәрдир. Башга сөзлә десәк, $\mu_0\varphi(u_0)$ функсиjасы (21) тәнлиjинин интеграллаjычы вуруғудур.

Беләликлә, (21) тәнлиjинин бир интеграллаjычы вуруғу варса, онун μ_0-дан сабит вуругла фәргләнмәjән сонсуз саjда интеграллаjычы вуруғу вар.

Көстәрәк ки, $\varphi(z)$ функсиjасыны сечмәклә (56) дүстурундан (21) тәнлиjинин бүтүн интеграллаjычы вуругларыны алмаг олар.

Теорем 4. *Тутаг ки, $\mu_0=\mu_0(x,y)$ функсиjасы (21) тәнлиjинин интеграллаjычы вуруғу, $u_0(x,y)$ исә бу вуруға уjғун диференсиалланан интегралыдыр. Онда (21) тәнлиjинин истәнилән $\mu=\mu(x,y)$ интеграллаjычы вуруғу үчүн елә кәсилмәз $\varphi(z)$ функсиjасы вар ки,*

$$\mu=\mu_0\varphi(u_0).$$

Исбаты. Фәрз едәк ки, D областында $\frac{\partial u_0}{\partial y}\neq 0$. Онда геjри-ашкар функсиjанын варлыг теореминә әсасән $u_0(x,y)$-ин гиjмәтләри чохлуғундан олан һәр бир c_0 үчүн

$$u_0(x,y)=c_0 \qquad (57)$$

бәрабәрлиjи jеканә $y=\varphi(x,c_0)$ функсиjасы тә'jин едир. Бундан башга, $u_0(x,y)$ функсиjасы диференсиалланан олдуғундан, $y=\varphi(x,c_0)$ функсиjасы икидәjишәнли функсиjа кими диференсиалланан олур.

Тутаг ки, $\mu=\mu(x,y)$ функсиjасы (21) тәнлиjинин һәр һансы интеграллаjычы вуруғу, $u(x,y)$ исә она уjғун диференсиалланан интегралыдыр. Онда $y=\varphi(x,c_0)$ интеграл әjриси боjунча

$$u(x,\varphi(x,c_0))=c \qquad (58)$$

еjнилиjи өдәнәр. Бурадан, c илә c_0 арасында $c=\Phi(c_0)$ асылылығы алыныр. Демәли,

$$u(x,\varphi(x,c_0))=\Phi(c_0).$$

$u(x,y)$ вә $\varphi(x,c_0)$ функсиjалары диференсиалланан олдуғундан сонунҹу еjниликдән алыныр ки, $\Phi(z)$ функсиjасы да диференсиалланандыр.

Беләликлә, (57), (53) мүнасибәтләринә әсасән $u_0(x,y)$ вә $u(x,y)$ функсиjалары арасында

$$u=\Phi(u_0) \qquad (59)$$

функсионал асылылығы алыныр

Дикәр тәрәфдән, $\mu_0(x,y)$, $\mu(x,y)$ функсиjалары (21) тәнлиjинин интеграллаjычы вуруглары вә $u_0(x,y)$, $u(x,y)$ онлара уjғун интеграллар олдуғундан, $\mu_0(Mdx+Ndy)=du_0$, $\mu(Mdx+Ndy)=du$ бәрабәрликләринә әсасән

$$\mu=\mu_0\frac{du}{du_0}.$$

Бу мүнасибәти, (59) дүстуруна әсасән, $\mu=\mu_0\Phi'(u_0)$ шәклиндә jазмаг олар вә демәли $\varphi(z)=\Phi'(z)$ көтүрсәк теоремин исбатыны аларыг.

Мисал 3. $\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0$ тәнлиjиндә $\mu_0(x,y)=1$ интеграллаjычы вуруг, $u_0(x,y)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y$ исә она уjғун интегралдыр.

Дикәр тәрәфдән, бахылан тәнлиjи $\mu=\frac{x+y}{1-xy}$ функсиjасына вурмагла алынан

$$\frac{x+y}{(1+x^2)(1-xy)}dx+\frac{x+y}{(1+y^2)(1-xy)}dy=0$$

тәнлиjи там диференсиаллы тәнлик олдуғундан, $\mu=\frac{x+y}{1-xy}$ функсиjасы да интеграллаjычы вуругдур. Онда теоремә әсасән $\mu=\mu_0\varphi(u_0)$, jә'ни $\frac{x+y}{1-xy}=\varphi(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)$ олмалыдыр.

Бу шәрти өдәjән $\varphi(z)$ функсиjасыны тапаг. Бунун үчүн $\frac{x+y}{1-xy}=\varphi(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)$ бәрабәрлиjиндә $y=0$ көтүрәк, онда $x=\varphi(\operatorname{arctg}x)$ олар. Демәли $\varphi(z)=\operatorname{tg}z$ олмалыдыр.

Бурадан, тригонометриjадан мә'лум олан

$$\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y)$$

дүстуруну алырыг.

§ 8. РИККАТИ ТӘНЛИJИ

Jухарыда квадратура илә һәлл олунан бә'зи диференсиал тәнликләрлә таныш олдуг. Лакин, елә садә тәнликләр вар ки, онлар квадратура илә һәлл олунмурлар. Белә тәнликләрә мисал олараг *Риккати тәнлиjи* адланан

$$y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x) \qquad (60)$$

тәнлиjини көстәрмәк олар. Бурада $p(x)$, $q(x)$ вә $r(x)$ муәjjән (a,b) интервалында тә'jин олунмуш функсиjалардыр. Хүсуси һалда $p(x)\equiv0$ олдугда Риккати тәнлиjи хәтти тәнлиjә, $r(x)\equiv0$ олдугда исә Бернулли тәнлиjинә чеврилир.

Ајдындыр ки, $p(x)$, $q(x)$ вә $r(x)$ функсијалары (a,b) интервалында кәсилмәз олдугда $f(x,y)=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$ вә $f_y(x,y)=2p(x)y+q(x)$ функсијалары $D=\{a<x<b;\ -\infty<y<+\infty\}$ областында кәсилмәз олурлар. Она көрә дә бу областын һәр бир (x_0,y_0) нөгтәсиндән (60) тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир. Буна бахмајараг һәмин интеграл әјрисини квадратура илә тапмаг, үмумијјәтлә, мүмкүн дејил. Лакин Риккати тәнлијинин бир хүсуси һәлли мә'лум олдугда онун үмуми һәллини квадратура илә гурмаг мүмкүндүр. Доғрудан да, $y=\varphi(x)$ функсијасы Риккати тәнлијинин һәр һансы хүсуси һәлли исә $y=z+\varphi(x)$ әвәзләмәси васитәсилә онун үмуми һәллинин тапылмасы

$$z'=[q(x)+2p(x)\varphi(x)]z+p(x)z^2$$

Бернулли тәнлијинин үмуми һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Бә'зи һалларда $p(x)$, $q(x)$ вә $r(x)$ әмсалларынын верилмәсиндән асылы олараг Риккати тәнлијинин бир хүсуси һәллини тапмаг олур. Риккати тәнлији: а) $p(x)=Am(x)$, $q(x)=Bm(x)$, $r(x)=Cm(x)$ (A, B, C—сабит әдәдләрдир) олдугда дәјишәнләринә ајрылан; б) $p(x)=\frac{A}{x^2}$, $q(x)=\frac{B}{x}$, $r(x)=C$ олдугда бирҹинс вә в) $p(x)=A$, $q(x)=\frac{B}{x}$, $r(x)=\frac{C}{x^2}$ олдугда исә үмумиләшмиш бирҹинс тәнлијә чеврилир.

$$y'=y^2+cx^{\alpha} \qquad (c\neq 0)$$

шәклиндә олан тәнлијә *хүсуси Риккати тәнлији* дејилир; бурада α һәгиги әдәддир. Ајдындыр ки, $\alpha=0$ олдугда бу тәнлик дәјишәнләринә ајрылан, $\alpha=-2$ олдугда исә үмумиләшмиш бирҹинс тәнлик олур.

Лиувилл исбат етмишдир ки, α-нын анҹаг вә анҹаг $\frac{\alpha}{2\alpha+4}$ әдәдинин там олмасыны тә'мин едән гијмәтләриндә хүсуси Риккати тәнлији квадратура илә һәлл олунур.

Мисал 4. Мәркәзләри $y^2=4x$ параболасы үзәриндә вә радиуслары $\frac{1}{2}$-ә бәрабәр олан чеврәләр аиләсини дүз бучаг алтында кәсән әјрини тапмалы.

Һәлли. Ахтарылан әјри үзәриндә ихтијари $M(X,У)$ нөгтәси көтүрәк. Мәркәзи $y^2=4x$ параболасы үзәриндә, радиусу $\frac{1}{2}$ олан вә $M(X,У)$ нөгтәсиндән кечән чеврәни S илә, онун мәркәзинин координатларыны исә a,b илә ишарә едәк. Онда $M(X,У)$ вә $O_1(a,b)$ нөгтәләриндән кечән дүз хәттин абсис оху илә әмәлә кәтирдији бучағы θ илә ишарә етсәк, мәсәләнин шәртинә әсасән

$$X=a+\frac{1}{2}\cos\theta,\quad У=b+\frac{1}{2}\sin\theta, \qquad (61)$$

$$\frac{dУ}{dX}=\operatorname{tg}\theta \qquad (62)$$

олар (шәкил 5). $O_1(a,b)$ нөгтәси $y^2=4x$ параболасы үзәриндә јерләшдијиндән $b^2=4a$. Бурада $b=t$ параметри дахил етсәк $a=\frac{1}{4}t^2$ олар. Бунлары (61) бәрабәрликләриндә јазыб, (61) мүнасибәтләрини (62)-дә нәзәрә алсаг, $\theta=\theta(t)$ функсијасыны тапмаг үчүн

$$\frac{d\theta}{dt}=t\sin\theta-2\cos\theta \qquad (63)$$

диференсиал тәнлијини аларыг. Бурада $z=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ әвәзләмәси апарсаг

$$\frac{dz}{dt}=z^2+tz-1 \qquad (64)$$

тәнлији алынар. Ајдындыр ки, бу тәнлик Риккати тәнлијидир вә $z=-t$ онун хүсуси һәллидир.

(64) тәнлијиндә $z=u-t$ әвәзләмәси апараг. Онда u функсијасы үчүн

$$\frac{du}{dt}+tu=u^2$$

Бернулли тәнлији алыныр. Бу тәнлијин үмуми һәллини тапыб $z=u-t$ әвәзләмәсиндә нәзәрә алсаг, (64) тәнлијинин үмуми һәллини

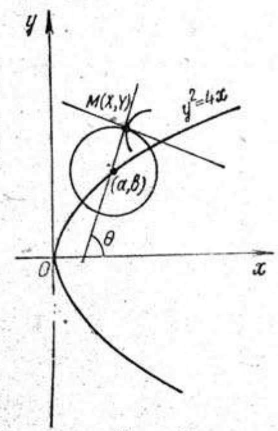
$$z=e^{-\frac{t^2}{2}}\left(c-\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^{-1}-t$$

шәклиндә тапмыш оларыг.

Беләликлә, (63) тәнлијинин үмуми һәлли

$$\theta=2\operatorname{arctg}\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\left(c-\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^{-1}-t\right).$$

Бу һәлли (61) бәрабәрликләриндә јеринә јазсаг ахтарылан әјриләр аиләсинин параметрик шәкилдә тәнлијини аларыг.



Шәкил 5.

Чалышмалар

1. Көстәрилән аиләнин верилмиш диференсиал тәнлиjи өдәдиjини joхлаjын:

а) $y = \frac{c}{2}x^2 - \frac{x}{2c}$; $\quad 2xy' = 3y + \sqrt{y^2 + x^2}$.

б) $(x+y)^2 e^{\frac{x}{x+y}} - cx^3 = 0$; $\quad (x^2 + 2xy)y' = x^2 + 3xy + 3y^2$.

в) $x = ce^t,\ y = t^2 + ce^t$; $\quad xy' = x + 2\sqrt{y - x}$.

2. Изоклин үсулу илә верилмиш тәнликләрин интеграл әjриләрини тәгриби гурун:

а) $y' = x + y$; б) $y' = x^2 - y$; в) $y' = y^2 - x$.

Ашағыдакы тәнликләри һәлл един:

3. $x(y^2+1)\,dx + (x^2-1)\,dy = 0$. Чаваб: $(x^2-1)\,e^{2\operatorname{arc\,tg} y} = c$.

4. $(y^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$. Чаваб: $x(y-1) = cy$.

5. $(\sin x - \cos x)\,dy + (\cos x + \sin x)\sqrt{y-1}\,dx = 0$.

Чаваб: $(\sin x - \cos x)\,e^{2\sqrt{y-1}} = c$; $y = 1$.

6. $x^2 dy - (x^2 + xy + y^2)\,dx = 0$. Чаваб: $x = ce^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$.

7. $x^2 dy - (x^2 - xy + y^2)\,dx = 0$. Чаваб: $x = ce^{\frac{x}{x-y}}$.

8. $4xy\,dy + (x - y^2)\,dx = 0$. Чаваб: $(x + y^2)^2 = cx,\ c \geqslant 0$.

9. $y\,dy + (2x^3 - 5xy)\,dx = 0$. Чаваб: $(y - 2x^2)^4 = c(2y - x^2)$

10. $y' - 2y = 2x - 2x^2$. Чаваб: $y = ce^{2x} + x^2$.

11. $\cos x \cdot y' + \sin x \cdot y = \cos 2x$. Чаваб: $y = c\cos x + 2x\cos x - \sin x$.

12. $y' + \sin x \cdot y = \sin x \cdot y^2$. Чаваб: $(c + e^{\cos x})y = e^{\cos x}$.

13. $xy' - 2y = x\sqrt{y}$. Чаваб: $y = x^2\left(\frac{1}{2}\ln x + c\right)^2$, $y = 0$.

14. $2(x+y^2)\,dx + (4xy+1)\,dy = 0$. Чаваб: $2xy^2 + y + x^2 = c$.

15. $(y^2 + \cos x\cos y)\,dx + (2xy - \sin x\sin y)\,dy = 0$. Чаваб: $xy^2 + \sin x\cos y = c$.

16. $(xy^2 + y)\,dx - (x + y)\,dy = 0$, $\mu = \mu(y)$. Чаваб: $x^2y + 2x - 2y\ln y = cy$.

17. $y(x + 1 + 0{,}5y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$, $\mu = \mu(x)$. Чаваб: $e^x(xy + 0{,}5y^2) = c$.

18. $(3y^2 - x)\,dx + (2y^3 - 6xy)\,dy = 0$, $\mu = \mu(x + y^2)$. Чаваб: $(x + y^2)^2c = x - y^2$.

19. $y' = \cos x - \sin^2 x + 2\sin x \times y - y^2$, $y_1 = \sin x$. Чаваб: $(x + c)y = c\sin x + x\sin x + 1$.

20. $2xe^{3x}y' = e^{6x} + (1 + 6x)e^{3x}y - 2y^2$, $y_1 = e^{3x}$. Чаваб: $(cx^{3/2} - 2)y = e^{3x}(cx^{3/2} + 1)$.

БИРТӘРТИБЛИ ТӘНЛИКЛӘРИН ҺӘЛЛӘРИНИН ВАРЛЫҒЫ ВӘ JЕКАНӘЛИJИ

Нәзәри тәдгиг олунан мәсәләләрдә алынан диференсиал тәнликләр, үмумиjjәтлә, квадратура илә һәлл олунмур вә мәсәләнин мә'насы алынан тәнлиjин һәллинин варлығыны көстәрмәклә изаһ олунур. Тәсвир олунан просесин характери уjғун диференсиал тәнлиjин һәлләринин хассәләринә әсасән мүәjjән олунур. Бу исә уjғун тәнлиjин мүәjjән шәртләри өдәjән һәллинин варлығы вә jеканәлиjи илә әлагәдардыр.

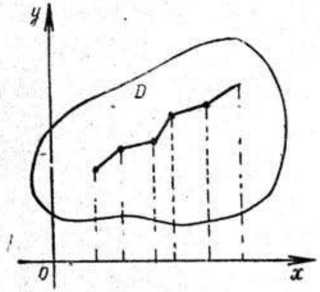
Бу фәсилдә төрәмәjә нәзәрән һәлл олунмуш биртәртибли ади диференсиал тәнлик үчүн гоjулмуш Коши мәсәләсинин һәллинин варлығы вә jеканәлиjи өjрәнилир.

§ 1. ЕJЛЕР СЫНЫГ ХӘТТИ

Тутаг ки,

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

тәнлиjи верилмишдир; бурада $f(x, y)$ функсиjасы xOy мүстәвисинин мүәjjән D областында тә'jин олунмушдур. Бу областдан һәр һансы (x_0, y_0) нөгтәси көтүрәк вә һәмин нөгтәдән бучаг әмсалы $f(x_0, y_0)$ олан дүз хәтт кечирәк. Бу дүз хәтт үзәриндә абсиси x_0-дан сағда jерләшән вә D областына дахил олан (x_1, y_1) нөгтәси көтүрүб бучаг әмсалы $f(x_1, y_1)$ олан дүз хәтт кечирәк вә с. Бу гаjда илә тәпә нөгтәләри (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... олан вә D областында jерләшән сыныг хәтт аларыг. Белә сыныг хәттә (x_0, y_0) нөгтәсиндән чыхан ***Еjлер сыныг хәтти*** деjилир (шәкил 6).



Шәкил 6

Еjни гаjда илә (x_0, y_0) нөгтәсиндән чыхан вә абсисләри x_0-дан солда jерләшән Еjләр сыныг хәтти дә гурмаг олар. Просеси x_0-дан һәм сола, һәм дә сağа доғру апармагла тәпә нөгтәләри ..., (x_{-2}, y_{-2}), (x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2),...

олан вә D областында јерләшән бир сыныг хәтт аларыг. Бу сыныг хәттә (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән Ејләр сыныг хәтти дејилир.

Ајдындыр ки, $\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_1, x_2, \ldots$ нөгтәләрини мүхтәлиф көтүрмәклә, (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән сонсуз сајда Ејлер сыныг хәтти гурмаг олар. Бир чох һалларда (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән елә Ејлер сыныг хәттләр ардычыллығы гурмаг олур ки, бу ардычыллығын вә ја онун јығылан алтардычыллығынын лимити, тәнлијин (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси олур.

Диференсиал тәнлијин һәллинин варлығыны Ејлер сыныг хәтләринин көмәји илә көстәрәркән бу сыныг хәтләрин ашағыда гурулан аналитик ифадәсиндән истифадә олунур.

Ајдындыр ки, верилмиш $(x_0, y_0) \in D$ нөгтәси үчүн елә мүсбәт a, b әдәдләри тапмаг олар ки,

$$R = \{x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a;\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$$

дүзбучаглысы тамамилә D областында јерләшәр.

Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы R дүзбучаглысында $M > 0$ әдәди илә мәһдуддур: $|f(x, y)| < M$, $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ ишарә едәк вә $h_m = \frac{\alpha}{2^m}$, $m = 1, 2, \ldots$ әдәди ардычыллығына бахаг. Садәлик үчүн $x_0 = 0$ гәбул едиб һәр бир m әдәди үчүн $[0, \alpha]$ парчасында ашағыдакы рекуррент дүстурларла $\varphi_m(x)$ функсијасы дүзәлдәк:

$$\varphi_m(x) = y_0 + f(0, y_0)x, \qquad 0 \leqslant x \leqslant h_m$$

$$\varphi_m(x) = \varphi_m(h_m) + f(h_m, \varphi_m(h_m))\,(x - h_m), \quad h_m \leqslant x \leqslant 2h_m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

$$\varphi_m(x) = \varphi_m(rh_m) + f(rh_m, \varphi_m(rh_m))\,(x - rh_m), \quad rh_m \leqslant x \leqslant (r+1)h_m$$

$$r = 2, 3, \ldots, 2^m - 1.$$

Ајдындыр ки, (2) дүстурлары илә верилән $\varphi_m(x)$ функсијасынын графики $[0, \alpha]$ парчасында h_m бөлкүсүнә ујғун Ејлер сыныг хәтти олур. Ејни гајда илә $[-\alpha, 0]$ парчасында да h_m бөлкүсүнә ујғун Ејлер сыныг хәттини гурмаг олар.

§ 2. АРСЕЛА ТЕОРЕМИ

Тутаг ки, $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш $\{f(x)\}$ функсијалар аиләси верилмишдир. Бу аиләнин ихтијари $f(x)$ функсијасы вә $x \in [a, b]$ үчүн $|f(x)| \leqslant M$ шәртини өдәјән $M > 0$ әдәди варса, дејирләр ки, $\{f(x)\}$ аиләси $[a, b]$ парчасында *мүнтәзәм мәһдуддур.* Мәсәлән, $\{x^n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, ардычыллығы $[-1, 1]$ парчасында мүнтәзәм мәһдуддур.

Ајдындыр ки, аиләнин $[a, b]$ парчасында мүнтәзәм мәһдуд олмасыдан, аиләнин һәр бир функсијасынын бу парчада мәһдудлуғу алыныр, лакин һәр бир функсијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуд олан аилә бу парчада мүнтәзәм мәһдуд олмаја да биләр. Мәсәлән $\{x^n\}$ аиләсинин һәр бир функсијасы $[0, 2]$ парчасында мәһдуд олмасына бахмајараг, аилә бу парчада мүнтәзәм мәһдуд дејил.

Истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә анчаг ε-дан асылы олан елә $\eta > 0$ әдәди тапмаг мүмкүн олса ки, $\{f(x)\}$ аиләсиндән көтүрүлмүш истәнилән $f(x)$ функсијасы вә $|x'' - x'| < \eta$ шәртини өдәјән истәнилән $x', x'' \in [a, b]$ нөгтәләри үчүн $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ шәрти өдәнсин, онда дејирләр ки, $\{f(x)\}$ аиләси $[a, b]$ парчасында *ејни дәрәчәдән кәсилмәздир.*

Тә'рифдән көрүнүр ки, аиләнин верилмиш парчада ејни дәрәчәдән кәсилмәзлијиндән аиләнин һәр бир функсијасынын бу парчада мүнтәзәм кәсилмәзлији алыныр, лакин һәр бир функсијасы верилмиш парчада мүнтәзәм кәсилмәз олан аилә бу парчада ејни дәрәчәдән кәсилмәз олмаја да биләр. Мәсәлән, $\{\sin nx\}$, $n = 1, 2, \ldots$ аиләсинин һәр бир функсијасы $[0, \pi]$ парчасында мүнтәзәм кәсилмәздир, анчаг аилә $[0, \pi]$ парчасында ејни дәрәчәдән кәсилмәз дејил. Буну көстәрмәк үчүн $x' = 0$, $x'' = \frac{\pi}{2n}$ нөгтәләрини көтүрәк. Ајдындыр ки, ихтијари η үчүн n-и кифајәт гәдәр бөјүк көтүрсәк, $|x'' - x'| < \eta$ олар, лакин һәмин x', x'' үчүн

$$|\sin nx'' - \sin nx'| = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Демәли, $\{\sin nx\}$ аиләси $[0, \pi]$ парчасында ејни дәрәчәдән кәсилмәз дејил.

Гејд едәк ки, јухарыдакы тә'рифләри (a, b) интервалында да вермәк олар.

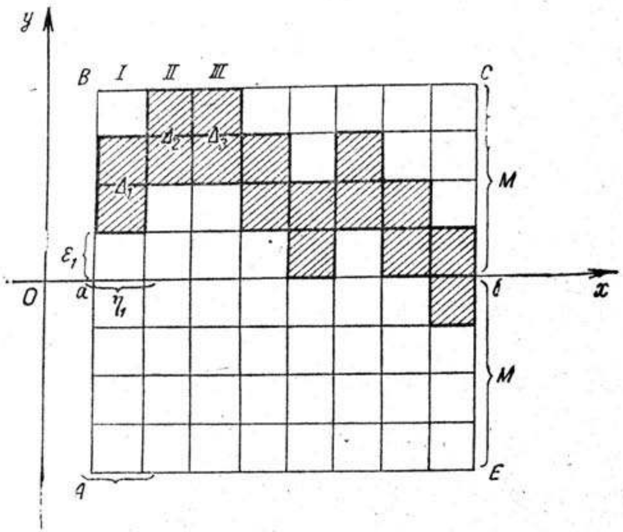
Теорем 1. *Сонлу $[a, b]$ парчасында ејни дәрәчәдән кәсилмәз вә мүнтәзәм мәһдуд олан сонсуз $\{f(x)\}$ функсијалары аиләсиндән бу парчада мүнтәзәм јығылан функсијалар ардычыллығы сечмәк олар.*

Исбаты. Мүнтәзәм мәһдудлуг шәртинә әсасән аиләнин бүтүн функсијаларынын графикләри, тәрәфләри $b - a$ вә $2M$ олан $ABCE$ дүзбучаглысында јерләшир (шәкил 7).

Сонсуз $\varepsilon_n = \frac{M}{2^{n+m}}$, $n = 1, 2, \ldots; m \geqslant 0$ әдәди ардычыллығына бахаг. Ејни дәрәчәдән кәсилмәзлијә әсасән һәр бир ε_n $(n = 1, 2, \ldots)$ әдәдинә көрә елә $\eta_n = \eta(\varepsilon_n) > 0$ әдәди вар ки, бу әдәдләр үчүн ејни дәрәчәдән кәсилмәзлик шәрти өдәнир.

$ABCE$ дүзбучаглысынын шагули тәрәфини узунлуғу ε_1-ә бәрабәр, үфүги тәрәфини исә узунлуғу η_1-дән бөјүк олмајан һиссәләрә бөләк вә алынан нөгтәләрдән координат охларына парлел дүз хәтләр кечирәк. Бу заман $ABCE$ дүзбучаглысы

кичик дүзбучаглылара бөлүнәчәк. Шагули золаглары ујғун олараг I, II, ... рәгәмләри илә нөмрәләјәк. Аиләнин ихтијари $f(x)$ функсијасы үчүн $|x''-x'|<\eta_1$ олдугда $|f(x'')-f(x')|<\varepsilon_1$ олдуғундан, бу функсијанын графики золаглардан һәр биринин ики гоншу дүзбучаглысындан кәнара чыха билмәз. I золагда олан дүзбучаглылар сонлу, функсијалар исә сонсуз сајда олдуғундан, бу золагда һеч олмаса елә ики гоншу дүз-



Шәкил 7.

бучаглы вар ки, онлардан $\{f(x)\}$ аиләсинин сонсуз сајда функсијасынын графики кечир. Белә ики гоншу дүзбучаглыны Δ_1 илә ишарә едәк. Әкәр белә гоншу дүзбучаглылар чох оларса, онлардан бир чүтүнү көтүрмәк кифајәтдир. Графикләри анчаг Δ_1-дә јерләшән функсијалара бахаг. Бу функсијаларын графикләри II золагда анчаг дөрд гоншу дүзбучаглыда јерләшәчәкдир. Һәр бир функсијанын графики исә ики гоншу дүзбучаглыда јерләшә биләр. Она көрә бу дөрд гоншу дүзбучаглы ичәрисиндә ики гоншу дүзбучаглы вар ки, графики Δ_1-дә јерләшән сонсуз сајда функсијанын графики бурада јерләшәчәкдир. Бу гоншу дүзбучаглылары Δ_2 илә ишарә едәк. Белә мүһакимәни сонракы золаглар үчүн дә апарсаг, нәтичәдә $ABCE$ дүзбучаглысында јерләшән вә $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ дүзбучаглыларындан тәшкил олунан гапалы S_1 областыны аларыг. Графикләри S_1-дә јерләшән аиләни $\{f_1(x)\}$ илә ишарә едәк.

Јухарыда ε_1, η_1 әдәдләри вә $\{f(x)\}$ аиләси үчүн апарылан мүһакимәни ε_2, η_2 әдәдләри вә $\{f_1(x)\}$ аиләси үчүн тәкрар етсәк, $ABCE$ дүзбучаглысында јерләшән јени гапалы S_2 областыны аларыг. Ајдындыр ки, $S_2 \subset S_1$ вә гапалы S_2 областында $\{f_1(x)\}$ аиләсинин сонсуз сајда функсијаларынын графики јерләшир. Белә функсијалар чохлуғуну $\{f_2(x)\}$ илә ишарә едәк. Просеси бу гајда илә давам етдирсәк, гапалы S_1, S_2, $S_3, \ldots$ $(S_1\supset S_2\supset S_3\supset\ldots)$ областларыны вә $\{f_1(x)\}, \{f_2(x)\}, \{f_3(x)\}, \ldots$ $(\{f_1(x)\}\supset\{f_2(x)\}\supset\ldots)$ аиләләрини аларыг.

Бу аиләләрдән мүхтәлиф функсијалар көтүрүб

$$f_1^*(x),\ f_2^*(x),\ f_3^*(x),\ \ldots \qquad (3)$$

ардычыллығыны дүзәлдәк вә көстәрәк ки, бу ардычыллыг мүнтәзәм јығылыр. Доғрудан да, истәнилән $p\geqslant 0$ там әдәди үчүн $f^*_{k+p}(x)$ вә $f^*_k(x)$ функсијаларынын графикләри гапалы S_k областында јерләшдијиндән,

$$|f^*_{k+p}(x)-f^*_k(x)|\leqslant 2\varepsilon_k=\frac{M}{2^{k+m-1}}$$

олур. Бу исә (3) ардычыллығынын мүнтәзәм јығылмасы үчүн Коши ме'јарынын өдәндијини көстәрир. (3) ардычыллығынын һәр бир һәдди кәсилмәз вә ардычыллыг мүнтәзәм јығылдығындан, анализдән мә'лум теоремә әсасән лимит функсија кәсилмәз олур.

§ 3. ҺӘЛЛИН ВАРЛЫҒЫ ҺАГГЫНДА ПЕАНО ТЕОРЕМИ

Тутаг ки,

$$y'=f(x,y) \qquad (1)$$

тәнлијинин

$$y(x_0)=y_0 \qquad (4)$$

башланғыч шәртини өдәјән һәллини тапмаг тәләб олунур; бурада $f(x,y)$ функсијасы D областында кәсилмәздир вә $(x_0,y_0)\in D$. Диференсиал тәнлијин мүәјјән шәртләри өдәјән һәллинин варлығы вә јеканәлији мәсәләләрини арашдыраркән ән'әнәви үсуллардан бири еквивалент интеграл тәнлијә кечмәкдир. Көстәрәк ки, (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән һәллинин варлығы мәсәләси

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\ y(s))ds \qquad (5)$$

интеграл тәнлијинин кәсилмәз һәллинин варлығы мәсәләсинә еквивалентдир*.

* Ахтарылан функсија һәм дә интеграллама дәјишәниндән асылы олуб, интеграл ишарәси алтында олан тәнлијә *интеграл тәнлик* дејилир.

Тутаг ки, $y=\varphi(x)$ функсиjасы (1) тәнлиjинин (4) башланғыч шәртини өдәjән вә (α, β) $(\alpha < x_0 < \beta)$ интервалында тә'jин олунмуш һәллидир. Jә'ни (α, β) интервалында

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

еjнилиjи өдәнир. $\varphi(x_0) = y_0$ олдуғуну нәзәрә алыб бу еjнилиjи x_0-дан x-ә гәдәр интегралламагла алырыг:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds, \; x \in (\alpha, \beta).$$

Демәли, (1) тәнлиjинин (4) башланғыч шәртини өдәjән һәр бир һәлли һәм дә (5) интеграл тәнлиjинин һәллидир. Әксинә, тутаг ки, $y = \psi(x)$ функсиjасы (α, β) интервалында (5) интеграл тәнлиjинин һәр һансы кәсилмәз һәллидир. Онда (α, β) интервалында

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \psi(s))ds. \quad (6$$

еjнилиjи өдәнир.

Геjд едәк ки, $\psi(x)$ вә $f(x, y)$ функсиjалары кәсилмәз олдуғундан $f(x, \psi(x))$ функсиjасы (α, β) интервалында кәсилмәздир. Онда

$$\left(\int_{x_0}^{x} f(s, \psi(s))\, ds\right)' = f(x, \psi(x))$$

олдуғундан, (6) еjнилиjиндән $\psi(x)$ функсиjасынын диференсиалланан олмасы вә $\psi'(x) \equiv f(x, \psi(x))$ еjнилиjи алыныр. Дикәр тәрәфдән, (6) еjнилиjиндә $x = x_0$ көтүрсәк, $\psi(x_0) = y_0$ олар. Демәли, (5) интеграл тәнлиjинин һәр бир кәсилмәз һәлли (1) диференсиал тәнлиjинин (4) башланғыч шәртини өдәjән һәлли олур. Беләликлә, (1) тәнлиjинин (4) башланғыч шәртини өдәjән һәллинин варлығы вә jеканәлиjи мәсәләләрини өjрәнмәк әвәзинә (5) интеграл тәнлиjинин кәсилмәз һәллинин варлығы вә jеканәлиjини араштырмаг кифаjәтдир.

Теорем 2 (Пеано). *Тутаг ки, $f(x, y)$ функсиjасы $R = \{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a;\; y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b\}$ дүзбучаглысында кәсилмәздир. Онда (1) тәнлиjинин (4) шәртини өдәjән вә $[x_0, x_0 + \alpha]$ парчасында тә'jин олунан һеч олмаса бир һәлли вар; бурада*

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \; M = \max_{R} |f(x, y)|.$$

Исбаты. Үмумилиjи позмадан $x_0 = 0$ гәбул едәк вә биринчи параграфда олдуғу кими $h_m = \frac{\alpha}{2^m}$ көтүрүб, $[0, \alpha]$ парчасында тә'jин олунан

$$\varphi_m(0) = y_0,$$
$$\varphi_m(x) = \varphi_m(rh_m) + f(rh_m, \varphi_m(rh_m))(x - rh_m), \quad (2')$$
$$x \in [rh_m, (r+1)h_m],$$
$$m = 1, 2, \ldots, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, (2^m - 1)$$

функсиjалары ардычыллығыны дүзәлдәк.

Һәр бир m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ әдәди вә $x \in [0, \alpha]$ үчүн елә n $(0 \leqslant n \leqslant 2^m - 1)$ вар ки, $x \in [nh_m, (n+1)h_m]$. Дикәр тәрәфдән $(n+1)h_m \leqslant \alpha$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$|\varphi_m(x) - y_0| \leqslant \sum_{r=0}^{n} |f(rh_m, \varphi_m(rh_m))|\, h_m \leqslant M(n+1)h_m \leqslant M\alpha \leqslant b.$$

Демәли, $\{\varphi_m(x)\}$ ардычыллығы $[0, \alpha]$ парчасында мүнтәзәм мәһдуддур.

Көстәрәк ки, $[0, \alpha]$ парчасындан көтүрүлмүш ихтиjари x' вә x'' үчүн

$$|\varphi_m(x'') - \varphi_m(x')| \leqslant M|x'' - x'|, \quad m = 1, 2, \ldots \quad (7$$

бәрабәрсизлиjи доғрудур. Бунун үчүн ашағыдакы һаллара бахаг:

1) x' вә x'' еjни бир $[rh_m, (r+1)h_m]$ парчасында jерләшир. Онда (2′) дүстурундан

$$|\varphi_m(x'') - \varphi_m(x')| = |f(rh_m, \varphi_m(rh_m))|\,|x'' - x'| \leqslant M|x'' - x'|;$$

2) x' вә x'' гоншу парчаларда jерләшир:

$$(r-1)h_m \leqslant x' \leqslant rh_m \leqslant x'' \leqslant (r+1)h_m.$$

Онда

$$\varphi_m(x'') - \varphi_m(x') = [\varphi_m(x'') - \varphi_m(rh_m)] + [\varphi_m(rh_m) - \varphi_m(x')]$$

шәклиндә jазыб, һәр бир топлананы jухарарыдакы гаjда илә гиjмәтләндирәк:

$$|\varphi_m(x'') - \varphi_m(x')| \leqslant |\varphi_m(x'') - \varphi_m(rh_m)| +$$
$$+ |\varphi_m(rh_m) - \varphi_m(x')| \leqslant M(x'' - rh_m) + M(rh_m - x') =$$
$$= M(x'' - x');$$

3) x', x'' үчүн елә r вә n там әдәдләри вар ки,

$$x' \leqslant nh_m < (n+1)h_m < \ldots < (n+r)h_m \leqslant x''.$$

Онда

$$\varphi_m(x'') - \varphi_m(x') = [\varphi_m(x'') - \varphi_m((n+r)h_m)] +$$
$$+ [\varphi_m((n+r)h_m) - \varphi_m((n+r-1)h_m)] + \ldots +$$
$$+ [\varphi_m(nh_m) - \varphi_m(x')]$$

шәклиндә jазыб, jухарыдакы гаjда илә

$$|\varphi_m(x'') - \varphi_m(x')| \leqslant M(x'' - x')$$

олдуғуну аларыг.

Дeмәли, $\{\varphi_m(x)\}$ ардычыллығы үчүн (7) бәрабәрсизлиј**и** өдәнир. Бурадан алыныр ки, $\{\varphi_m(x)\}$ ардычыллығы еіни дәрәчәдән кәсилмәздир. Арсела теореминә әсасән $\{\varphi_m(x)\}$ ардычыллығындан $[0, \alpha]$ парчасында мүнтәзәм јығылан $\psi_k(x) = \varphi_{m_k}(x)$ $(\kappa = 1, 2, \ldots)$ алтардычыллығы сечмәк олар. Ардычыллығын һәр бир һәдди кәсилмәз олдуғундан $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_k(x) = \psi(x)$ лимит функсијасы $[0, \alpha]$ парчасында кәсилмәз олар. Көстәрәк ки, $y = \psi(x)$ функсијасы $[0, \alpha]$ парчасында (1) тәнлијинин $\psi(0) = y_0$ шәртини өдәјән һәллидир. Бунун үчүн $\psi(x)$ функсијасынын $[0, \alpha]$ парчасында

$$y(x) = y_0 + \int\limits_0^x f(s, y(s))ds \tag{8}$$

интеграл тәнлијини өдәдијини көстәрәк. Һәр һансы $x \in (0, \alpha]$ нөгтәси көтүрүб $l_k = \left[\frac{x}{\delta_k}\right]^*$, $(\delta_k = h_{m_k})$ ишарә едәк. Ајдындыр ки, $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k l_k = x$, $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_k(\delta_k l_k) = \psi(x)$. (2′) дүстуруна әсасән

$$\psi_k(0) = y_0,$$

$$\psi_k(x) = \psi_k(r\,\delta_k) + f(r\,\delta_k, \psi_k(r\,\delta_k))(x - r\,\delta_k),\ x \in [r\,\delta_k, (r+1)\delta_k],$$

$$\kappa = 1, 2, \ldots;\ r = 0, 1, \ldots, (2^{m_k} - 1).$$

Хүсуси һалда $x = (r+1)\delta_k$ көтүрсәк,

$$\psi_k((r+1)\delta_k) = \psi_k(r\,\delta_k) + f(r\,\delta_k, \psi_k(r\,\delta_k))\delta_k$$

бәрабәрлијини аларыг. Бу бәрабәрликдә r-ә $0, 1, \ldots, l_k - 1$ гијмәтләр вериб, чәмләјәк:

$$\psi_k(l_k\,\delta_k) = y_0 + \sum_{r=0}^{l_k - 1} f(r\,\delta_k, \psi_k(r\,\delta_k))\delta_k. \tag{9}$$

Икинчи топлананы

$$\sum_{r=0}^{l_k - 1} f(r\,\delta_k, \psi_k(r\,\delta_k))\delta_k = J_k^1 + J_k^2$$

шәклиндә јазаг; бурада

$$J_k^1 = \sum_{r=0}^{l_k - 1} f(r\,\delta_k, \psi(r\,\delta_k))\,\delta_k + f(l_k\,\delta_k, \psi(l_k\,\delta_k))(x - l_k\,\delta_k),$$

$$J_k^2 = \sum_{r=0}^{l_k - 1} [f(r\,\delta_k, \psi_k(r\,\delta_k)) - f(r\,\delta_k, \psi(r\,\delta_k))]\,\delta_k - $$

$$- f(l_k\,\delta_k, \psi(l_k\,\delta_k))(x - l_k\,\delta_k).$$

---

* Бурада $[z]$ илә z әдәдинин там һиссәси ишарә едилмишдир.

Ајдындыр ки, J_k^1 чәми $f(s, \psi(s))$ функсијасынын $[0, x]$ парчасында интеграл чәмидир. Она көрә

$$\lim_{k\to\infty} J_k^1 = \int\limits_0^x f(s, \psi(s))ds.$$

$\{\psi_k(x)\}$ ардычыллығы $[0, \alpha]$ парчасында $\psi(x)$ функсијасына мүнтәзәм јығылдығындан, истәнилән $\delta > 0$ әдәди үчүн елә K_δ нөмрәси вар ки, $\kappa > K_\delta$ олдугда

$$|\,\psi_k(x) - \psi(x)\,| < \delta,\quad x \in [0, \alpha]$$

бәрабәрсизлији өдәнир.

Дикәр тәрәфдән, $f(x, y)$ функсијасы гапалы R дүзбучаглысында кәсилмәз олдуғундан, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә δ әдәдини кафи гәдәр кичик көтүрмәк һесабына $\kappa > K_\delta$ вә $r = 0, 1, \ldots, (2^{m_k - 1})$ үчүн

$$|\,f(r\,\delta_k, \psi_k(r\,\delta_k)) - f(r\,\delta_k, \psi(r\,\delta_k))\,| < \varepsilon.$$

Бунлары J_k^2-нин ифадәсиндә нәзәрә алсаг:

$$|\,J_k^2\,| \leqslant \varepsilon\,\delta_k\,l_k + M\,|\,x - l_k\,\delta_k\,|$$

олар. $\lim\limits_{k\to\infty} |\,x - l_k\delta_k\,| = 0$ олдуғундан бурадан аларыг ки,

$$\lim_{k\to\infty} |\,J_k^2\,| < \varepsilon(x + 1).$$

Бурада ε кафи гәдәр кичик көтүрүлә билдијиндән $\lim\limits_{k\to\infty} J_k^2 = 0$. Беләликлә, (9) бәрабәрлијинин һәр тәрәфиндә κ сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк

$$\psi(x) = y_0 + \int\limits_0^x f(s, \psi(s))ds$$

олар. x нөгтәси $(0, \alpha]$ јарыминтервалында ихтијари көтүрүлдүјүндән $y = \psi(x)$ функсијасы $[0, \alpha]$ парчасында (8) интеграл тәнлијинин кәсилмәз һәлли олур.

Гејд едәк ки, $\{\varphi_m(x)\}$ ардычыллығындан, $\psi(x)$-дән фәргли функсијаја јығылан алтардычыллыг сечмәк оларса, һәмин функсија да (1) тәнлијинин $y(0) = y_0$ шәртини өдәјән һәлли олур. Теорем исбат олунду.

Нәтичә. *Теоремин шәртләри дахилиндә (1) тәнлијинин $y(0) = y_0$ шәртини өдәјән һәлли $[0, \alpha]$ парчасында јеканә олдугда, (2′) дүстурлары илә тә'јин олунан $\{\varphi_m(x)\}$ ардычыллығынын өзү бу парчада һәмин һәллә мүнтәзәм јығылыр.*

Исбаты. Тутаг ки, $y = \psi(x)$ функсијасы $[0, \alpha]$ парчасында (1) тәнлијинин $y(0) = y_0$ шәртини өдәјән јеканә һәллидир. Көстәрәк ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә елә N нөмрәси вар ки, $m > N$ олдуғда

$$|\varphi_m(x)-\psi(x)|<\varepsilon,\quad x\in[0,\alpha]$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Доғрудан да, экс һалда елә $\varepsilon_0>0$ әдәди, $\{\varphi_{m_k}(x)\}$ алтардычыллығы вә $x_0\in(0,\alpha]$ нөгтәси тапылар ки, һәр бир $k=1,2,\dots$ үчүн

$$|\varphi_{m_k}(x_0)-\psi(x_0)|\geqslant\varepsilon_0. \qquad (10)$$

$\{\varphi_{m_k}(x)\}$ ардычыллығы мүнтәзәм мәһдуд вә ејни дәрәчәдән кәсилмәз олдуғундан, Арсела теореминә әсасән бу ардычыллыгдан $[0,\alpha]$ парчасында (1) тәнлијинин $y(0)=y_0$ шәртини өдәјән һәллинә јығылан алтардычыллыг сечмәк олар. Үмумилији позмадан белә ардычыллыг олараг $\{\varphi_{m_k}(x)\}$-и көтүрә биләрик. Бу гајда илә гурулан һәлли $y=\varphi(x)$ илә ишарә едәк. Онда (10) бәрабәрсизлијиндә лимитә кечсәк:

$$|\varphi(x_0)-\psi(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.$$

Бу исә һәллин јеканәлијинә зиддир.

Ге ј д 1. Тәнлијин бир нөгтәдән кечән интеграл әјриләринин һамысыны, үмумијјәтлә, Ејлер сыныг хәтләринин көмәјилә гурмаг олмаз.

Мисал. 1. $y'=y^{\frac{1}{3}}$ тәнлијинин $y(0)=0$ шәртини өдәјән вә $[0,1]$ парчасында тә'јин олунан сонсуз сајда һәлли вар. Доғрудан да, $0\leqslant\alpha\leqslant1$ шәртини өдәјән истәнилән α үчүн

$$\varphi_\alpha(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\alpha,\\ \left[\dfrac{2(x-\alpha)}{3}\right]^{\frac{3}{2}}, & \alpha<x\leqslant1\end{cases}$$

функсијасы тәнлијин $y(0)=0$ шәртини өдәјән һәллидир. Хүсуси һалда $\alpha=1$ көтүрсәк, $\varphi_1(x)\equiv0$ һәллини аларыг. Бахылан тәнлик үчүн $(0,0)$ нөгтәсиндән кечән Ејлер сыныг хәтләри гурсаг, бу сыныг хәтләрин һамысы $\varphi_1(x)=0$ хәтти илә үст-үстә дүшәр вә демәли, интеграл әјрис и олар.

Бу мисал һәм дә көстәрир ки, бә'зи һалларда тәнлијин верилмиш нөгтәдән кечән интеграл әјриси јеканә олмадыгда белә Ејлер сыныг хәтләри ардычыллығындан јығылан алтардычыллыг сечмәјә еһтијач олмур.

Ге ј д 2. Теореми исбат едәркән Ејлер сыныг хәтләри ардычыллығындан јығылан алтардычыллыг сечмәк, үмумијјәтлә зәруридир.

Доғрудан да, көстәрәк ки,

$$y'=y|y|^{-\frac{3}{4}}+x\sin\frac{\pi}{x}$$

тәнлијинин $y(0)=0$ шәртини өдәјән вә $x\geqslant0$ јарымохунда тә'јин олунмуш һәлли үчүн (2′) дүстурлары илә Ејлер сыныг

хәтләри ардычыллығы гурсаг, бу ардычыллыг $x_0=0$ нөгтәсиндән башга бүтүн нөгтәләрдә дағылыр.

Ајдындыр ки, $x=0$ нөгтәсиндә $x\sin\frac{\pi}{x}=0$ гәбул етсәк

$$f(x,y)=y|y|^{-\frac{3}{4}}+x\sin\frac{\pi}{x}$$

функсијасы $G=\{x\geqslant0;\ -\infty<y<+\infty\}$ јарыммүстәвисиндә кәсилмәз олар. Истәнилән натурал n әдәди үчүн $\delta_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $x_k=k\delta_n$, $k=0,1,\dots$ көтүрәрәк ашағыдакы кими Ејлер сыныг хәтләрини гураг:

$$\varphi_n(x)=\varphi_n[(k-1)\delta_n]+\left\{\varphi_n[(k-1)\delta_n]\,|\varphi_n[(k-1)\delta_n]|^{-\frac{3}{4}}+(k-1)\delta_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{k-1}\right\}[x-(k-1)\delta_n],\quad (k-1)\delta_n\leqslant x<k\delta_n$$

$$\varphi_n(0)=0,\ n=1,2,3,\dots,\ k=0,1,\dots,n.$$

Көстәрәк ки, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы $x=0$ нөгтәсиндән башга бүтүн нөгтәләрдә дағылыр.

Әввәлчә гејд едәк ки, $\varphi_n(x)$ функсијалары чүт n-ләр үчүн артан, тәк n-ләр (һеч олмаса кичик x-ләр) үчүн азаландыр. Доғрудан да n чүт әдәд олдугда

$$\varphi_n(\delta_n)=0,\ \varphi_n(2\delta_n)=\delta_n^2$$

вә кифајәт гәдәр бөјүк n-ләр үчүн $\varphi_n(3\delta_n)>\frac{\sqrt{3}}{2}\delta_n^{\frac{3}{2}}$, n тәк әдәд олдугда исә

$$\varphi_n(\delta_n)=0,\ \varphi_n(2\delta_n)=-\delta_n^2$$

вә кифајәт гәдәр бөјүк n-ләр үчүн $\varphi_n(3\delta_n)<-\frac{\sqrt{3}}{2}\delta_n^{\frac{3}{2}}$.

Көстәрәк ки, кифајәт гәдәр бөјүк n-ләр үчүн $\left(3\delta_n,\frac{1}{1600}\right)$ интервалында n чүт олдугда

$$\varphi_n(x)\geqslant\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6}, \qquad (11)$$

n тәк олдугда исә

$$\varphi_n(x)<-\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6}. \qquad (12)$$

n чүт олдугда $x=3\delta_n$, $x=4\delta_n$ нөгтәләриндә $\varphi_n(x)$ функ-

сиjасы вә онун төрәмәси уjғун олараг $\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}$ функсиjасы вә онун төрәмәсиндән бөjүкдүр. Буну билаваситә jохламаг олар. Демәли, $(3\delta_n, 4\delta_n)$ интервалында (11) бәрабәрсизлиjи өдәнир. Онда $4\delta_n$ нөгтәсиндән сағ тәрәфдә елә $(4\delta_n, \gamma)$ интервалы вар ки, һәмин интервалда да (11) бәрабәрсизлиjи өдәнәр. Аjдындыр ки, бу бәрабәрсизлик $\varphi_n'(x) > \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6}\right)'$, $x \geqslant 4\delta_n$ шәртини өдәjән бүтүн x нөгтәләри үчүн өдәнәчәкдир. $x \geqslant 4\delta_n$ вә $(\kappa-1)\delta_n < x \leqslant \kappa\delta_n$ олдугда:

$$\varphi_n'(x) = \varphi_n^{\frac{1}{4}}((\kappa-1)\delta_n) + (\kappa-1)\delta_n \sin\frac{n+\frac{1}{2}}{\kappa-1}\pi > \varphi_n^{\frac{1}{4}}(x-\delta_n) -$$

$$-x > \frac{1}{2}(x-\delta_n)^{\frac{3}{8}} - x > \frac{x^{\frac{3}{8}}}{10}$$

олдуғундан гә $\frac{x^{\frac{3}{8}}}{10} > \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6}\right)'$ бәрабәрсизлиjи $\left(0, \frac{1}{1600}\right)$ интервалында өдәнилдиjиндән, (11) мүнасибәтинин доғрулуғу алыныр.

Уjғун гаjда илә (12) бәрабәрсизлиjинин доғрулуғуну көстәрмәк олар. Алдығымыз (11) вә (12) бәрабәрсизликләриндән аjдын олур ки, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы $0 < x < \frac{1}{1600}$ шәртини өдәjән x-ләр үчүн дағылыр.

§ 4. ҺӘЛЛИН ДАВАМЫ

Тутаг ки, $f(x, y)$ функсиjасы xOy мүстәвисинин муәjjән D областында кәсилмәздир. Онда бу областын һәр бир (x_0, y_0) нөгтәсиндән (1) тәнлиjинин һеч олмаса бир интеграл әjриси кечир. Доғрудан да, D областы xOy мүстәвиси илә үст-үстә дүшмәдикдә (x_0, y_0) нөгтәсиндән бу областын сәрһәд нөгтәләринә гәдәр олан ән кичик мәсафәнин jарысыны ρ_0 илә ишарә едәк, D областы xOy мүстәвиси илә үст-үстә дүшдүкдә $\rho_0 = 1$ көтүрәк вә $R_0 = \{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \rho_0;\ y_0 - \rho_0 \leqslant y \leqslant y_0 + \rho_0\}$ дүзбучаглысында (1) тәнлиjинә бахаг. Тутаг ки, $M_0 = \max\limits_{R_0} |f(x, y)|$, $\alpha_0 = \min\left\{\rho_0, \frac{\rho_0}{M_0}\right\}$. Онда һәллин варлығы һаггында Пеано теореминә әсасән (1) тәнлиjинин $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәjән вә $[x_0, x_0 + \alpha_0]$ парчасында тә'jин олунан һеч олмаса бир һәлли вар. Бу һәлли (һәлл чох олдугда исә онлардан бирини) $y = \varphi_0(x)$ илә ишарә едәк. Аjдындыр ки, $x_1 = x_0 + \alpha_0$, $y_1 = \varphi_0(x_1)$ ишарә етсәк $(x_1, y_1) \in D$ олур.

Һәлли даһа кениш парчада алмаг үчүн jухарыда ρ_0 әдәдини тә'jин етдиjимиз гаjда илә ρ_1 әдәдини (x_1, y_1) нөгтәсинә уjғун сечиб, $R_1 = \{x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + \rho_1;\ y_1 - \rho_1 \leqslant y \leqslant y_1 + \rho_1\}$, $M_1 = \max\limits_{R_1} |f(x, y)|$, $\alpha_1 = \min\left\{\rho_1, \frac{\rho_1}{M_1}\right\}$ көтүрәк. Онда Пеано теореминә әсасән (1) тәнлиjинин $y(x_1) = y_1$ шәртини өдәjән вә $[x_1, x_1 + \alpha_1]$ парчасында тә'jин олунан һеч олмаса бир һәлли вар. Бу һәлли $y = \varphi_1(x)$ (һәлләрдән бирини) илә ишарә едәк Әкәр $x_2 = x_1 + \alpha_1$, $y_2 = \varphi_1(x_2)$ ишарә етсәк, аjдындыр ки: $(x_2, y_2) \in D$ олар.

Асанлыгла jохламаг олар ки,

$$\psi(x) \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ \varphi_1(x), & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

функсиjасы $[x_0, x_2]$ парчасында (1) тәнлиjинин һәллидир. Демәли, $y = \psi(x)$ һәлли $[x_0, x_1]$ парчасында $y = \varphi_0(x)$ һәлли илә үст-үстә дүшүр вә даһа кениш парчада тә'jин олунуб. Белә хассәли $y = \psi(x)$ һәлли $y = \varphi_0(x)$ һәллинин *сағa давамы*, $y = \varphi_0(x)$ һәлли исә *сағa даваметдирилән һәлл* адланыр.

Jухарыда апарылан әмәлиjjаты (x_2, y_2) нөгтәси үчүн тәкрар едиб, һәлли даһа кениш парчаjа давам етдирмәк олар. Просеси бу гаjда илә сонсуз давам етдирсәк, $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots$ парчалар ардычыллығыны вә уjғун олараг бу парчаларда тә'jин олунан $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ һәлләрини аларыг. Гурмадан аjдындыр ки, $\{x_n\}$ ардычыллығы монотон артандыр. Она көрә сонлу вә jа сонсуз $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$ лимити вар.

Ашағыдакы гаjда илә $[x_0, \beta)$ jарыминтервалында тә'jин олунан $y = \varphi^*(x)$ функсиjасы дүзәлдәк. Истәнилән $x^* \in [x_0, \beta)$ нөгтәси үчүн елә n_0 нөмрәси тапмаг олар ки, $x^* \in [x_{n_0}, x_{n_0+1}]$. Бу нөгтә үчүн $\varphi^*(x^*) = \varphi_{n_0}(x^*)$ көтүрәк. Онда $y = \varphi^*(x)$ функсиjасы (1) тәнлиjинин $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәjән вә $[x_0, \beta)$ jарыминтервалында тә'jин олунан һәлли олур. Уjғун мүһакимәләри x_0 нөгтәсиндән сол тәрәфә дә апармаг олар. Демәли, $f(x, y)$ функсиjасы D областында кәсилмәз олдугда бу областын ихтиjари (x_0, y_0) нөгтәси үчүн (1) тәнлиjинин $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәjән вә мүәjjән (α, β) интервалында тә'jин олунан һеч олмаса бир һәлли вар. Һәллин jеканәлиjи мә'лум олмадыгда, (1) тәнлиjинин $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәjән вә мүхтәлиф интерваллaрда тә'jин олунан һәлләри ола биләр.

Тутаг ки, $y = \varphi(x)$ функсиjасы (1) тәнлиjинин (α, β) интервалында, $y = \psi(x)$ исә $(\alpha, \beta]$ $([\alpha, \beta))$ jарыминтервалында вә jа мүәjjән $\gamma > \beta$ $(\delta < \alpha)$ үчүн (α, γ) $((\delta, \beta))$ интервалында тә'jин олунан һәллидир. Бу заман $x \in (\alpha, \beta)$ үчүн $\varphi(x) = \psi(x)$ оларса, дејирләр ки, $y = \varphi(x)$ һәлли *сағa (сола) даваметдириләндир. Нә сағa, нә дә сола даваметдирилмәjән һәллә даваметдирилмәjән һәлл деjилир.* Мүәjjән парчада вә jа jа-

рыминтервалда верилмиш һәллин даваметдирилән вә даваметдирилмәјән һәлл олмасы аналожи гајда илә тә'јин олунур.

Даваметдирилмәјән һәлл ашағыдакы теорем илә характеризә олунур.

Теорем 3. *Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасы D областында кәсилмәздир вә $y=\varphi(x)$ функсијасы (1) тәнлијинин (α,β) интервалында тә'јин олунмуш һәллидир. Бу һәллин саға (сола) даваметдирилмәјән һәлл олмасы үчүн ашағыдакы шәртләрдән һеч олмаса биринин өдәнмәси зәрури вә кафидир:*

1) $\beta=+\infty$ $(\alpha=-\infty)$;

2) β сонлудур вә $\overline{\lim}_{x\to\beta-0}|\varphi(x)|=+\infty$ (α сонлудур вә $\overline{\lim}_{x\to\alpha+0}|\varphi(x)|=+\infty$);

3) β сонлудур вә $\overline{\lim}_{x\to\beta-0}|\varphi(x)|$ *сонлудур (α сонлудур вә* $\overline{\lim}_{x\to\alpha+0}|\varphi(x)|$ *сонлудур), лакин x кәмијјәти β әдәдинә солдан (α әдәдинә сағдан) јахынлашдыгда $(x,\varphi(x))$ нөгтәси илә D областынын сәрһәд нөгтәләри арасындакы ән кичик мәсафә сыфра јахынлашыр.*

Кафилијин исбаты. Тутаг ки, $y=\psi(x)$ һәлли $y=\varphi(x)$ һәллинин (α,β) интервалындан $(\alpha,\beta]$ јарыминтервалына давамыдыр, јә'ни $y=\varphi(x)$ һәлли саға даваметдирилән һәллдир. Бу заман $y=\psi(x)$ функсијасы $(\alpha,\beta]$ јарыминтервалында кәсилмәздир вә $(\beta,\psi(\beta))\in D$.

Ајдындыр ки, теоремин 1), 2), 3) шәртләриндән һеч олмаса бири өдәндикдә бу һал мүмкүн дејил.

Зәрурилијин исбаты. Тутаг ки, теоремин 1), 2), 3) шәртләриндән һеч бири өдәнилмир. Бу һалда $y=\varphi(x)$ һәллинин саға даваметдирилән һәлл олдуғуну көстәрәк.

Ајдындыр ки, 1) шәрти өдәнмәдијиндән β сонлудур, 2) шәрти өдәнмәдијиндән мүәјјән $\alpha<a<\beta$ әдәди үчүн $y=\varphi(x)$ функсијасы $[a,\beta)$ јарыминтервалында мәһдуд олур. Бу шәртләрлә бәрабәр 3) шәрти өдәнмәдијиндән $x\in[a,\beta)$ үчүн $(x,\varphi(x))$ нөгтәләри D областынын мәһдуд гапалы һиссәсиндә јерләшир. Она көрә $f(x,\varphi(x))$ функсијасы $[a,\beta)$ јарыминтервалында мүәјјән $M>0$ әдәди илә мәһдуд олур: $|f(x,\varphi(x))|\leqslant M$, $x\in[a,\beta)$. Ихтијари $x',x''\in[a,\beta)$ нөгтәләри үчүн Лагранжын сонлу артым дүстуруна әсасән

$$|\varphi(x'')-\varphi(x')|=|\varphi'(\xi)(x''-x')|=|f(\xi,\varphi(\xi))||x''-x'|\leqslant M|x''-x'|.$$

Бурадан ајдындыр ки, лимитин варлығы һаггында Коши мејары өдәнир. Одур ки, сонлу $\lim_{x\to\beta-0}\varphi(x)=B$ лимити вар. Бундан башга $(\beta,B)\in D$.

Көстәрәк ки,

$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in(\alpha,\beta)\\ B, & x=\beta\end{cases}$$

функсијасы $y=\varphi(x)$ һәллинин $(\alpha,\beta]$ јарыминтервалына давамыдыр. Доғрудан да, $y=\psi(x)$ функсијасы $(\alpha,\beta]$ јарыминтервалында кәсилмәздир вә демәли, $f(x,\psi(x))$ функсијасы да бурада кәсилмәздир. Она көрә $x\in(\alpha,\beta)$ үчүн

$$\psi(x)=\psi(a)+\int_a^x f(\xi,\psi(\xi))d\xi$$

бәрабәрлијиндән $y=\psi(x)$ функсијасынын һәм дә $x=\beta$ нөгтәсиндә $\psi'(\beta-0)$ сол төрәмәсинин варлығы вә $\psi'(\beta-0)=f(\beta,\psi(\beta))$ олмасы алыныр. Демәли, $y=\psi(x)$ функсијасы $(\alpha,\beta]$ јарыминтервалында (1) тәнлијинин һәллидир. Теорем исбат олунду.

Гејд 1. Ајдындыр ки, D областы мәһдуд олдугда теоремин 1), 2) шәртләри арадан чыхыр вә һәр бир даваметдирилмәјән һәлл үчүн 3) шәрти өдәнмәлидир. Бундан башга, $f(x,y)$ функсијасы D областында мәһдуд оларса, сонлу $\lim_{x\to\beta-0}\varphi(x)=B$ лимити вар вә (β,B) нөгтәси D областынын сәрһәдиндә јерләшир. Дикәр тәрәфдән, D областы өзүндә $x\geqslant x_0$ $(x\leqslant x_0)$ јарыммүстәвисини сахлајырса 3) шәрти арадан чыхыр вә анчаг 1), 2) шәртләри галыр. Демәли, бу һалда һәллин даваметдирилмәјән һәлл олмасы үчүн һеч олмаса теоремин 1), 2) шәртләриндән бири өдәнмәлидир.

Нәтичә 1. *Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасы D областында кәсилмәздир. Онда бу областын һәр бир (x_0,y_0) нөгтәсиндән (1) тәнлијинин һеч олмаса бир даваметдирилмәјән һәллинин графики кечир.*

Нәтичәнин доғрулуғуну исбат етмәк үчүн јухарыда $[x_0,\beta)$ $(\lim_{n\to\infty}x_n=\beta)$ јарыминтервалында тә'јин етдијимиз $y=\varphi^*(x)$ функсијасынын саға даваметдирилмәјән һәлл олдуғуну көстәрәк. Ашағыдакы мүмкүн һаллара бахаг.

1) $\beta=+\infty$; 2) β сонлудур вә $\overline{\lim}_{x\to\beta-0}|\varphi^*(x)|=+\infty$; 3) β сонлудур вә $\overline{\lim}_{x\to\beta-0}|\varphi^*(x)|$ сонлудур, лакин $\underline{\lim}_{x\to\beta-0}\varphi^*(x)<\overline{\lim}_{x\to\beta-0}\varphi^*(x)$; 4) β сонлудур вә $\lim_{x\to\beta-0}\varphi^*(x)=B$ сонлудур.

Ајдындыр ки, 1), 2) һалларында һәлл саға даваметдирилмәјәндир. 3-чү һалда $[x_0,\beta)$ јарыминтервалында $y=\varphi^*(x)$ һәлли илә үст-үстә дүшән вә $[x_0,\beta]$ парчасында кәсилмәз олан $y=\psi(x)$ функсијасы гурмаг олмаз. Демәли, 3-чү һалда да $y=\varphi^*(x)$ һәлли саға даваметдирилмәјәндир.

Инди 4-чү һала бахаг. Бу һалда $(\beta,B)\in D$ вә ја (β,B) нөгтәси D областынын сәрһәд нөгтәси олар. Ахырынчы һалда $y=\varphi^*(x)$ һәлли теоремин 3-чү шәртинә әсасән саға даваметдирилмәјән-

дир. Демәли, $(\beta, B)\in D$ һалыны арашдырмаг лазымдыр. Јухарыда (x_0, y_0) нөгтәси үчүн тә'јин етдијимиз ρ_0, M_0, α_0 әдәдләринә ујғун (β, B) нөгтәси үчүн ρ, M, α әдәдләрини тә'јин едәк. Онда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ олдуғундан алырыг ки, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=\rho$, $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$. Бурадан мүәјјән $h>0$ әдәди үчүн $\alpha_n > h$, $n = 0,1,\dots$ олдуғу алыныр. Демәли, һәр аддымда һәлли узунлуғу h-дан бөјүк парчада тә'јин едирик. Бу исә о заман мүмкүндүр ки, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ олсун. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, (β, B) нөгтәси D областынын дахилиндә јерләшә билмәз.

Нәтичә 2. *Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы D областында кәсилмәздир вә бу областын һәр бир нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир. Онда истәнилән $(x_0,y_0)\in D$ нөгтәсиндән (1) тәнлијинин јеканә давамeтдирилмәјән һәллинин графики кечир.*

Нәтичә 3. *Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы гапалы вә мәһдуд $\bar D$ областында кәсилмәздир. Онда $(x_0,y_0)\in D$ нөгтәсиндән кечән вә давамeтдирилмәјән һәллә ујғун интеграл әјрисинин уч нөгтәләри бу областын сәрһәдиндә јерләшир.*

Г е ј д 2. Бурада областын гапалы вә мәһдуд олмасы мүһүм шәртдир. Доғрудан да $y' = -y^2$ тәнлијиндә $f(x,y) = -y^2$ функсијасы бүтүн xOy мүстәвисиндә кәсилмәз олмасына бахмајараг, тәнлијин $y(-1)=1$ шәртини өдәјән вә $(-\infty, 0)$ јарымохунда тә'јин олунан $y = -\frac{1}{x}$ һәлли сағa давамeтдирилмәјәндир.

§ 5. ТОНЕЛЛИ ЈАХЫНЛАШМАЛАРЫ

Бу параграфда Пеано теореминин исбаты Тонелли јахынлашмалары үсулу илә верилир. Бунун үчүн $[x_0, x_0+\alpha]$ парчасында кәсилмәз диференсиалланан, төрәмәси $|\varphi_0'(x)|\leqslant M$, $x\in[x_0,x_0+\alpha]$ шәртини өдәјән вә графики (x_0,y_0) нөгтәсиндән кечән $y=\varphi_0(x)$ функсијасы көтүрәк. (Хүсуси һалда $\varphi_0(x)=y_0$ көтүрмәк олар.) Һәр бир n натурал әдәди үчүн ашағыдакы гајда илә $[x_0,x_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунан $\varphi_n(x)$ функсијасыны дүзәлдәк:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x_0\leqslant x\leqslant x_0+\frac{\alpha}{n} \\ \varphi_0\left(x_0+\frac{\alpha}{n}\right)+\int\limits_{x_0}^{x-\frac{\alpha}{n}} f(\xi,\varphi_n(\xi))\,d\xi, & x_0+\frac{\alpha}{n}\leqslant x\leqslant x_0+\alpha. \end{cases} \tag{13}$$

Бу дүстур ашағыдакы кими баша дүшүлүр. $[x_0,x_0+\alpha]$ пар-

часы $\left[x_0, x_0+\frac{\alpha}{n}\right]$, $\left[x_0+\frac{\alpha}{n}, x_0+\frac{2\alpha}{n}\right]$, ... кими n бәрабәр һиссәјә бөлүнүр вә $x\in\left[x_0,x_0+\frac{\alpha}{n}\right]$ олдугда $\varphi_n(x)=\varphi_0(x)$ көтүрүлүр. $x\in\left[x_0+\frac{\alpha}{n}, x_0+\frac{2\alpha}{n}\right]$ олдугда $x-\frac{\alpha}{n}\in\left[x_0,x_0+\frac{\alpha}{n}\right]$. Белә x-ләр үчүн ξ интеграллама дәјишәни $\left[x_0,x_0+\frac{\alpha}{n}\right]$ парчасында дәјишир. Она көрә дә $x\in\left[x_0+\frac{\alpha}{n},x_0+\frac{2\alpha}{n}\right]$ олдугда $\varphi_n(x)$ функсијасы

$$\varphi_n(x)=\varphi_0\left(x_0+\frac{\alpha}{n}\right)+\int\limits_{x_0}^{x-\frac{\alpha}{n}} f(\xi,\varphi_0(\xi))\,d\xi \tag{14}$$

дүстуру илә тә'јин олунур. $x\in\left[x_0+\frac{2\alpha}{n},x_0+\frac{3\alpha}{n}\right]$ олдугда $x-\frac{\alpha}{n}\in\left[x_0-\frac{\alpha}{n}, x_0+\frac{2\alpha}{n}\right]$. Белә x-ләр үчүн

$$\varphi_n(x)=\varphi_0\left(x_0+\frac{\alpha}{n}\right)+\int\limits_{x_0}^{x_0+\frac{\alpha}{n}} f(\xi,\varphi_0(\xi))\,d\xi+\int\limits_{x_0+\frac{\alpha}{n}}^{x-\frac{\alpha}{n}} f(\xi,\varphi_n(\xi))\,d\xi=$$

$$=\varphi_n\left(x_0+\frac{2\alpha}{n}\right)+\int\limits_{x_0+\frac{\alpha}{n}}^{x-\frac{\alpha}{n}} f(\xi,\varphi_n(\xi))\,d\xi$$

олдуғуну нәзәрә алыб, сонунчу интегралын алтында $\varphi_n(x)$ әвәзинә (14) дүстуру илә тә'јин олунан функсијаны јазмаг лазымдыр.

Бу гајданы сонракы парчалара да тәтбиг етсәк, $\varphi_n(x)$ функсијасыны тамамилә $[x_0,x_0+\alpha]$ парчасында тә'јин едә биләрик.

Көстәрәк ки, гурулмуш $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы Арсела теореминин шәртләрини өдәјир. Доғрудан да, $x\in\left[x_0,x_0+\frac{\alpha}{n}\right]$ үчүн Лагранж дүстуруна әсасән

$$|\varphi_n(x)-y_0| = |\varphi_0(x)-\varphi_0(x_0)| = |\varphi_0'(\theta)||x-x_0|\leqslant M\alpha\leqslant b$$

олар вә $n\geqslant 2$ олдугда $x\in\left[x_0+\frac{\alpha}{n}, x_0+\frac{2\alpha}{n}\right]$ үчүн (14) дүстуруна әсасән

$$|\varphi_n(x)-y_0|\leqslant\left|\varphi_0\left(x_0+\frac{\alpha}{n}\right)-y_0\right|+\left|\int_{x_0}^{x-\frac{\alpha}{n}} f(\xi,\varphi_0(\xi))\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\varphi_0\left(x_0+\frac{\alpha}{n}\right)-\varphi_0(x_0)\right|+M\left(x-\frac{\alpha}{n}-x_0\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left|\varphi_0'(\theta)\right|\cdot\frac{\alpha}{n}+M\frac{\alpha}{n}\leqslant\frac{2M\alpha}{n}\leqslant b.$$

Бу гајданы сонракы парчалар үчүн дә тәкрар етмәклә көстәрмәк олар ки, истәнилән $x\in[x_0, x_0+\alpha]$ үчүн $|\varphi_n(x)-y_0|\leqslant b$. Демәли, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы $[x_0, x_0+\alpha]$ парчасында мүнтәзәм мәһдуддур.

Пеано теореминин Ејлер сыныг хәтләр үсулу илә исбатындакы гајда илә көстәрмәк олар ки, истәнилән $x', x''\in[x_0, x_0+\alpha]$ нөгтәләри үчүн

$$|\varphi_n(x'')-\varphi_n(x')|\leqslant M|x''-x'|$$

шәрти өдәнир. Бу исә көстәрир ки, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы $[x_0, x_0+\alpha]$ парчасында ејни дәрәчәдән кәсилмәздир.

Арсела теореминә әсасән $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығындан $[x_0, x_0+\alpha]$ парчасында мүнтәзәм јығылан $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ алтардычыллығы сечмәк олар.

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(x)=\varphi(x)$$

гәбул едәрәк көстәрәк ки, $\varphi(x)$ функсијасы (5) интеграл тәнлијинин һәллидир. Һәр бир $x\in(x_0, x_0+\alpha]$ нөгтәси үчүн k нөмрәсини кифајәт гәдәр бөјүк көтүрмәклә

$$\varphi_{n_k}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_{n_k}(\xi))\,d\xi+\int_{x}^{x-\frac{\alpha}{n_k}} f(\xi,\varphi_{n_k}(\xi))\,d\xi+$$

$$+\left(\varphi_0\left(x_0+\frac{\alpha}{n_k}\right)-y_0\right)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан

$$\left|\int_{x}^{x-\frac{\alpha}{n_k}} f(\xi,\varphi_n(\xi))\,d\xi\right|\leqslant M\frac{\alpha}{n_k}$$

олдуғуну нәзәрә алараг k сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк,

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi$$

бәрабәрлијини аларыг. Јә'ни $\varphi(x)$ функсијасы (5) интеграл тәнлијинин һәллидир.

Мисал 2. $y'=2x-y$ тәнлијинин $y(0)=-1$ шәртини өдәјән вә $[0,1]$ парчасында тә'јин олунмуш һәллини Тонелли јахынлашмалары васитәсилә тәгриби гураг. Бунун үчүн $\varphi_0(x)=-1+x$ функсијасыны көтүрәк вә $n=10$ гәбул едәк. Онда

$$\varphi_{10}(x)=\begin{cases}-1+x, & 0\leqslant x\leqslant 0{,}1\\ -0{,}9+\int_0^{x-0,1}[2s-\varphi_{10}(s)]\,ds, & 0{,}1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

олдуғундан, $0{,}1\leqslant x\leqslant 0{,}2$ олдугда

$$\varphi_{10}(x)=-0{,}9+\int_0^{x-0,1}(s+1)\,ds=-1+x+0{,}5(x-0{,}1)^2,$$

$$\varphi_{10}(0{,}2)=-0{,}795$$

олур, $0{,}2\leqslant x\leqslant 0{,}3$ олдугда исә

$$\varphi_{10}(x)=-0{,}795+\int_{0,1}^{x-0,1}[s+1-0{,}5(s-0{,}1)^2]\,ds=-1+x$$

$$+0{,}5(x-0{,}1)^2-\frac{1}{6}(x-0{,}2)^3;\quad \varphi_{10}(0{,}3)=-0{,}6791.$$

Бу гајда илә $\varphi_{10}(x)$ функсијасыны бүтүн $[0,1]$ парчасында тапмаг олар.

§ 6. ЈЕКАНӘЛИК ТЕОРЕМЛӘРИ

Јухарыда көстәрдик ки, $f(x,y)$ функсијасы D областында кәсилмәз олдугда, истәнилән $(x_0,y_0)\in D$ нөгтәси үчүн

$$y'=f(x,y)\tag{1}$$

тәнлијинин

$$y(x_0)=y_0\tag{4}$$

шәртини өдәјән вә мүәјјән (α,β) интервалында тә'јин олунмуш дәвамeтдирилмәјән һәлли вар.

М. А. Лаврентјев (1) шәклиндә елә диференсиал тәнлик гурмушдур ки, һәмин тәнликдә $f(x,y)$ функсијасы мүәјјән дүзбучаглыда кәсилмәз олмасына бахмајараг, бу дүзбучаглынын һәр бир нөгтәсиндән тәнлијин ән азы ики интеграл әјриси кечир.

Беләликлә, мүәјјән нөгтәдән кечән интеграл әјрисинин јеканәлијини тә'мин етмәк үчүн $f(x,y)$ функсијасы үзәринә кәсилмәзликдән әлавә шәрт гојмаг лазымдыр.

Һәллин јеканәлијини тә'мин едән ашағыдакы теоремләри исбат едәк.

Теорем 4. *Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасы (x_0,y_0) нөгтәсинин әтрафында тә'јин олунуб вә бу әтрафда һәр бир x*

үчүн у-ә нәзәрән артмајандыр. Онда (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән ән чоху бир һәлли вар.

Исбаты. Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, кичик $h>0$ әдәди үчүн (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә (x_0-h, x_0+h) интервалында тә'јин олунмуш ики мүхтәлиф $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ һәлләри вар. Онда heч олмаса бир $\xi\in(x_0-h, x_0+h)$ нөгтәси вар ки, бу нөгтәдә $y_1(\xi)\neq y_2(\xi)$. Мүәјјәнлик үчүн фәрз едәк ки, $\xi\in(x_0, x_0+h)$ вә $y_1(\xi)<y_2(\xi)$. Онда $y_1(x)$, $y_2(x)$ функсијалары (x_0, x_0+h) интервалында кәсилмәз олдуғундан, бу интервала дахил олан елә ән бөјүк (α,β) интервалы вар ки, бурада $y_1(\alpha)=y_2(\alpha)$, $y_1(x)<y_2(x)$, $y_1(\beta)\leqslant y_2(\beta)$ мүнасибәтләри өдәнир. (Хүсуси һалда $\alpha=x_0$ ола биләр.)

Теоремин шәртинә әсасән $x\in(\alpha,\beta)$ үчүн $f(x,y_1(x))\geqslant f(x,y_2(x))$ олар вә бурадан $y_1'(x)\geqslant y_2'(x)$ бәрабәрсизлији алынар. Бу бәрабәрсизлији α-дан x-ә $(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$ гәдәр интегралладараг $y_1(\alpha)=y_2(\alpha)$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $y_1(x)\geqslant y_2(x)$. Бу исә $y_1(\xi)<y_2(\xi)$ шәртинә зидд олдуғундан, теоремин доғрулуғуну алырыг.

Теорем 5 *(Осгуд). Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасы D областында тә'јин олунуб вә бу областын ихтијари ики (x,y_1) (x,y_2) нөгтәләри үчүн*

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant\varphi(|y_2-y_1|) \qquad (15)$$

шәртини өдәјир. Бурада $\varphi(u)$ функсијасы $(0,u_0]$ $(u_0>0)$ јарыминтервалында мүсбәт, кәсилмәз функсијадыр вә

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{u_0}\frac{du}{\varphi(u)}=+\infty. \qquad (16)$$

Онда һәр бир $(x_0,y_0)\in D$ үчүн (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән ән чоху бир һәлли вар.

Гејд 1. Теоремин шәртләрини өдәјән $\varphi(u)$ функсијасына мисал олараг

$$Ku,\ Ku|\ln u|,\ Ku|\ln u||\ln|\ln u||,\ K=\mathrm{const}>0$$

функсијаларыны көстәрмәк олар.

Хүсуси һалда, $\varphi(u)=Ku$ көтүрдүкдә (15) бәрабәрсизлији

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant K|y_2-y_1| \qquad (17)$$

шәклинә дүшүр вә бу һалда дејирләр ки, $f(x,y)$ функсијасы у-ә нәзәрән *Липшис шәртини* өдәјир, K исә *Липшис әмсалы* адланыр.

Гејд 2. D областы у-ә нәзәрән габарыг исә вә $f(x,y)$ функсијасынын бу областда мәһдуд $f_y(x,y)$ төрәмәси варса, $f(x,y)$ функсијасы у-ә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир. Доғрудан да, тутаг ки, D областында

$$|f_y(x,y)|\leqslant K \quad (K\geqslant 0)$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Онда Лагранж дүстуруна әсасән

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|=|f_y(x,y_1+\theta(y_2-y_1))|\times|y_2-y_1|\leqslant K|y_2-y_1|;\ 0\leqslant\theta\leqslant1.$$

Теоремин исбаты. Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә мүәјјән (a,b) интервалында тә'јин олунмуш ики мүхтәлиф $y_1(x)$, $y_2(x)$ һәлләри вар. Онда

$$z(x)=y_2(x)-y_1(x)$$

кәсилмәз функсијадыр вә елә $x_1\in(a,b)$ нөгтәси вар ки,

$$z(x_1)=y_2(x_1)-y_1(x_1)=z_1\neq0.$$

Үмумилији позмадан $x_0=0$ гәбул едәк. Әкс һалда x-и $x+x_0$ илә әвәз етмәклә буна наил оларыг.

Гејд едәк ки, һәм дә $x_1>0$ вә $z_1>0$ гәбул етмәк олар. Әкс һалда, x-и $-x$ илә әвәз етмәк вә $z(x)=y_1(x)-y_2(x)$ көтүрмәк кифајәтдир. Демәли, фәрз етмәк олар ки,

$$z(0)=0,\quad z(x_1)=z_1>0.$$

Теоремин (15) шәртинә әсасән, (a,b) интервалында

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dy_2}{dx}-\frac{dy_1}{dx}=f(x,y_2(x))-f(x,y_1(x))\leqslant$$
$$\leqslant\varphi(|y_2(x)-y_1(x)|)<2\varphi(|y_2(x)-y_1(x)|)=2\varphi(|z(x)|) \qquad (18)$$

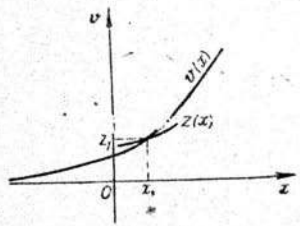
бәрабәрсизлијини алырыг. $D_1=\{-\infty<x<+\infty;\ v>0\}$ областында

$$\frac{dv}{dx}=2\varphi(v) \qquad (19)$$

тәнлијинә бахаг. Көстәрәк ки, бу тәнлијин $v(x_1)=z_1$ шәртини өдәјән јеканә мүсбәт һәлли вар вә онун графики асимптотик олараг абсис охунун мәнфи истигамәтинә јахынлашыр. Доғрудан да, һәмин һәлли $v(x)$ илә ишарә етсәк, бу һәлл

$$\int_{z_1}^{v}\frac{du}{\varphi(u)}=2(x-x_1)\quad (x_1>0,\ z_1>0)$$

дүстуру илә тә'јин олунур. Интегралалты функсија мүсбәт олдуғундан алырыг ки, $x>x_1$ олдугда $v>z_1$, $x<x_1$ олдугда исә $0<v<z_1$ олур. x мәнфи сонсузлуға јахынлашдыгда, (16) шәртинә әсасән $v(x)$ монотон азалараг абсис охунун мәнфи истигамәтинә јахынлашыр вә ону кәсмир (шәкил 8).



Шәкил 8.

Гурмаіа әсасән $z(x)$ вә $v(x)$ функсиіаларынын графикләри (x_1, z_1) нөгтәсиндән кечир вә бу нөгтәдә $z'(x_1) < v'(x_1)$ шәрти өдәнир. Доғрудан да,

$$z'(x_1) = y_2'(x_1) - y_1'(x_1) = f(x_1, y_2(x_1)) - f(x_1, y_1(x_1)) <$$
$$< 2\varphi(|y_2(x_1) - y_1(x_1)|) = 2\varphi(z(x_1)) = 2\varphi(v(x_1)) = v'(x_1).$$

Она көрә елә $\varepsilon > 0$ әдәди вар ки, $(x_1 - \varepsilon, x_1)$ интервалында $z(x) > v(x)$ бәрабәрсизлиіи өдәнир. Көстәрәк ки, бу бәрабәрсизлик $(0, x_1)$ интервалында өдәнир. Әкс һалда елә $x_2 \in (0, x_1)$ нөгтәси тапмаг олар ки, $z(x_2) = v(x_2)$ вә

$$z'(x_2) \geqslant v'(x_2).$$

Дикәр тәрәфдән, теоремин шәртинә әсасән

$$z'(x_2) = y_2'(x_2) - y_1'(x_2) = f(x_2, y_2(x_2)) - f(x_2, y_1(x_2)) <$$
$$< 2\varphi(|y_2(x_2) - y_1(x_2)|) = 2\varphi(z(x_2)) = 2\varphi(v(x_2)) = v'(x_2)$$

олмалыдыр. Алынан бәрабәрсизлик $z'(x_2) \geqslant v'(x_2)$ бәрабәрсизлиіинә зиддир. Демәли, $(0, x_1)$ интервалында $z(x) \geqslant v(x) > 0$ бәрабәрсизлиіи өдәнир. Бурадан хүсуси һалда $z(0) \geqslant v(0) > 0$ алыныр. Бу исә $z(0) = 0$ шәртинә зиддир. Теорем исбат олунду.

Осгуд теореми іеканәлик үчүн кафи шәртдир. Бу теоремин нә дәрәчәдә зәруриліә іахын олмасыны ашағыдакы теорем көстәрир.

Теорем 6. *Тутаг ки, $f(x, y)$ функсиіасы $R = \{-a \leqslant x \leqslant a;\ -b \leqslant y \leqslant b\}$ дүзбучаглысында кәсилмәздир вә бу дүзбучаглыдан көтүрүлмүш истәнилән (x, y_1), (x, y_2) нөгтәләри үчүн*

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \geqslant \psi(|y_2 - y_1|) \qquad (20)$$

бәрабәрсизлиіи өдәнир; бурада $\psi(u)$ функсиіасы $[0, u_0]$ $(u_0 > 0)$ парчасында монотон артан, кәсилмәз функсиіа олуб, $\psi(0) = 0$ вә

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{u_0} \frac{du}{\varphi(u)} < +\infty \qquad (21)$$

шәртләрини өдәіир. Онда (1) тәнлиіинин $y(0) = 0$ шәртини өдәіән ән азы ики һәлли вар (іә'ни бу тәнлиіин координат башланғычындан ән азы ики интеграл әіриси кечир).

Исбаты. $f(x, y)$ функсиіасы R дүзбучаглысында кәсилмәз олдуғундан, (1) тәнлиіинин $y(0) = 0$ шәртини өдәіән вә мүәіјән $[-a_1, a_1]$ $(a_1 \leqslant a)$ парчасында тә'іин олунан һеч олмаса бир $y = \varphi_1(x)$ һәлли вар. Үмумилиіи позмадан $\varphi_1(x) \equiv 0$ көтүрмәк олар. Доғрудан да, тәнликдә $y = z + \varphi_1(x)$ әвәзләмәси апарсаг

$$z' = F(x, z), \quad F(x, z) = f(x, z + \varphi_1(x)) - f(x, \varphi_1(x)) \qquad (22)$$

тәнлиіини аларыг вә $F(x, 0) \equiv 0$ олдуғундан, $z = 0$ бу тәнлиіин һәлли олар. Бу гаіда илә алынмыш $F(x, z)$ функсиіасы $f(x, y)$ функсиіасынын өдәдиіи шәртләри өдәдиіиндән (1) тәнлиіи әвәзинә (22) тәнлиіини көтүрүб, теореми онун үчүн исбат етмәк олар. Демәли, $\varphi_1(x) \equiv 0$ вә $f(x, 0) \equiv 0$ гәбул етмәк олар. Она көрә дә (20) бәрабәрсизлиіиндә $y_1 = 0$, $y_2 = y$ көтүрсәк, R дүзбучаглысында

$$|f(x, y)| \geqslant \psi(|y|). \qquad (23)$$

Бу бәрабәрсизликдән алырыг ки, ихтиіари кичик $h > 0$ әдәди үчүн ашағыдакы һаллардан бири мүмкүндүр:

(α) $f(0, h) > 0$;
(β) $f(0, h) < 0$, $f(0, -h) < 0$;
(γ) $f(0, h) < 0$, $f(0, -h) > 0$.

(α) *һалы.* Теоремин шәртләри дахилиндә

$$z' = \psi(z) \qquad (24)$$

тәнлиіинин

$$z(0) = 0$$

шәртини өдәіән $z(x) \equiv 0$ вә

$$\int_0^z \frac{du}{\psi(u)} = x \qquad (25)$$

илә тә'іин олунан $z = \omega(x)$ мүхтәлиф һәлләри вар. Бурада $\omega(0) = 0$ вә $x > 0$ олдугда $\omega(x) > 0$. Аідындыр ки, кичик $h > 0$ $(h < b)$ әдәди үчүн (1) тәнлиіинин $y(0) = h$ шәртини өдәіән вә мүәіјән $[-a_2, a_2]$ $(0 < a_2 \leqslant a)$ парчасында тә'іин олунан һәлли вар. Бу һәлли $y = \varphi(x, h)$ илә ишарә едәк.

Инди $[0, a_2]$ парчасында

$$\varphi(x, h) > \omega(x) \qquad (26)$$

бәрабәрсизлиіинин доғрулуғуну көстәрәк.

Доғрудан да, $\varphi(0, h) - \omega(0) = h > 0$ вә

$$\varphi(x, h) - \omega(x) = h + \int_0^x [f(\xi, \varphi(\xi, h)) - \psi(\omega(\xi))]\, d\xi$$

олдуғундан,

$$(\varphi(x, h) - \omega(x))'|_{x=0} = [f(x, \varphi(x, h)) - \psi(\omega(x))]|_{x=0} =$$
$$= f(0, h) - \psi(0) = f(0, h) > 0.$$

Демәли, $\varphi(x, h) - \omega(x)$ функсиіасы $x = 0$ нөгтәсиндә артандыр. Она көрә елә $[0, c]$ $(0 < c \leqslant a_2)$ парчасы вар ки, бурада

$$\varphi(x, h) - \omega(x) > 0$$

шәрти өдәнир. Көстәрәк ки, бу бәрабәрсизлик һәм дә $[0, a_2]$ парчасында өдәнир.

Доғрудан да, экс һалда елә $x_1 \in [0, a_2]$ нөгтәси тапылар ки,

$$\begin{aligned}&\varphi(x,h) - \omega(x) > 0, \quad 0 \leqslant x < x_1,\\ &\varphi(x_1,h) - \omega(x_1) = 0\end{aligned} \tag{27}$$

шәртләри өдәнәр. $\psi(z)$ функсијасы артан олдуғундан, бурадан алырыг ки, $0 \leqslant x < x_1$ үчүн $\psi[\varphi(x,h)] - \psi[\omega(x)] > 0$.

Дикәр тәрәфдән $f(0,h) > 0$ олдуғундан (23) шәртинә әсасән (0, 0) нөгтәсинин елә V әтрафы вар ки, бу әтрафда

$$f(x,y) \geqslant \psi(|y|).$$

Бунлары нәзәрә алсаг, ардычыл олараг, ашағыдакы бәрабәрсизликләри јаза биләрик:

$$\varphi(x_1,h) - \omega(x_1) = h + \int_0^{x_1} [f(\xi,\varphi(\xi,h)) - \psi(\omega(\xi))]\,d\xi \geqslant$$

$$\geqslant h + \int_0^{x_1}[\psi(\varphi(\xi,h)) - \psi(\omega(\xi))]\,d\xi \geqslant h + \int_0^{x_1} 0\, d\xi = h > 0.$$

Бу исә (27) шәртләринин икинчисинә зиддир. Демәли, $[0,a_2]$ парчасында (26) шәрти өдәнир. Көстәрәк ки, $y=\varphi(x,h)$ функсијасы h дәјишәнинә нәзәрән азалмајандыр. Башга сөзлә десәк, көстәрәк ки, $0<h_1<h$ шәртини өдәјән h_1 әдәди үчүн $[0,a_2]$ парчасында

$$\varphi(x,h_1) \leqslant \varphi(x,h) \tag{28}$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Доғрудан да, $\varphi(0,h_1) < \varphi(0,h)$ олдуғундан, елә ән бөјүк $0 < a_3 \leqslant a_2$ әдәди вар ки, $0 \leqslant x < a_3$ олдугда

$$\varphi(x,h_1) < \varphi(x,h)$$

бәрабәрсизлији өдәнәр. Әкәр $a_3 < a_2$ оларса, $\varphi(a_3,h_1) = \varphi(a_3,h)$ олар вә беләликлә,

$$\varphi'(a_3,h_1) = f(a_3,\varphi(a_3,h_1)) = f(a_3,\varphi(a_3,h)) = \varphi'(a_3,h).$$

Бурадан алырыг ки,

$$\varphi_1(x,h_1) = \begin{cases}\varphi(x,h_1), & x\in[0,a_3]\\ \varphi(x,h), & x\in[a_3,a_2]\end{cases}$$

функсијасы $\varphi(x,h_1)$ һәллинин давамы олар вә бу давам функсија үчүн (28) бәрабәрсизлији өдәнәр. Беләликлә, $y=\varphi(x,h)$ функсијасы h дәјишәнинә нәзәрән азалмајан олуб, (26) бәрабәрсизлијини өдәјир.

Ајдындыр ки, сонлу $\varphi(x) = \lim\limits_{h\to0}\varphi(x,h)$ лимити вар вә (26)

бәрабәрсизлијинә әсасән $\varphi(x)$ лимит функсијасы $[0,a_2]$ парчасында $\varphi(x) \geqslant \omega(x)$ бәрабәрсизлијини өдәјир. Дикәр тәрәфдән

$$\varphi(x) = \lim_{h\to0}\varphi(x,h) = \lim_{h\to0}\left\{h + \int_0^x f(\xi,\varphi(\xi,h))\,d\xi\right\} = \int_0^x f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi$$

олдуғундан алырыг ки,

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)) \quad \text{вә} \quad \varphi(0) = \lim_{h\to0}\varphi(0,h) = 0.$$

Бу мүнасибәтләр көстәрир ки, $y = \ (x)$ функсијасы $[0,a_2$ парчасында (1) тәнлијинин $y(0)=0$ шәртини өдәјән һәллидир.

Ејни гајда илә $y=\varphi(x)$ лимит функсијасынын $[-a_2,0]$ парчасында да һәлл олдуғуну көстәрмәк олар. Беләликлә, (α) һалында (1) диференсиал тәнлијинин $y(0)=0$ шәртини өдәјән ики мүхтәлиф $\varphi_1(x)\equiv 0$ вә $y=\varphi(x)$ һәлләри вар. (β) һалы $y=-z$ әвәзләмәси васитәсилә (α) һалына кәтирилир. Доғрудан да, бу әвәзләмә нәтичәсиндә (1) тәнлији

$$\frac{dz}{dx} = -f(x,-z)$$

шәклинә дүшүр вә $f(x,y)$ функсијасы (β) шәртини өдәдикдә $-f(x,-z)$ функсијасы (α) шәртини өдәјир. (γ) һалы $x=-t$ әвәзләмәси васитәсилә (α) һалына кәтирилир.

Теорем 7. *Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасы $R=\{x_0\leqslant x\leqslant x_0+a;\ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b\}$ дүзбучаглысында кәсилмәздир вә ихтијари ики (x,y_1), $(x,y_2)\in R$ нөгтәләри үчүн*

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)|(x-x_0) \leqslant |y_2-y_1| \tag{29}$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Онда (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә $[x_0,x_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар. Бурада

$$\alpha = \min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\quad M = \max_R|f(x,y)|.$$

Исбаты. Теоремин шәртләри дахилиндә һәллин варлығы Пеано теореминдән алыныр. Бу һәллин јеканәлијини исбат едәк.

Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә $[x_0,x_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунан $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ кими ики мүхтәлиф һәлли вар. Онда $(x_0,x_0+\alpha]$ јарыминтервалында тә'јин олунмуш

$$F(x) = \frac{y_2(x)-y_1(x)}{x-x_0} \tag{30}$$

функсијасы үчүн

$$\lim_{x\to x_0+0}F(x) = \lim_{x\to x_0+0}\frac{y_2(x)-y_1(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+0}[y_2'(x)-y_1'(x)] =$$

$$= \lim_{x\to x_0+0} [f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x))] = f(x_0, y_2(x_0)) - f(x_0, y_1(x_0)) =$$

$$= f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) = 0.$$

Демәли, $F(x_0)=0$ гәбул етсәк, $F(x)$ функсиjасы $[x_0, x_0+\alpha]$ парчасында кәсилмәз олар. Фәрзиjjәмизә әсасән $[x_0, x_0+\alpha]$ парчасында $F(x)$ функсиjасы сабит деjил (әкс һалда $F(x_0)=0$ шәртиндән алардыг ки, $F(x)\equiv 0$). Одур ки, $|F(x)|$ функсиjасы $[x_0, x_0+\alpha]$ парчасында өзүнүн ән бөjүк гиjмәтини алыр.

Тутаг ки, x' нөгтәси $[x_0, x_0+\alpha]$ парчасында x_0-дан сағда jерләшән биринчи нөгтәдир ки, һәмин нөгтәдә $|F(x)|$ өзүнүн ән бөjүк гиjмәтини алыр. Башга сөзлә десәк,

$$m = \max_{x_0\leqslant x\leqslant x_0+\alpha} |F(x)| = |F(x')| = \frac{|y_2(x') - y_1(x')|}{x'-x_0}.$$

Дикәр тәрәфдән, $y_1(x)$ вә $y_2(x)$ функсиjалары (1) тәнлиjинин (4) шәртини өдәjән һәлләри олдуғу үчүн (29) бәрабәрсизлиjинә әсасән

$$m = \frac{|y_2(x')-y_1(x')|}{x'-x_0} = \frac{1}{x'-x_0}\left|\int_{x_0}^{x'} [f(\xi, y_2(\xi)) - f(\xi, y_1(\xi))]\, d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x'-x_0}\int_{x_0}^{x'} \frac{|y_2(\xi)-y_1(\xi)|}{\xi-x_0}\, d\xi = \frac{1}{x'-x_0}\int_{x_0}^{x'} |F(\xi)|\, d\xi.$$

Ахырынчы интеграла орта гиjмәт теоремини тәтбиг етсәк

$$m \leqslant |F(x'')|, \quad x'' \in (x_0, x').$$

Дикәр тәрәфдән, $x''<x'$ олдуғундан, $|F(x'')|<m$ олмалыдыр. Алынан зиддиjjәт һәллин jеканәлиjини көстәрир.

Jеканәлиjә аид даһа бир теорем исбат едәк. Бунун үчүн әввәлчә көләчәкдә дә лазым олачаг бир лемманын исбатыны верәк.

Лемма (Гронуолл). *Тутаг ки, $[a,b]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәз олан $\omega(x)\geqslant 0$, $u(x)$, $h(x)$ функсиjалары үчүн*

$$u(x)\leqslant h(x) + \int_a^x \omega(t)u(t)\,dt, \quad a\leqslant x\leqslant b \qquad (31)$$

бәрабәрсизлиjи өдәнир. Онда

$$u(x) \leqslant h(x) + \int_a^x \omega(s)h(s)\exp\left(\int_s^x \omega(t)\,dt\right)ds, \quad a\leqslant x\leqslant b \qquad (32)$$

бәрабәрсизлиjи доғрудур.

Исбаты.

$$R(x) = \int_a^x \omega(s)u(s)\,ds$$

ишарә едәк. Онда $[a,b]$ парчасындан сонлу саjда нөгтәләр чыхмагла, $R'(x)=\omega(x)u(x)$ олар. Буну нәзәрә алараг (31) бәрабәрсизлиjинин һәр тәрәфини $\omega(x)$-ә вурсаг

$$R'(x) - \omega(x)R(x) \leqslant \omega(x)h(x).$$

Бу бәрабәрсизлиjин һәр тәрәфини $\exp\left(-\int_a^x \omega(t)\,dt\right)$-jә вуруб ону

$$\left(R(x)\exp\left(-\int_a^x\omega(t)\,dt\right)\right)' \leqslant \omega(x)h(x)\exp\left(-\int_a^x\omega(t)\,dt\right)$$

шәклиндә jазаг. Алынан бәрабәрсизлиjи $R(a)=0$ олдуғуну нәзәрә алараг, $[a, x]$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ парчасында интеграллаjаг:

$$R(x)\exp\left(-\int_a^x\omega(t)\,dt\right) \leqslant \int_a^x \omega(s)h(s)\exp\left(-\int_a^s\omega(t)\,dt\right)ds.$$

Бурадан алырыг ки,

$$R(x)\leqslant \exp\left(\int_a^x\omega(t)\,dt\right)\int_a^x\omega(s)h(s)\exp\left(-\int_a^s\omega(t)\,dt\right)ds =$$

$$= \int_a^x \omega(s)h(s)\exp\left(\int_s^x\omega(t)\,dt\right)ds.$$

Буну (31) бәрабәрсизлиjиндә jазсаг (32) бәрабәрсизлиjи алыныр.

Геjд 1. Тутаг ки, $h(x)$ функсиjасы азалмаjандыр. Онда $a\leqslant s\leqslant x$ үчүн $h(s)\leqslant h(x)$ олдуғундан

$$\int_a^x \omega(s)h(s)\exp\left(\int_s^x\omega(t)\,dt\right)ds \leqslant h(x)\int_a^x\omega(s)\exp\left(\int_s^x\omega(t)\,dt\right)ds =$$

$$= -h(x)\int_a^x \frac{d}{ds}\left[\exp\left(\int_s^x\omega(t)\,dt\right)\right]ds = -h(x) + h(x)\exp\left(\int_a^x\omega(t)\,dt\right)$$

олур. Буну (32) бәрабәрсизлиjиндә нәзәрә алсаг

$$u(x)\leqslant h(x)\exp\left(\int_a^x\omega(t)\,dt\right) \qquad (33)$$

бәрабәрсизлиjини алырыг. Бурадан да, хүсуси һалда $h(x)=A$, $\omega(x)=B>0$ олдугда алырыг ки,

$$u(x)\leqslant A\exp(B(x-a)).$$

Г е ј д 2. (32) бәрабәрсизлијиндән ајдындыр ки, $h(x)=0$ олдугда $u(x)\leqslant 0$ олур. Она көрә әввәлчәдән $u(x)\geqslant 0$ олдуғу мә'лум оларса, $u(x)=0$ алынар.

Теорем 8. *Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасы $R=\{x_0\leqslant x\leqslant x_0+a;\ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b\}$ дүзбучаглысында*

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant \omega(x)|y_2-y_1| \tag{34}$$

бәрабәрсизлијини өдәјир. Бурада $\omega(x)\geqslant 0$ функсијасы $[x_0,x_0+a]$ парчасында һиссә-һиссә кәсилмәздир. Онда (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән ән чоху бир һәлли вар.

И с б а т ы. Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә $[x_0,x_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунмуш ики мүхтәлиф $y=\varphi(x)$ вә $y=\psi(x)$ һәлләри вар. Онда $[x_0,x_0+\alpha]$ парчасында

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi,$$

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\psi(\xi))\,d\xi$$

ејниликләри өдәнир. Бурадан, (34) бәрабәрсизлијинә әсасән алырыг ки,

$$|\varphi(x)-\psi(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))]\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\varphi(\xi))|\,d\xi\leqslant\int_{x_0}^{x}\omega(\xi)|\varphi(\xi)-\psi(\xi)|\,d\xi.$$

Ајдындыр ки, $u(x)=|\varphi(x)-\psi(x)|$ ишарә етсәк ахырынчы бәрабәрсизлији

$$u(x)\leqslant\int_{x_0}^{x}\omega(\xi)u(\xi)\,d\xi$$

шәклиндә јаза биләрик. Бурадан, леммаја әсасән

$$u(x)\equiv 0$$

олдуғуну аларыг. Демәли, $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ олмалыдыр.

§ 7. АРДЫЧЫЛ ЈАХЫНЛАШМА ҮСУЛУ

Бу параграфда ардычыл јахынлашма үсулу илә

$$y'=f(x,y) \tag{1}$$

тәнлијинин

$$y(x_0)=y_0 \tag{4}$$

шәртини өдәјән һәллинин варлығы вә јеканәлији исбат олунур.

Теорем 9. *Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасы мәркәзи (x_0,y_0) нөгтәсиндә олан $R=\{x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a;\ y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b\}$ дүзбучаглысында кәсилмәздир вә y-ә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир:*

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leqslant K|y_2-y_1|. \tag{17}$$

Онда (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә $[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар; бурада

$$\alpha=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\ M=\max_{R}|f(x,y)|.$$

И с б а т ы. $[x_0-a,x_0+a]$ парчасында кәсилмәз вә графики R дүзбучаглысында јерләшән ихтијари $\varphi_0(x)$ функсијасы көтүрүб,

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_0(\xi))\,d\xi \tag{35_1}$$

дүстуру илә $\varphi_1(x)$ функсијасыны тә'јин едәк. Бу функсија $[x_0-a,x_0+a]$ парчасында тә'јин олунуб, кәсилмәздир вә $x\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ үчүн графики R дүзбучагласында јерләшир. Доғрудан да, $|f(x,y)|\leqslant M$ вә $\alpha\leqslant\frac{b}{M}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (35_1) дүстурундан алырыг ки,

$$|\varphi_1(x)-y_0|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_0(\xi))|\,d\xi\right|\leqslant M|x-x_0|\leqslant M\alpha\leqslant b.$$

Јухарыдакы гајда илә көстәрмәк олар ки,

$$\varphi_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_1(\xi))\,d\xi \tag{35_2}$$

дүстуру илә тә'јин олунан $\varphi_2(x)$ функсијасы $[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ парчасында кәсилмәздир вә графики R дүзбучаглысында јерләшир. Просеси бу гајда илә давам етдирмәклә,

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\,d\xi \tag{35_n}$$

рекурент дүстурлары илә тә'јин олунан $\{\varphi_n(x)\}$ функсијалар ардычыллығыны гурмуш оларыг. Ријази индуксија үсулу илә көстәрмәк олар ки, бу ардычыллығын һәр бир һәдди $[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунуб, кәсилмәздир вә графики (x_0,y_0) нөгтәсиндән кечмәклә R дүзбучаглысында јерләшир. Көстәрәк ки, $\{\varphi_n(x)\}$ функсијалар ардычыллығы $[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр.

$$\varphi_n(x)=\varphi_1(x)+[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]+\ldots+[\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)]$$

олдуғундан, $\{\varphi_n(x)\}$ функсиjалар ардычыллығынын $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында мүнтәзәм jығылдығыны көстәрмәк әвәзинә

$$\varphi_1(x)+[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]+\ldots+[\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)]+\ldots \quad (36)$$

функсионал сырасынын һәмин парчада мүнтәзәм jығылдығыны көстәрмәк кифаjәтдир.

Көстәрәк ки, (36) сырасы $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында мүнтәзәм jығылыр. Бунун үчүн (36) сырасынын мажорант сырасыны гураг. $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ функсиjалары $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында кәсилмәз олдугларындан мәһдуддурлар:

$$|\varphi_0(x)|\leqslant N,\ |\varphi_1(x)|\leqslant N,\ |\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\leqslant 2N.$$

Онда (17) шәртинә әсасән (35_1), (35_2) дүстурларындан алырыг ки, $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,\varphi_0(\xi))]\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,\varphi_0(\xi))|\,d\xi\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}K|\varphi_1(\xi)-\varphi_0(\xi)|\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2NK|x-x_0|.$$

Ejни гajда илә (17) шәртинә әсасән (35_3), (35_2) дүстурларындан аларыг ки,

$$|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)|\leqslant 2NK^2\frac{(x-x_0)^2}{2!},\ x\in[x_0-\alpha, x_0+\alpha].$$

Риjази индуксиjа үсулу илә көстәрмәк олар ки, $x\in[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ үчүн

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant 2NK^{n-1}\frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!},\ n=2,3,\ldots$$

олур. Ajдындыр ки, $\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)$, $n=1,2,\ldots$ фәргләри үчүн алдығымыз бәрабәрсизликләрдә $|x-x_0|\leqslant\alpha$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$N+2NK\alpha+2NK^2\frac{\alpha^2}{2!}+\ldots+2NK^{n-1}\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots \quad (37)$$

әдәди сырасы $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында (36) функсионал сырасынын мажоранты олар.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2NK^n\frac{\alpha^n}{n!}}{2NK^{n-1}\frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{K\alpha}{n}=0<1$$

олдуғундан, Даламбер әламәтинә көрә (37) сырасы jығылыр. Онда Веjерштрасс әламәтинә көрә алырыг ки, (36) функсионал сырасы еә демәли, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында мүнтәзәм jығылыр.

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$$

ишарә едәк. Онда $\varphi_n(x)$, $n=0,1,\ldots$ функсиjалары $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында кәсилмәз олдуғундан вә $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы мүнтәзәм jығылдығындан, $\varphi(x)$ функсиjасы һәмин парчада кәсилмәздир. Бу функсиjанын графики (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечмәклә R дүзбучаглысында jерләшир.

Ajдындыр ки, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы мүнтәзәм jығылдығындан, истәнилән $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә елә n_0 нөмрәси тапмаг олар ки, $n>n_0$ вә $x\in[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ үчүн $|\varphi_n(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ олсун. Дикәр тәрәфдән, (17) шәртинә әсасән $x\in[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ үчүн

$$\left|\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_n(\xi))\,d\xi-\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}K|\varphi_n(\xi)-\varphi(\xi)|\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant K\varepsilon|x-x_0|\leqslant K\alpha\varepsilon.$$

Бурадан алынык ки,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_n(\xi))\,d\xi=\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi.$$

Бу да интеграл алтында лимитә кечмәjин гануни олдуғуну көстәрир. Она көрә (35_n) дүстурунда n сонсузлуға jахынлашмаг шәртилә лимит кечсәк, аларыг:

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi. \quad (38)$$

Бу көстәрир ки, $\varphi(x)$ лимит функсиjасы (5) интеграл тәнлиjинин һәллидир. Еквивалентлиjә әсасән $\varphi(x)$ функсиjасы $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында (1) тәнлиjинин (4) шәртини өдәjән һәлли олур.

Һәллин jеканәлиjини исбат етмәк үчүн әксини фәрз едәк. Тутаг ки, (1) тәнлиjинин (4) шәртини өдәjән вә $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында тә'jин олунмуш $\psi(x)$ һәлли дә вар. Jә'ни (38) еjнилиjи илә бәрабәр $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\psi(\xi))\,d\xi \quad (39)$$

еjнилиjи өдәнир. Бу еjниликләрдән (17) шәртинә әсасән

$$|\varphi(x)-\psi(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))]\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi(\xi)-\psi(\xi)|\,d\xi\right|$$

бәрабәрсизлиіини аларыг. Мүәјјәнлик үчүн $x \in [x_0, x_0+\alpha]$ гәбул едәк. Алынан

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant K \int_{x_0}^{x} |\varphi(\xi) - \psi(\xi)| d\xi$$

бәрабәрсизлиіинә Гронуолл леммасыны тәтбиг етсәк, $\varphi(x) = \psi(x)$, $x \in [x_0, x_0+\alpha]$ олдуғуну аларыг. Ејни гајда илә $x \in [x_0 - \alpha, x_0]$ үчүн дә $\varphi(x) = \psi(x)$ олдуғуну көстәрмәк олар. Бунунла да теорем исбат олунду.

Гејд 1. Һәллин јеканәлијини ашағыдакы гајда илә дә исбат етмәк олар.

Көстәрәк ки, (35_n) рекурент дүстурлары илә тә'јин олунан $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында һәм дә $\psi(x)$ һәллинә мүнтәзәм јығылыр вә онда јығылан ардычыллығын лимитинин јеканәлијиндән алыначаг ки, $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. Доғрудан да, ($35_1$) вә (39) бәрабәрликләриндән, (17) шәртинә әсасән

$$|\varphi_1(x) - \psi(x)| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi_0(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))| d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi_0(\xi) - \psi(\xi)| d\xi\right|$$

бәрабәрсизлиіини алырыг. $|\varphi_0(x) - \psi(x)| \leqslant L$ гәбул етсәк, бурадан

$$|\varphi_1(x) - \psi(x)| \leqslant KL|x - x_0| \leqslant KL\alpha.$$

Ријази индуксија үсулу илә көстәрмәк олар ки, $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ үчүн

$$|\varphi_n(x) - \psi(x)| \leqslant LK^n \frac{|x-x_0|^n}{n!} \leqslant LK^n \frac{\alpha^n}{n!}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Бурада $u_n = LK^n \frac{\alpha^n}{n!}$ јығылан әдәди сыранын үмуми һәдди олдуғундан, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Она көрә ахырынчы бәрабәрсизликдән

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x) - \psi(x)| \leqslant 0$$

олдуғуну аларыг ки, бурадан да

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \psi(x).$$

Гејд 2. $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында $y = \varphi(x)$ һәллинин графикинин уч нөгтәләри R дүзбучаглысынын сәрһәдиндә јерләшмирсә, һәллин давамы һаггындакы теоремә әсасән ону R дүзбучаглысынын сәрһәдинә гәдәр давам етдирмәк олар.

Гејд 3. Ајдындыр ки, $\{\varphi_n(x)\}$ функсијалар ардычыллығы $\varphi_0(x)$ функсијасынын сечилмәсиндән асылыдыр, јә'ни $\varphi_0(x)$

функсијасыны бу хассәли башга функсија илә әвәз етсәк, алынан ардычыллыг, үмумијјәтлә, $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығындан фәргли олачагдыр. Лакин $\varphi_0(x)$ функсијасынын сечилмәсиндән асылы олмајараг гурулан бүтүн ардычыллыглар ејни бир лимитә јығылыр. Бу факт һәллин јеканәлијиндән алыныр. Бахылан тәнлијин һәлли јеканә олмадыгда исә буну демәк олмаз, чүнки ики мүхтәлиф сыфырынчы јахынлашма көтүрмәклә, ики мүхтәлиф ардычыллыг аларыг вә ола биләр ки, бу ардычыллығын һәр бири мүхтәлиф һәллә јығылсын.

Гејд 4. Теоремин исбатында $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ көтүрүлмәси $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ функсијаларынын графикләринин R дүзбучаглысында јерләшмәсини тә'мин етмәк үчүндүр вә $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығынын јығылмасында онун ролу јохдур. Она көрә дә $f(x, y)$ функсијасы $D = \{a \leqslant x \leqslant b; -\infty < y < +\infty\}$ золағында кәсилмәз вә y-ә нәзәрән ејни бир K сабити илә Липшис шәртини өдәјәрсә, һәр бир $x_0 \in [a, b]$ вә ихтијари y_0 үчүн (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән һәлли $[a, b]$ парчасында тә'јин олунар.

Мисал 1. $p(x), q(x)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында кәсилмәз исә

$$y' + p(x)y = q(x)$$

хәтти тәнлијинин D золағындан көтүрүлмүш һәр бир (x_0, y_0) нөгтәси үчүн $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәјән вә $[a, b]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар.

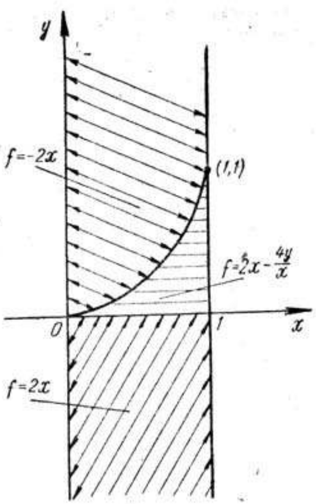
Мисал 2. $r(x), h(x)$ функсијалары $[a, b]$ парчасында кәсилмәз исә, $f(x, y) = r(x)\sin y + h(x)$ функсијасы D золағында кәсилмәздир вә y-ә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир. Она көрә дә истәнилән $(x_0, y_0) \in D$ үчүн

$$y' = r(x)\sin y + h(x) \tag{40}$$

тәнлијинин $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәјән, $[a, b]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар.

Гејд 5. Тутаг ки, $f(x, y)$ функсијасы xOy мүстәвисиндә кәсилмәздир вә һәр бир $a > 0$ әдәди үчүн $D_a = \{-a \leqslant x \leqslant a; -\infty < y < +\infty\}$ золағында y-ә нәзәрән Липшис шәртини јалныз a-дан асылы ола билән әмсалла өдәјир. Онда ихтијари (x_0, y_0) нөгтәси үчүн (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән һәлли бүтүн һәгиги охда тә'јин олунар. Буну көстәрмәк үчүн $y = \varphi(x)$ илә (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә (α, β) интервалында тә'јин олунмуш даваметдирилмәјән һәллини ишарә едәк. Көстәрәк ки, $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$.

Доғрудан да, β сонлу олса, $a > \beta$ шәртини өдәјән елә a әдәди тапмаг олар ки, $(x_0, y_0) \in D_a$ олар. Онда 4-чү гејдә әсасән $y = \varphi(x)$ һәлли $[-a, a]$ парчасында тә'јин олунар. Бу исә $y = \varphi(x)$ һәллинин даваметдирилмәјән һәлл олмасына зиддир. Ејни гајда илә α-нын сонлу олдуғу һалы арашдырмаг олар.



Шәкил 9.

Мисал 3. 2-чи мисалда $r(x), h(x)$ функсијалары һәгиги охда кәсилмәз олдугда, $r(x)\sin y + h(x)$ функсијасы истәнилән a әдәди үчүн D_a золағында у-ә нәзәрән Липшис шәртини өдәдијиндән һәр бир (x_0, y_0) нөгтәси үчүн (40) тәнлијинин $y(x_0) = y_0$ шәртини өдәјән һәлли бүтүн һәгиги охда тә'јин олунур.

Мисал 4. $y' = y^2e^x - 2y$ тәнлијинә бахаг. $f(x,y)=y^2e^x-2y$ функсијасы xOy мүстәвисиндә кәсилмәздир, лакин D_a золағында у-ә нәзәрән ејни әмсалла Липшис шәртини өдәмир. Тәнлијин $y(0)=1$ шәртини өдәјән $y=e^{-x}$ һәлли бүтүн һәгиги охда тә'јин олунуб, $y(1) = \frac{1}{e-e^2}$ шәртини өдәјән $y = \frac{1}{e^x-e^{2x}}$ һәлли исә $(0, +\infty)$ интервалында тә'јин олунмуш давамәтдирилмәјән һәллдир.

Гејд 6. Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасы R дүзбучаглысында кәсилмәздир вә (1), (4) мәсәләсинин $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунмуш һәлли јеканәдир. Онда, Пеано теореминдән алынан нәтиҹәјә әсасән Ејләр сыныг хәтләр ардычыллығы мүнтәзәм олараг һәмин һәллә јығылыр. Лакин бу заман (35_n) дүстурлары илә тә'јин олунан $\{\varphi_n(x)\}$ функсијалар ардычыллығы һәллә јығылмаја да биләр. Демәли, теоремдәки Липшис шәртини јеканәлик шәртилә әвәз етмәк олмаз. Буну ашағыдакы мисал илә көстәрмәк олар.

Мисал 5. $y' = f(x, y)$ тәнлијинә бахаг; бурада

$$f(x,y)=\begin{cases} 0, & x=0,\ -\infty<y<+\infty, \\ 2x, & 0<x\leqslant 1,\ -\infty<y<0, \\ 2x-\frac{4y}{x}, & 0<x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x^2, \\ -2x, & 0<x\leqslant 1,\ x^2<y<+\infty \end{cases}$$

шәклиндә тә'јин олунур. Ајдындыр ки, $f(x,y)$ функсијасы $D=\{0\leqslant x\leqslant 1;\ -\infty<y<+\infty\}$ золағында кәсилмәз вә мәһдуддур, лакин у-ә нәзәрән Липшис шәртини өдәмир (шәкил 9). Һәр бир $x\in[0,1]$ үчүн $f(x,y)$ функсијасы у-ә нәзә-

рән артмајан олдуғундан, Пеано теореминә вә 5-чи теоремә әсасән бу тәнлијин $y(0)=0$ шәртини өдәјән вә мүәјјән $[0,\alpha]$ $(\alpha\leqslant 1)$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар. $\varphi_0(x)=0$ көтүрүб

$$\varphi_n(x)=\int_0^x f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\,d\xi,\quad n=1,2,\ldots$$

рекурент дүстурлары илә ардычыл јахынлашмалары гураг:

$$\varphi_1(x)=\int_0^x\left(2\xi-\frac{4}{\xi}\cdot 0\right)d\xi=2\int_0^x\xi\,d\xi=x^2,$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x\left(2\xi-\frac{4}{\xi}\cdot\varphi_1(\xi)\right)d\xi=\int_0^x\left(2\xi-\frac{4}{\xi}\cdot\xi^2\right)d\xi=$$

$$=-\int_0^x 2\xi\,d\xi=-x^2,$$

$$\varphi_3(x)=\int_0^x 2\xi\,d\xi=x^2,$$

$$\varphi_4(x)=\int_0^x\left(2\xi-\frac{4\varphi_3(\xi)}{\xi}\right)d\xi=-2\int_0^x\xi\,d\xi=-x^2.$$

. . . .

Ријази индуксија үсулу илә көстәрмәк олар ки,

$$\varphi_n(x)=(-1)^{n+1}x^2,\quad n=1,2,\ldots$$

Бурадан ајдындыр ки, $x\neq 0$ үчүн бу ардычыллыг јығылмыр. Бу ардычыллығын јығылан ики $\{\varphi_{2n-1}(x)\}$, $\{\varphi_{2n}(x)\}$ алтардычыллыглары да һәллә јығылмыр, чүнки,

$$y_1(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{2n-1}(x)=x^2,$$

$$y_2(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{2n}(x)=-x^2$$

вә $y_1=x^2$, $y_2=-x^2$ функсијаларынын һеч бири тәнлијин һәлли дејил.

Гејд 7. Теоремин исбатында $\varphi_0(x)=y_0$ көтүрәк вә дәгиг һәлл илә n-чи јахынлашманын фәргини гијмәтләндирәк. Липшис шәртини нәзәрә алсаг, (35_n) вә (38) бәрабәрликләриндән

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant K\left|\int_{x_0}^x|\varphi_{n-1}(s)-\varphi(s)|\,ds\right|.$$

Дикәр тәрәфдән, $x\in[x_0-\alpha,\ x_0+\alpha]$ үчүн $|\varphi(x)-y_0|\leq M_0$ олдуғундан, сонунчу бәрабәрсизликдән ријази индуксија илә аларыг ки, $x\in[x_0-\alpha,\ x_0+\alpha]$ олдугда

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leq MK^n\frac{\alpha^{n+1}}{n!},\quad n=0,\ 1,\ 2,\dots \qquad (41)$$

Алынан бәрабәрсизлик көстәрир ки, n-и кифајәт гәдәр бөјүк көтүрмәклә ардычыл јахынлашмаларла һәллә истәнилән дәгигликлә јахынлашмаг олар.

Мисал 6. $y'=y+x^2$ тәнлијинин $y(0)=0$ шәртини өдәјән һәлли үчүн $\varphi_0(x)=0$ көтүрәрәк $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ ардычыл јахынлашмаларыны гураг:

$$\varphi_1(x)=\int_0^x s^2ds=2\frac{x^3}{3!},\quad \varphi_2(x)=\int_0^x\left(s^2+2\cdot\frac{s^3}{3!}\right)ds=2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right),$$

$$\varphi_3(x)=\int_0^x\left[s^2+2\left(\frac{s^3}{3!}+\frac{s^4}{4!}\right)\right]ds=2\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\right).$$

Инди $\varphi_3(x)$ јахынлашмасы илә $\varphi(x)$ дәгиг һәлли арасындакы фәрги $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ парчасында гијмәтләндирәк. Бунун үчүн $R=\{0\leq x\leq 1;\ -1\leq y\leq 1\}$ көтүрәк. Онда $M=2,\ K=1,\ \alpha=\frac{1}{2}$. Бунлары (41) бәрабәрсизлијиндә нәзәрә алсаг, $x\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ үчүн

$$|\varphi_3(x)-\varphi(x)|\leq 2\cdot 1\cdot\frac{1}{3!\,2^4}=\frac{1}{48}\approx 0{,}0209.$$

Бахылан мәсәләнин һәлли $\varphi(x)=2e^x-x^2-2x-2$ олдуғундан, $|\varphi_3(x)-\varphi(x)|$ фәргини даһа дәгиг олан

$$|\varphi_3(x)-\varphi(x)|\leq 2\cdot\frac{x^6}{6!}\left[1+\frac{x}{7}+\left(\frac{x}{7}\right)^2+\cdots\right]\leq\frac{14}{6!\,416}=0{,}00005$$

шәклиндә гијмәтләндирмәк олар.

§ 8. СЫХЫЛМЫШ ИН'ИКАС ПРИНСИПИ

Ардычыл јахынлашмалар үсулу анчаг ади диференсиал тәнликләрин һәлләринин варлығы вә јеканәлији мәсәләләринә дејил, һәм дә ријазијјатын бир чох мәсәләләринә тәтбиг олунур. Она көрә ардычыл јахынлашмаларын јығылмасыны тә'мин едә биләчәк үмуми шәртләрин тапылмасы мәсәләси мејдана чыхыр. Белә шәртләр мә'лум олдугда верилмиш мәсәләнин һәллинә ардычыл јахынлашмалар үсулунун тәтбиг олунмасы үчүн һәмин шәртләрин өдәндијини јохламаг кифа-

јәтдир. Бу чүр верилмә гајдаларындан бири сыхылмыш ин'икас принсипи адланан үсулдур.

а) *Сыхылмыш ин'икас принсипи.* Тутаг ки, истәнилән тәбиәтли бош олмајан ики Φ, Ψ чохлуглары верилмишдир вә мүәјјән ганун илә һәр бир $\varphi\in\Phi$ елементинә мүәјјән бир $\psi\in\Psi$ елементи гаршы гојулур. Бу заман дејирләр ки, Φ чохлуғундан Ψ чохлуғуна тә'сир едән $\psi=A(\varphi)$ *оператору* верилмишдир. Әкәр $\Phi=\Psi$ оларса, A оператору Φ чохлуғунда тә'сир едәр. Хүсуси һалда Φ, Ψ чохлуглары олараг бүтүн функсијалары мүәјјән X чохлугунда тә'јин олунан $\Phi=\{\varphi(x)\}$, $\Psi=\{\psi(x)\}$ функсијалар чохлуғуну көтүрмәк олар.

Теорем 10 *(Сыхылмыш ин'икас принсипи). Тутаг ки, бүтүн функсијалары мүәјјән X чохлуғунда тә'јин олунан бош олмајан $\Phi=\{\varphi(x)\}$ функсијалар чохлуғу вә бу чохлугда тә'сир едән A оператору үчүн ашағыдакы шәртләр өдәнир:*

1. Φ чохлуғунун һәр бир функсијасы X чохлуғунда мәһдуддур, јә'ни һәр бир $\varphi(x)\in\Phi$ үчүн елә M_φ әдәди вар ки, $|\varphi(x)|\leq M_\varphi$, $x\in X$ олур;

2. Φ чохлуғунун һәр бир мүнтәзәм јығылан ардычыллығынын лимити дә бу чохлуға дахилдир;

3. Истәнилән $\varphi(x)$, $\psi(x)\in\Phi$ үчүн

$$|A(\varphi(x))-A(\psi(x))|\leq m\sup_X|\varphi(x)-\psi(x)| \qquad (42)$$

бәрабәрсизлији өдәнир, белә ки, $0\leq m<1$. Онда

$$\varphi(x)=A(\varphi(x)) \qquad (43)$$

оператор тәнлијинин Φ чохлуғунда јеканә һәлли вар вә бу һәлли ардычыл јахынлашмаларын мүнтәзәм лимити кими тапмаг олар.

Бә'зән (42) шәрти өдәндикдә A операторуна Φ чохлуғунда *сыхан оператор*, (43) тәнлијинин һәллинә исә онун *тәрпәнмәз нөгтәси* дејилир.

Исбаты. Φ аиләсиндән һәр һансы $\varphi_0(x)$ функсијасы көтүрүб, $\varphi_1(x)=A(\varphi_0(x))$ дүстуру илә $\varphi_1(x)$ функсијасыны тә'јин едәк. Онда $\varphi_1(x)\in\Phi$ олар. $\varphi_2(x)=A(\varphi_1(x))$ дүстуру илә $\varphi_2(x)$ функсијасыны тә'јин едәк. Просеси бу гајда илә давам етдирсәк

$$\varphi_n(x)=A(\varphi_{n-1}(x)),\quad n=1,\ 2,\ \dots \qquad (44)$$

рекурент дүстурлары илә тә'јин олунмуш $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығыны аларыг. Бу ардычыллығын X чохлуғунда мүнтәзәм јығылан олдуғуну көстәрмәк үчүн

$$\varphi_0(x)+(\varphi_1(x)-\varphi_0(x))+(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))+\cdots \qquad (45)$$

сырасына бахаг. Теоремин 1-чи шәртинә көрә $x\in X$ үчүн

$|\varphi_0(x)| \leqslant M_{\varphi_0}$, $|\varphi_1(x)| \leqslant M_{\varphi_1}$ вә $|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| \leqslant M_{\varphi_0} + M_{\varphi_1} = M$. Дикәр тәрәфдән, $\varphi_n(x) = A(\varphi_{n-1}(x))$ вә $\varphi_{n-1}(x) = A(\varphi_{n-2}(x))$ олдуғундан, (42) шәртинә әсасән

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| = |A(\varphi_{n-1}(x)) - A(\varphi_{n-2}(x))| \leqslant$$
$$\leqslant m \sup_X |\varphi_{n-1}(x) - \varphi_{n-2}(x)|$$

олур. Бурадан $n = 2$ үчүн

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leqslant Mm$$

аларыг. Ријази индуксија үсулу илә исбат етмәк олар ки,

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leqslant Mm^{n-1}, \ n = 1, 2, \dots .$$

Бурадан алыныр ки, јығылан

$$M + Mm + Mm^2 + \cdots$$

әдәди сырасы X чохлуғунда (45) функсионал сырасынын мажорантыдыр. Она көрә дә Вејерштрасс әламәтинә әсасән (45) функсионал сырасы вә демәли, һәм дә $\{\varphi_n(x)\}$ ардычыллығы X чохлуғунда мүнтәзәм јығылыр. Онун лимитини $\varphi^*(x)$ илә ишарә едәк. Теоремин икинчи шәртинә әсасән $\varphi^*(x) \in \Phi$ олур. Одур ки,

$$|A(\varphi^*(x)) - A(\varphi_n(x))| \leqslant m \sup_X |\varphi^*(x) - \varphi_n(x)|$$

бәрабәрсизлијиндә n сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк,

$$\lim_{n\to\infty} A(\varphi_n(x)) = A(\varphi^*(x))$$

мүнасибәтини аларыг. Буну нәзәрә алараг (44) бәрабәрлијиндә n сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк

$$\varphi^*(x) = A(\varphi^*(x))$$

олар. Бу исә көстәрир ки, $\varphi^*(x)$ функсијасы (43) оператор тәнлијинин һәллидир.

Һәллин јеканәлијини көстәрәк. Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, (43) тәнлијинин $\varphi^*(x)$ һәллиндән башга $\psi^*(x)$ һәлли дә вар: $\psi^*(x) = A(\psi^*(x))$. Онда (42) шәртинә әсасән

$$|\varphi^*(x) - \psi^*(x)| = |A(\varphi^*(x)) - A(\psi^*(x))| \leqslant$$
$$\leqslant m \sup_X |\varphi^*(x) - \psi^*(x)|.$$

Бурадан

$$\sup_X |\varphi^*(x) - \psi^*(x)| \leqslant m \sup_X |\varphi^*(x) - \psi^*(x)|$$

бәрабәрсизлији алынар. Әкәр $\sup_X |\varphi^*(x) - \psi^*(x)| > 0$ оларса, бу бәрабәрсизликдән аларыг ки, $m \geqslant 1$. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, һәлл јеканәдир.

Нәтичә 1. *Теоремин шәртләрини өдәјән A оператору кәсилмәздир, jә'ни Φ аиләсиндән олан вә $\psi(x) \in \Phi$ функсијасына мүнтәзәм јығылан ихтијари $\{\psi_n(x)\}$ ардычыллығы үчүн $\lim_{n\to\infty} A(\psi_n(x)) = A(\psi(x))$.*

Бу тәклифин доғрулуғу, теоремин 3-чү шәртинә әсасән алынан

$$|A(\psi_n(x)) - A(\psi(x))| \leqslant m \sup_X |\psi_n(x) - \psi(x)|$$

бәрабәрсизлијиндә лимитә кечмәклә алыныр.

Гејд едәк ки, $\varphi_2(x) = A(\varphi_1(x))$ вә $\varphi_1(x) = A(\varphi_0(x))$ бәрабәрликләриндән алыныр ки, $\varphi_2(x) = A(A(\varphi_0(x)))$. Бурада $A^2(\varphi_0(x)) = A(A(\varphi_0(x)))$ ишарә едәк. A^2 операторуна A операторунун *икинчи итерасијасы* дејилир. Ујғун гајда илә, $A^l(\varphi_0(x)) = A(A^{l-1}(\varphi_0(x)),\ l = 2, 3, \dots$ бәрабәрлији илә тә'јин олунан A^lоператоруна A операторунун l-чи итерасијасы дејилир.

Нәтичә 2 (*Үмумиләшмиш сыхылмыш ин'икас принсипи*). *Тутаг ки, $\Phi = \{\varphi(x)\}$ чохлуғу вә бу чохлуғда тә'сир едән кәсилмәз A операторунун мүәјјән A^l $(l \geqslant 1)$ итерасијасы үчүн 10-чу теоремин шәртләри өдәнир. Онда (43) тәнлијинин Φ чохлуғунда јеканә һәлли вар.*

Исбаты. Бу һалда (42) шәрти

$$|A^l(\varphi(x)) - A^l(\psi(x))| \leqslant m \sup_X |\varphi(x) - \psi(x)|, \quad 0 \leqslant m < 1 \qquad (46)$$

шәрти илә әвәз олунур. Она көрә дә $B = A^l$ ишарә етсәк, сыхылмыш ин'икас принсипинә әсасән Φ чохлуғунда

$$\varphi(x) = B(\varphi(x)) \qquad (47)$$

тәнлијинин јеканә $\psi^*(x)$ һәлли вар вә бу һәлли $\psi_1(x) = B(\psi_0(x)),\ \psi_2(x) = B(\psi_1(x)) = B^2(\psi_0(x)), \dots,\ \psi_k(x) = B(\psi_{k-1}(x)) = B^k(\psi_0(x)), \dots$

ардычыллығынын мүнтәзәм лимити кими тапмаг олар; бурада $\psi_0(x)$ функсијасы Φ аиләсиндән көтүрүлмүш ихтијари функсијадыр. Демәли,

$$\psi^*(x) = \lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = \lim_{k\to\infty} B^k(\psi_0(x)).$$

Бурадан, A оператору кәсилмәз олдуғундан

$$A(\psi^*(x)) = A(\lim_{k\to\infty} B^k(\psi_0(x))) = \lim_{k\to\infty} A(B^k(\psi_0(x))) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} B^k(A(\psi_0(x)))$$

олур. Дикәр тәрәфдән, (46) шәртинә әсасән

$$|B^k(A(\psi_0(x))) - B^k(\psi_0(x))| \leqslant m \sup_X |B^{k-1}(A(\psi_0(x))) -$$

$$- B^{\kappa-1}(\psi_0(x))| \leqslant \cdot \cdot \leqslant m^{\kappa} \sup_X |A(\psi_0(x)) - \psi_0(x)|.$$

Бу бәрабәрсизликдә κ сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк, $A(\psi^*(x)) = \lim_{\kappa\to\infty} B^{\kappa}(A(\psi_0(x)))$ вә $\psi^*(x) = \lim_{\kappa\to\infty} B^{\kappa}(\psi_0(x))$ олдуғундан $|A(\psi^*(x)) - \psi^*(x)| = \lim_{\kappa\to\infty} |B^{\kappa}A(\psi_0(x))) - B^{\kappa}(\psi_0(x))| = 0$ олур. Демәли,

$$\psi^*(x) = A(\psi^*(x)).$$

Бу исә көстәрир ки, $\psi^*(x)$ функсијасы (43) тәнлијинин һәллидир.

Фәрз едәк ки, $\psi(x)$ функсијасы (43) тәнлијинин $\psi^*(x)$ һәллиндән фәргли һәллидир. Онда $\psi(x)$ функсијасы һәм дә (47) тәнлијинин һәлли олар. Доғрудан да, $\psi(x) = A(\psi(x))$ олдуғундан $A(\psi(x)) = A(A(\psi(x))) = A^2(\psi(x))$ вә демәли, $\psi(x) = A^2(\psi(x)) = \cdots = A^l(\psi(x))$ олар. Бурадан $\psi(x) = A^l(\psi(x))$ аларыг. Бу исә о демәкдир ки, $\psi(x)$ функсијасы (47) тәнлијинин һәллидир. Бу тәнлијин һәллинин јеканәлијинә әсасән $\psi(x) = \psi^*(x)$ олмалыдыр. Беләликлә нәтичә исбат олунду.

б) *Сыхылмыш ин'икас принсипинин интеграл тәнлијин һәллинин варлығы мәсәләсинә тәтбиги.* Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында, $K(x, s)$ функсијасы исә $R = \{a \leqslant x \leqslant b;\ a \leqslant s \leqslant b\}$ квадратында кәсилмәздир вә $M = \sup_R |K(x, s)|$. Онда λ параметринин $|\lambda| M(b-a) < 1$ шәртини өдәјән гијмәтләри үчүн

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\, ds$$

интеграл тәнлијинин $[a, b]$ парчасында јеканә кәсилмәз һәлли вар. Бу мәсәләнин һәллинә сыхылмыш ин'икас принсипини тәтбиг етмәк үчүн X чохлуғу олараг $[a, b]$ парчасыны, Φ чохлуғу олараг $[a, b]$ парчасында кәсилмәз олан функсијалар синфи $C[a, b]$-ни көтүрәк вә A операторуну

$$A(\varphi(x)) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\, ds$$

дүстуру илә тә'јин едәк.

Көстәрәк ки, $C[a, b]$ чохлуғу вә A оператору үчүн сыхылмыш ин'икас принсипинин шәртләри өдәнир. Доғрудан да, ријази анализ курсундан мә'лумдур ки, $[a, b]$ парчасында кәсилмәз функсија мәһдуддур вә бу парчада мүнтәзәм јығылан кәсилмәз функсијалар ардычыллығынын лимити дә кәсилмәздир. Дикәр тәрәфдән, $C[a, b]$ чохлуғундан көтүрүлмүш $\varphi(x)$ вә $\psi(x)$ функсијалары үчүн

$$|A(\varphi(x)) - A(\psi(x))| = |\lambda \int_a^b K(x, s)[\varphi(s) - \psi(s)]\, ds| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| M \int_a^b |\varphi(s) - \psi(s)|\, ds \leqslant |\lambda| M(b-a) \sup_{a\leqslant x\leqslant b} |\varphi(s) - \psi(s)|.$$

Бурада $m = |\lambda| M(b-a) < 1$ олдуғуну нәзәрә алсаг, ајдындыр ки, сыхылмыш ин'икас принсипинин бүтүн шәртләри өдәнир.

Беләликлә, $\varphi(x) = A(\varphi(x))$ тәнлијинин $C[a, b]$ чохлуғунда јеканә $\varphi^*(x)$ һәлли вар.

в) *Үмумиләшмиш сыхылмыш ин'икас принсипинин Коши мәсәләсинин һәллинә тәтбиги.* Јухарыда исбат олунан Пикар теоремини үмумиләшмиш сыхылмыш ин'икас принсипи илә исбат едәк. Бунун үчүн X чохлуғу олараг $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ парчасыны, Φ чохлуғу олараг $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ парчасында кәсилмәз олмагла $\sup|\varphi(x) - y_0| \leqslant b$ шәртини өдәјән $\{\varphi(x)\}$ функсијалар чохлуғуну көтүрәк вә A операторуну

$$A(\varphi(x)) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi))\, d\xi$$

дүстуру илә тә'јин едәк.

Истәнилән $\varphi(x) \in \Phi$ үчүн

$$|A(\varphi(x)) - y_0| \leqslant |\int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi(\xi))|\, d\xi| \leqslant M|x - x_0| \leqslant M\alpha \leqslant b$$

олдуғундан, бурадан аларыг ки, A оператору Φ чохлуғунда тә'сир едир.

Тутаг ки, $\varphi(x), \psi(x) \in \Phi$. Онда Липшис шәртинә әсасән

$$|A(\varphi(x)) - A(\psi(x))| = |\int_{x_0}^{x} [f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))]\, d\xi| \leqslant$$

$$\leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi(\xi) - \psi(\xi)|\, d\xi \right| \leqslant K|x - x_0| \sup_X |\varphi(\xi) - \psi(\xi)|$$

олур. Бурадан

$$|A^2(\varphi(x)) - A^2(\psi(x))| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, A(\varphi(\xi))) - f(\xi, A(\psi(\xi)))]\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} |A(\varphi(\xi)) - A(\psi(\xi))|\, d\xi \right| \leqslant K^2 \left(\left| \int_{x_0}^{x} |\xi - x_0|\, d\xi \right| \sup_X |\varphi(\xi) - \psi(\xi)| = K^2 \frac{|x - x_0|^2}{2!} \sup_X |\varphi(\xi) - \psi(\xi)|.$$

Бу гајданы n дәфә тәкрар етмәклә аларыг ки,

$$|A^n(\varphi(x)) - A^n(\psi(x))| \leqslant \frac{K^n |x - x_0|^n}{n!} \sup_X |\varphi(\xi) - \psi(\xi)|.$$

Бурада $|x - x_0| \leqslant \alpha$ олдуғундан, кифајәт гәдәр бөјүк n әдәди үчүн $\frac{K^n \alpha^n}{n!} < 1$ олар. Демәли, A операторунун белә шәрти өдәјән n-ләр үчүн n-чи итерасијасы Ф чохлуғу илә бирликдә сыхылмыш ин'икас принсипинин шәртләрини өдәјир. Она көрә Ф чохлуғунда $\varphi(x) = A(\varphi(x))$ тәнлијинин јеканә $\varphi^*(x)$ һәлли вар, јә'ни $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ парчасында

$$\varphi^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi^*(\xi))\, d\xi$$

ејнилији өдәнир. Бу исә көстәрир ки, $y = \varphi^*(x)$ функсијасы (1) тәнлијинин (4) шәртини өдәјән вә $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ парчасында тә'јин олунмуш һәллидир.

§ 9. ҺӘЛЛИН ҺАМАРЛЫҒЫ ҺАГГЫНДА

Тутаг ки, D областында

$$y' = f(x,y) \qquad (1)$$

тәнлији верилмишдир.

Бу тәнлијин һәлләринин һамарлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 11. *Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасынын D областында x, y дәјишәнләринә нәзәрән $p\ (p \geqslant 0)$ тәртибә гәдәр кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар (p-чи тәртиб дә дахил олмагла). Онда (1) тәнлијинин истәнилән һәллинин, тә'јин олундуғу интервалда $p+1$ тәртибдән кәсилмәз төрәмәси вар ($p = 0$ тәртибли төрәмә дедикдә функсијанын өзү баша дүшүлүр).*

Исбаты. Тутаг ки, $y = \varphi(x)$ функсијасы (1) тәнлијинин (a, b) интервалында тә'јин олунмуш һәр һансы һәллидир:

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)),\ x \in (a,b). \qquad (48)$$

Бурадан алыныр ки, $\varphi(x)$ функсијасы (a,b) интервалында кәсилмәздир. $\varphi(x)$ вә $f(x,y)$ функсијаларынын кәсилмәзлијиндән вә (48) ејнилијиндән $\varphi'(x)$-ин кәсилмәзлији алыныр. Тутаг ки, $p=1$. Онда (48) ејнилијинин сағ тәрәфинин мүрәккәб функсија кими кәсилмәз төрәмәси вар вә демәли, сол тәрәфинин дә x-ә нәзәрән кәсилмәз төрәмәси олмалыдыр. Бурадан алырыг ки, $\varphi(x)$ һәллинин 2-чи тәртиб кәсилмәз төрәмәси вар вә бу төрәмә

$$\varphi''(x) = f_x(x,\varphi(x)) + f_y(x,\varphi(x))\,\varphi'(x) \qquad (49)$$

дүстуру илә һесабланыр.

Тутаг ки, $p=2$. Онда јухарыда апарылан мүһакимәни (49) ејнилији үчүн тәкрар едәрәк, $\varphi(x)$ һәллинин үчүнчү тәртиб кәсилмәз төрәмәсинин олдуғуну аларыг. Мүһакимәни бу гајда илә истәнилән p әдәди үчүн тәкрар етмәк олар.

Гејд 8. Теоремдәки шәрт һәллин кәсилмәз диференсиалланан олмасы үчүн анчаг кафи шәртдир. Елә тәнликләр гурмаг олар ки, бу тәнликдә $f(x,y)$ функсијасы нәинки диференсиалланан дејил, һәтта бә'зи нөгтәләрдә тә'јин олунмајыб, анчаг тәнлијин һәр бир һәллинин истәнилән тәртибдән төрәмәси вар. Буну көстәрмәк үчүн ашағыдакы мисаллара бахаг.

1. $y' = \sec x - y\,\mathrm{tg}\,x$ тәнлији xOy мүстәвисинин $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -1\right)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ нөгтәләрини чыхмагла алынан областда верилир. Доғрудан да, бу гајда илә алынан областын һәр бир нөгтәсинин әтрафында ја $f(x,y) = \sec x - y\,\mathrm{tg}\,x$ функсијасы, јахуд да $\frac{1}{f(x,y)}$ функсијасы кәсилмәздир. Көстәрилән нөгтәләрдә исә һәмин функсијалар $\frac{0}{0}$ шәкилли гејри-мүәјјәнлијә чеврилир вә көстәрмәк олар ки,

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,1\right)} f(x,y) = 0, \quad \lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi,-1\right)} f(x,y) = 0.$$

Бурадан ајдындыр ки, көстәрилән нөгтәләрдә $f(x,y)$ функсијасынын гијмәтини сыфыр көтүрмәклә тәнлијә бүтүн xOy мүстәвисиндә бахмаг олар.

Тәнлијин үмуми һәлли

$$y = \sin x + c\cos x$$

олур. Бу һәлләр бүтүн һәгиги охда тә'јин олунуб вә истәнилән тәртибдән кәсилмәз төрәмәләри вар.

2. $y' = 4x\sqrt{y}$ тәнлијиндә сағ тәрәфдәки, $f(x,y) = 4x\sqrt{y}$ функсијасы $D\{-\infty < x < +\infty;\ y \geqslant 0\}$ јарыммүстәвисиндә кәсилмәздир, лакин $y=0$ хәтти бојунча y-ә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәси јохдур. Тәнлијин һәлләри $y = (x^2 - c)^2$, $(x^2 \geqslant c)$, $y = 0$ шәклиндәдирләр вә ајдындыр ки, бу һәлләрин истәнилән тәртибдән төрәмәләри вар.

Чалышмалар

1. [0,1] парчасыны 10 бәрабәр һиссәјә бөләрәк $y' = x - y$ тәнлијинин $y(0) = 0$ шәртини өдәјән һәлли үчүн Ејләр сыныг хәттини гурун. Алынан сыныг хәттин $x = 0{,}55$ нөгтәсиндә гијмәтини һесаблајын.
2. 1-чи мәсәләдә верилмиш тәнлијин $y(0) = 0$ шәртини өдәјән һәллини гурун вә $n = 10$ көтүрмәклә гурулмуш Ејләр сыныг хәтти илә һәмин һәллин бөлкү нөгтәләриндәки гијмәтләрини мүгајисә един.
3. Сонлу $[a, b]$ парчасында ејни дәрәчәдән кәсилмәз вә пар-

чанын бир нөгтәсиндә мәһдуд олан функсијалар аиләсинин мүнтәзәм мәһдуд олдуғуну исбат един.

4. $\{e^{-nx^2}\}$ аиләсинин $[-1,1]$ парчасында ејни дәрәчәдән кәсилмәз олмадығыны исбат един.

5. $\left\{\frac{x^n \cos nx}{n}\right\}$ аиләсинин $[-1,1]$ парчасында Арсела теореминин шәртләрини өдәдијини кестәрин.

6. Ашағыдакы теореми исбат един:

Тутаг ки, $f(x,y)$ функсијасы $D=\{x_0 \leqslant x < +\infty; -\infty < y < +\infty\}$ чохлуғунда кәсилмәздир вә $|f(x,y)| \leqslant k(|y|)$, белә ки, $\int_0^{+\infty} \frac{dz}{k(z)} = +\infty$. Онда $y' = f(x,y)$ тәнлијинин истәнилән y_0 үчүн $y(x_0)=y_0$ шәртини өдәјән һәлли $[x_0, +\infty)$ јарымохунда тә'јин олунмушдур.

Көстәриш. Көстәрмәли ки, $y(x_0)=y_0$ шәртини өдәјән һәр һансы $y=y(x)$ һәлли јалныз сонлу $[x_0, \bar{x})$ јарыминтервалында тә'јин олунмушса, $\lim\limits_{x\to\bar{x}-0} |y(x)| = +\infty$ олмалыдыр. Теоремин шәртинә әсасән $dx \geqslant \frac{|dy|}{k(|y|)}$. Бурадан алынан $\bar{x} - x_0 \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{dz}{k(z)} = +\infty$ бәрабәрсизлији зиддијјәт верир.

7. Ашағыдакы тәнликләрин һәлләринин варлыг вә јеканәлик областларыны тапын:

а) $y' = y - \sqrt{y^2 - x^2}$; в) $y' = |y-x|^\alpha + 1$;

б) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$; г) $y' = 2x + 1 + \sqrt[3]{y - x^2 - x}$.

8. Ашағыдакы мисалларда верилән парчаларда $n=3$, $\varphi_0(x) = y(0)$ гәбул едәрәк $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ Тонелли јахынлашмаларыны гурун:

а) $y' = 3x + y + 1$, $y(0) = 0$; $[0,2]$;

б) $y' = xy^2$, $y(0) = 1$, $[0,1]$.

9. Ашағыдакы мисалларда, верилмиш сыфырынчы јахынлашмалара әсасән, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ ардычыл јахынлашмаларыны гурун:

а) $y' = 3x + y + 1$, $y(0) = 1$, $\varphi_0(x) = x$;

б) $y' = x^2 + xy$, $y(1) = 0$, $\varphi_0(x) = 1$;

в) $y' = y + e^x$, $y(0) = 0$, $\varphi_0(x) = 0$.

10. Ашағыдакы тәнликләрин һәлләринин координат башланғычынын әтрафында һамарлығыны арашдырын.

а) $y' = y^2 \sqrt[3]{y} + x^3 |x|$;

б) $y' = (x^2 - y^2)^{6/5} + x \ln y$.

III ФӘСИЛ

ТӨРӘМӘЈӘ НӘЗӘРӘН ҺӘЛЛ ОЛУНМАМЫШ БИРТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

§ 1. ӘСАС АНЛАЈЫШЛАР ВӘ ТӘКЛИФЛӘР

а) *һәллин тә'рифи.*

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

шәклиндә олан тәнлијә төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш биртәртибли ади диференсиал тәнлик дејилир; бурада $F(x,y,z)$ үч өлчүлү Евклид фәзасынын мүәјјән D областында тә'јин олунмуш мә'лум функсијадыр.

(a,b) интервалында диференсиалланан $y=\varphi(x)$ функсијасы

1) $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in D$, $x \in (a,b)$,

2) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$, $x \in (a,b)$

шәртләрини өдәјирсә, *һәмин функсијаја (1) тәнлијинин* (a,b) *интервалында һәлли дејилир.*

$\Phi(x,y)=0$ тәнлијиндән тә'јин олунан $y=\varphi(x)$ функсијасы мүәјјән (a,b) интервалында (1) тәнлијинин һәлли исә, $\Phi(x,y)$ функсијасына (1) *тәнлијинин интегралы* дејилир.

Параметрик шәкилдә верилмиш диференсиалланан

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in(t_0, t_1)$$

функсијасы

1) $\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \in D$, $t \in (t_0, t_1)$,

2) $F\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) = 0$, $t \in (t_0, t_1)$

шәртләрини өдәјирсә, һәмин функсијаја (1) тәнлијинин *параметрик шәкилдә һәлли* дејилир.

Тутаг ки, $F(x,y,z)$ функсијасы z дәјишәнинә нәзәрән n дәрәчәли чохһәдлидир:

$$F(x,y,z) = A_n(x,y)z^n + A_{n-1}(x,y)z^{n-1} + \ldots + A_1(x,y)z + A_0(x,y);$$

бурада $A_i(x,y)$, $i=0,1,2,\ldots,n$ функсијалары xOy мүстәвисинин ејни бир G областында тә'јин олунмушлар вә

$$A_n(x,y) \neq 0.$$

Бу һалда (1) тәнлији ашағыдакы шәклә дүшәр:

$$A_n(x,y)(y')^n + A_{n-1}(x,y)(y')^{n-1} + \ldots + A_1(x,y)y' + A_0(x,y) = 0. \qquad (2)$$

Aјдындыр ки, G областынын $A_n(x, y) \neq 0$ олан һәр бир гејд олунмуш (x, y) нөгтәси үчүн (2) тәнлиҹи y'-ә нәзәрән n дәрәҹәли ҹәбри тәнликдир.

Ҹәбрин әсас теореминә көрә, $A_n(x, y) \neq 0$ олан (x, y) нөгтәләри үчүн, (2) тәнлиҹинин комплекс әдәдләр меҹданында n саҹда көкү вар:

$$y' = f_\kappa(x, y), \ \kappa = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Бурада $f_\kappa(x, y)$ һәгиги вә ја комплекс гиҹмәтләр алан функсиҹалардыр.

Диференсиал тәнликләрин бу курсунда анҹаг һәгиги һәлләр арашдырылдығындан, (3) тәнликләриндән анҹаг сағ тәрәфи һәгиги оланлара бахаҹағыг. Тутаг ки, белә тәнликләрин саҹы m-дир $(m \leqslant n)$.

Беләликлә, (2) тәнлиҹи төрәмәҹә нәзәрән һәлл олунмуш m саҹда һәгиги тәнликләрә парчаланыр.

Тутаг ки, (1) тәнлиҹи төрәмәҹә нәзәрән һәлл олунмуш

$$y' = f_\kappa(x, y), \ \kappa = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

һәгиги тәнликләринә парчаланыр. Бу тәнликләрин һәр бирини I, II фәсилләрдә верилән үсулларла арашдырмаг олар. Аҹдындыр ки, $f_\kappa(x, y)$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ функсиҹалары мүәҹҹән G областында кәсилмәз олдугда бу областын ихтиҹари (x_0, y_0) нөгтәсиндән (4) тәнликләринин һәр биринин ән азы бир интеграл әҹриси кечир.

Фәрз едәк ки, (4) тәнликләринин саҹы m-дир. Онда (4) тәнликләриндән һәр биринин һәлли еҹни заманда (1) тәнлиҹинин һәлли олдуғундан алырыг ки, верилмиш (x_0, y_0) нөгтәсиндән (1) тәнлиҹинин ән азы m саҹда интеграл әҹриси кечир.

Тутаг ки, G областынын һәр бир (x, y) нөгтәсиндә $f_1(x, y)$, $f_2(x, y), \ldots, f_m(x, y)$ функсиҹалары мүхтәлиф гиҹмәтләр алыр. Бу һалда (4) тәнликләри G областында m саҹда мүхтәлиф истигамәтләр тә'јин едир вә демәли, (1) тәнлиҹи (x, y) нөгтәсиндә m саҹда истигамәт мүәҹҹән едир. Буна көрә дә (1) тәнлиҹини һәлл етмәк, һәндәси олараг графикләри G областында јерләшән вә һәр бир нөгтәсиндә тохунанынын истигамәти бу нөгтәдәки m истигамәтдән һеч олмаса бири илә үст-үстә дүшән бүтүн һамар әҹриләри тапмаг демәкдир.

б) *Коши мәсәләси.* (1) тәнлиҹинин

$$y(x_0) = y_0 \tag{5}$$

шәртини өдәҹән һәлләринин тапылмасы мәсәләсинә *Коши мәсәләси* деҹилир. Аҹдындыр ки, (1) тәнлиҹи үчүн Коши мәсәләсини һәлл етмәк, һәндәси олараг һәмин тәнлиҹин (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әҹриләрини тапмаг демәкдир.

Мүәҹҹән $h > 0$ әдәди үчүн (1) тәнлиҹинин $[x_0 - h, x_0 + h]$ парчасында тә'јин олунан вә (5) шәртини өдәҹән һәлләринин саҹы

$$F(x_0, y_0, z) = 0 \tag{6}$$

ҹәбри тәнлиҹинин тә'јин етдиҹи истигамәтләрин саҹына бәрабәр

оларса, деҹирләр ки, (x_0, y_0) нөгтәсиндә *Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир.* Әкс һалда деҹирләр ки, (x_0, y_0) нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлиҹи *позулур.*

Һәр бир нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлиҹи сахланан интеграл әјрисинә ујғун һәллә хүсуси һәлл, һәр бир нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлиҹи позулан интеграл әјрисинә ујғун һәллә мәхсуси һәлл дејилир. Мәхсуси һәллә уҹғун интеграл әҹрисинә бә'зән мәхсуси интеграл әҹриси дә деҹирләр.

Инди (1) тәнлиҹинин (5) шәртини өдәҹән һәллинин варлығы вә јеканәлиҹи һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 1. *Тутаг ки, 1) (6) ҹәбри тәнлијинин m сајда һәгиги, мүхтәлиф $z_1, z_2, \ldots, z_m (m > 0)$ көкләри вар; 2) һәр бир $(x_0, y_0, z_i)(i = 1, 2, \ldots, m)$ нөгтәси вә мүәјјән $a > 0$, $b > 0$, $c_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ әдәдләри үчүн $F(x, y, z)$ функсијасы $R_i = \{x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a;\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b;\ z_i - c_i \leqslant z \leqslant z_i + c_i\}$ паралелопипединдә кәсилмәздир, кәсилмәз $F_y(x, y, z)$, $F_z(x, y, z)$ төрәмәләри вар, һәм дә $|F_z(x, y, z)| \geqslant m_i > 0$. Онда (1) тәнлијинин (5) шәртини өдәјән вә мүәјјән $h > 0$ әдәди үчүн $[x_0 - h, x_0 + h]$ парчасында тә'јин олунмуш m сајда мүхтәлиф һәлли вар.*

Исбаты. $z_1, z_2, \ldots, z_m$ әдәдләри мүхтәлиф олдуғундан $c_1, c_2, \ldots, c_m$ әдәдләрини елә сечмәк олар ки, $R_1, R_2, \ldots, R_m$ паралелопипедләри кәсишмәзләр. Геҹри-ашкар функсиҹанын варлығы һаггында теоремә әсасән $(x_0, y_0, z_i)(i = 1, 2, \ldots, m)$ нөгтәсинин елә әтрафы вар ки, бу әтрафда (1) тәнлиҹинин y'-ә нәзәрән јеканә

$$y' = f_i(x, y) \ (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{4'}$$

һәлли вар, белә ки, $f_i(x, y)$ функсиҹасы (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәҹҹән гапалы $D_i = \{x_0 - a_i \leqslant x \leqslant x_0 + a_i;\ y_0 - b_i \leqslant y \leqslant y_0 + b_i\}$ $(0 < a_i \leqslant a,\ 0 < b_i \leqslant b)$ әтрафында кәсилмәздир вә кәсилмәз $\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, f_i(x, y))}{F_{y'}(x, y, f_i(x, y))}$ хүсуси төрәмәси вар. Шәртә көрә $|F_{y'}(x, y, f_i(x, y))| \geqslant m_i > 0$ олдуғундан елә $K_i \geqslant 0$ әдәди вар ки, $(x, y) \in D_i$ үчүн $\left|\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y}\right| \leqslant K_i$ олур. Бурадан алырыг ки, $f_i(x, y)$ функсиҹасы гапалы D_i областында y-ә нәзәрән Липшис шәртини өдәҹир. Онда (II фәсилдәки 9-ҹу теоремә әсасән), (4′) тәнлиҹинин (5) шәртини өдәҹән вә $[x_0 - h_i, x_0 + h_i]$ парчасында тә'јин олунмуш јеканә $y = \varphi_i(x)$ һәлли вар. Бурада $h_i = \min\left\{a_i, \frac{b_i}{M_i}\right\}$, $M_i = \sup_{D_i} |f_i(x, y)|$. Әкәр $h = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} \{h_i\}$ гәбул етсәк, алырыг ки, (1) тәнлиҹинин (5) шәртини өдәҹән гә $[x_0 - h, x_0 + h]$ парчасында тә'јин олунмуш m саҹда һәлли вар.

һәм дә $R_1, R_2, \ldots, R_m$ паралелопипедләри кәсишмәдијиндән бу һәлләр мүхтәлифдир. Теорем исбат олунду.

в) *Үмуми һәлл.* Тутаг ки, (1) тәнлији төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш m сајда (4′) тәнликләринә парчаланмышдыр вә

$$\psi_1(x, y) = c, \ \psi_2(x, y) = c, \ldots, \psi_m(x, y) = c \qquad (7)$$

һәмин тәнликләрин үмуми интегралларыдыр. Бу үмуми интегралларын күллиссинә (1) тәнлијинин *үмуми интегралы* дејилир.

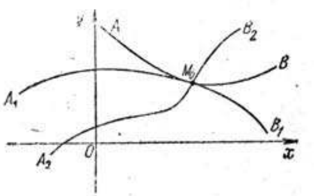
Ајдындыр ки, (7) үмуми интегралыны

$$(\psi_1(x, y) - c)(\psi_2(x, y) - c)\ldots(\psi_m(x, y) - c) = 0$$

шәклиндә дә јазмаг олар. Бу бәрабәрлијин сол тәрәфи c сабитинә нәзәрән m дәрәчәли чохһәдлидир.

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш тәнликләр нәзәријјәсиндә олдугу кими, (1) тәнлијинин үмуми һәлли мүхтәлиф шәкилләрдә верилә биләр.

Верилмиш (x_0, y_0) нөгтәсиндә $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_m(x, y)$ функсијаларындан һеч олмаса икисинин гијмәти ејни, бу нөгтәнин мүәјјән әтрафында исә һамысынын гијмәтләри мүхтәлиф оларса, (x_0, y_0) нөгтәсиндә (1) тәнлијинин һәллинин јеканәлији позулур. Буна бахмајараг, ола биләр ки, (x_0, y_0) нөгтәсиндән (4′) тәнликләриндән һәр биринин јеканә интеграл әјриси кечсин. Буну изаһ етмәк үчүн $m = 3$ көтүрәк вә тутаг ки, $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0)$. Онда (x_0, y_0) нөгтәсиндән (1) тәнлијинин (4′) тәнликләри илә тә'јин олунан $AM_0B, A_1M_0B_1, A_2M_0B_2$ интеграл әјриләриндән башга (шәкил 10) бир һиссәси $y' = f_1(x, y)$ тәнлијинин, дикәр һиссәси исә $y' = f_2(x, y)$ тәнлијинин интеграл әјриләринин бирләшдирилмәси илә алынан AM_0B_1 вә A_1M_0B интеграл әјриләри дә кечир.



Шәкил 10.

Мисал 1.

$$y'^2 + (x^2 - 1)y' - x^2 = 0 \qquad (8)$$

тәнлијинә бахаг. Бу тәнлији y'-ә нәзәрән һәлл етсәк, төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$y' = 1, \ y' = -x^2$$

тәнликләрини аларыг. Ајдындыр ки,

$$y = x + c, \ y = -\frac{x^3}{3} + c$$

функсијалары ујғун олараг бу тәнликләрин үмуми һәлләри олур. Онда (8) тәнлијинин үмуми интегралы

$$(y - x - c)\left(y + \frac{x^3}{3} - c\right) = 0$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунар.

Ајдындыр ки, алынмыш тәнликләрин сағ тәрәфләри олан $f_1(x, y) = 1$, $f_2(x, y) = -x^2$ функсијалары xOy мүстәвисинин бүтүн нөгтәләриндә мүхтәлиф гијмәтләр алыр вә мүстәвинин ихтијари (x_0, y_0) нөгтәсиндән бу тәнликләрин һәр биринин јеканә интеграл әјриси кечир.

Демәли, xOy мүстәвисинин һәр бир нөгтәсиндән (8) тәнлијинин ики мүхтәлиф интеграл әјриси кечир, јә'ни һәр бир нөгтәдә бу тәнлик үчүн гојулмуш Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир.

Мисал 2.

$$y'^2 - 2xy' = 0 \qquad (9)$$

тәнлији төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$y' = 0, \ y' = 2x$$

тәнликләринә парчаланыр. Онда $y = c$, $y = x^2 + c$ функсијалары бу тәнликләрин ујғун үмуми һәлләридир вә мүстәвинин ихтијари (x_0, y_0) нөгтәсиндән һәмин тәнликләрин һәр биринин јеканә интеграл әјриси кечир. Лакин бу тәнликләрин сағ тәрәфи олан $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 2x$ функсијалары $x = 0$ дүз хәтти бојунча бәрабәр гијмәтләр алдығындан, бу хәтт бојунча (9) тәнлијинин һәллинин јеканәлији позулур. Доғрудан да, (9) тәнлији Oy оху үзәриндә көтүрүлмүш истәнилән $(0, y_0)$ нөгтәсиндә јеканә $y' = 0$ истигамәти тә'јин етдији һалда, һәмин нөгтәдән $y = y_0$, $y = x^2 + y_0$ вә онларын көмәји илә гурулан интеграл әјриләри кечир. Амма $x \neq 0$ олдугда $f_1(x, y) \neq f_2(x, y)$ олдуғундан $x = 0$ дүз хәтти үзәриндә јерләшән нөгтәләр мүстәсна олмагла, мүстәвинин галан нөгтәләриндә (9) тәнлији үчүн гојулмуш Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир. Бурада $x = 0$ функсијасы тәнлији өдәмәдијиндән, онун мәхсуси һәлли јохдур.

§ 2. МӘХСУСИ ҺӘЛЛИН ТАПЫЛМАСЫ

а) *Мәхсуси һәллин дискриминант әјриси васитәсилә тапылмасы.* Тутаг ки, $F(x, y, z)$ функсијасы D областында кәсилмәздир, кәсилмәз F_y, F_z төрәмәләри вар вә (1) тәнлији төрәмәјә көрә һәлл олунмуш (4) тәнликләринә парчаланыр. Ајдындыр ки, (4) тәнликләринин һәр биринин мәхсуси һәлли (әкәр варса), һәм дә (1) тәнлијинин мәхсуси һәлли олур. II фәсилдә исбат олунан 9-чу теоремә әсасән $f_k(x, y)$ функсијасы (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәјјән гапалы әтрафында кәсилмәздирсә вә мәһдуд $\frac{\partial f_k}{\partial y}$ төрәмәси варса, бу нөгтәдән

$$y' = f_k(x, y) \qquad (4)$$

тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир, јә'ни бу нөгтәдә һәллин јеканәлији позула билмәз. Она көрә дә, көзләмәк олар

ки, (4) тәнлиjинин һәллинин jеканәлиjи $\frac{\partial f_к}{\partial y}$ төрәмәси гејри-мәхдуд олан нөгтәләрдә позулсун. Белә нөгтәләрин һәндәси јериндән ибарәт олан әјри, (4) тәнлиjинин мәхсуси һәлли үчүн *шүбһәли әјри* адланыр. Беләликлә, мәхсуси һәлли бу һәлл үчүн шүбһәли олан әјриләр ичәрисиндә ахтараркән, $\frac{\partial f_к}{\partial y}$ төрәмәсинин гејри-мәһдуд олдуғу нөгтәләрин һәндәси јериндән ибарәт олан әјриләри тапыб, бу әјриләрин (4) тәнлиjинин интеграл әјриси олуб-олмадығыны јохламаг лазымдыр. Сонра исә интеграл әјриси оланлар үзәриндә јеканәлиjин позулуб-позулмадығыны јохламаг лазымдыр. Көстәрәк ки, (1) тәнлиjинин мәхсуси һәлләрини тапаркән һәмишә (4) тәнликләринә кечмәјә еһтијач јохдур. Доғрудан да, (4) тәнлиjиндә y'-ә x, y дәјишәнләринин функсиjасы кими бахсаг, $\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial f_к}{\partial y}$ олур. Бу төрәмәни билаваситә (1) тәнлиjиндән гејри-ашкар функсиjаның төрәмәси кими $\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, y')}{F_{y'}(x, y, y')}$ шәклиндә тапмаг олар.

Aјдындыр ки, $F_{y'}(x, y, y') = 0$ олдугда $\frac{\partial y'}{\partial y}$ төрәмәси гејри-мәһдуд олур. Бу төрәмәнин гејри-мәһдуд олдуғу әјри бојунча һәм дә (1) тәнлиjи өдәнмәлидир. Одур ки, (1) тәнлиjинин мәхсуси һәлли үчүн шүбһәли олан әјри

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases}$$

системини өдәмәлидир. Бу системдән y'-и јох етмәклә алынан $R(x, y) = 0$ әјрисинә (1) тәнлиjинин дискриминант әјриси дејилир. Дискриминант әјрисинин (вә ја онун һиссәсинин) мәхсуси интеграл әјриси олмасы үчүн ашағыдакы шәртләр өдәнмәлидир: 1) һәмин әјри (1) тәнлиjинин интеграл әјриси олмалыдыр; 2) бу әјринин һәр бир нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлиjи позулмалыдыр.

б) *Мәхсуси һәллин интеграл әјриләр аиләсинин гуршаjаны кими тапылмасы.* Тутаг ки,

$$\Phi(x, y, c) = 0 \tag{10}$$

аиләси (1) тәнлиjинин үмуми интегралыдыр. Әкәр (10) аиләсинин гуршаjаны* варса, бу гуршаjан (1) тәнлиjинин мәхсуси һәлли олур. Доғрудан да, $y = \varphi(x)$ әјриси (10) аиләсинин гуршаjаны исә, бу әјринин һәр бир $(x, \varphi(x))$ нөгтәсиндә ону тә'јин едән $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ елементи (10) аиләсинин һеч олмаса бир әјрисинин елементи илә үст-үстә дүшүр. Бу көстәрир ки, $y = \varphi(x)$ функсиjасы (1) тәнлиjинин һәллидир. Дикәр тәрәфдән, $y = \varphi(x)$ гуршаjанынын һәр бир нөгтәсиндән, бу әјри дә дахил олмагла (1) тәнлиjинин тә'јин етдиjи истигамәтләрин саһындан һеч олмаса бир ваһид артыг интеграл әјриси кечир. Демәли, гуршаjан үзәриндә көтүрүлмүш һәр бир нөгтәдә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлиjи позулур. на көрә $y = \varphi(x)$ мәхсуси һәлл олур.

* һәр бир нөгтәсиндә һамар аиләнин һеч олмаса бир әјрисинә тохунан вә һеч бир һиссәси аиләнин әјриләриндән бири илә үст-үстә дүшмәјән һамар әјриjә аиләнин гурщаjаны дејилир. Мә'лумдур ки, (10) аиләсинин гуршаjаны

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0, \\ \Phi_c(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

системини өдәјир.

Беләликлә, тәнлиjин мәхсуси һәллини интеграл әјриләри аиләсинин гуршаjаны кими тә'јин етмәк үчүн (10) аиләсинин гуршаjаныны тапмаг лазымдыр.

Мисал 3.

$$xy'^2 - 2yy' + x = 0 \tag{11}$$

тәнлиjини y'-ә нәзәрән квадрат тәнлик кими һәлл етсәк,

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}, \quad y' = \frac{y}{x} - \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1} \tag{12}$$

бирчинс тәнликләрини аларыг. Бу тәнликләри һәлл едәрәк (11) тәнлиjинин үмуми интегралыны $x^2 - 2cy + c^2 = 0$ шәклиндә гурмаг олар.

Aјдындыр ки, (12) тәнликләринин сағ тәрәфләри $y = \pm x$ дүз хәтләри бојунча бәрабәр гијмәт алырлар. Она көрә дә һәмин дүз хәтләр бојунча (11) тәнлиjинин һәллинин јеканәлиjи позулур.

Дикәр тәрәфдән, aјдындыр ки, $y = \pm x$ функсиjалары (11) тәнлиjини өдәјирләр. Демәли, $y = \pm x$ һәлләри (11) тәнлиjинин мәхсуси һәлләридир.

Асанлыгла јохламаг олар ки, $y = \pm x$ функсиjалары (12) тәнликләринин дә мәхсуси һәлләридир.

Гејд едәк ки, $y = \pm x$ мәхсуси интеграл әјриләрини (11) тәнлиjинин дискриминант әјриләри кими

$$\begin{cases} xy'^2 - 2yy' + x = 0, \\ xy' - y = 0 \end{cases}$$

системиндән y'-и јох етмәклә, һәм дә тәнлиjин үмуми интегралы аиләсинин гуршаjаны кими

$$\begin{cases} x^2 - 2cy + c^2 = 0, \\ -y + c = 0 \end{cases}$$

системиндән c-ни јох етмәклә алмаг олар.

Мисал 4.

$$y'^2 - 16x^2 yy' = 0 \tag{13}$$

тәнлиjиндән $y < 0$ олдугда

$$y' = 0$$

һәгиги тәнлији, $y \geqslant 0$ олдугда исә

$$y'=0,\ y'=4x\sqrt{y},\ y'=-4x\sqrt{y} \qquad (14)$$

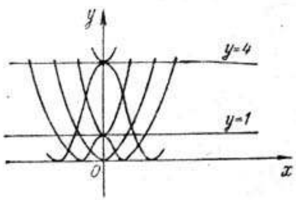
тәнликләри алыныр. Демәли, $y<0$ областында (13) тәнлијинин үмуми һәлли $y=c$ шәклиндәдир вә бу областын һәр бир нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир. Ајдындыр ки, $y>0$, $x\neq 0$ областында (14) тәнликләринин сағ тәрәфләри мүхтәлиф гијмәтләр алырлар вә бу областын ихтијари нөгтәсиндән һәмин тәнликләрин һәр биринин јеканә һәлли кечир. $y=0$ вә $x=0\ (y>0)$ хәтләри бојунча (14) тәнликләринин сағ тәрәфләри бәрабәр гијмәтләр алырлар, һәм дә $y=0$ функсијасы һәмин тәнликләрин 2-чи вә 3-чүсүнүн мәхсуси һәлләридир, лакин $x=0\ (y>0)$ функсијасы һәлл дејил. (14) тәнликләринин үмуми һәлләри ујғун олараг

$$y=c,\ \sqrt{y}-x^2=c\ \ (c+x^2\geqslant 0),\ \sqrt{y}+x^2=c\ \ (c-x^2\geqslant 0)$$

шәклиндәдир вә демәли, $y>0$ областында (13) тәнлијинин үмуми интегралы

$$(y-c)\left(\sqrt{y}-x^2-c\right)\left(\sqrt{y}+x^2-c\right)=0. \qquad (15)$$

Ајдындыр ки, $y=0$ мәхсуси һәллини (15) аиләсиндән $c=0$, $c=-x^2$, $c=x^2$ көтүрмәклә алмаг олар, јә'ни мәхсуси һәлли c-јә әдәди гијмәт вермәклә дә үмуми интегралдан алмаг олар.



Шәкил 11.

Гејд едәк ки, (15) аиләсиндән $c=2x^2+1$ көтүрмәклә алынан $y=(x^2+1)^2$ функсијасы (13) тәнлијинин хүсуси һәллидир (шәкил 11).

Бу мисалдан ајдындыр ки, төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш тәнликләрдән фәргли олараг, төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш тәнлијин мүәјјән хүсуси һәллини бә'зән онун үмуми интегралында c сабитини x дәјишәниндән асылы функсија илә әвәз етмәклә, мәхсуси һәллини исә c сабитинә мүәјјән әдәди гијмәт вермәклә алмаг олар.

§ 3. НАТАМАМ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1)$$

тәнлијинә x, y дәјишәнләриндән һәр һансы бири вә ја һәр икиси ашкар дахил олмадыгда, белә тәнликләрә натамам диференсиал тәнликләр дејилир. Демәли, натамам диференсиал

тәнликләр

$$F(y')=0,\ F(x,y')=0,\ F(y,y')=0$$

шәклиндә олан тәнликләрдир. Бу тәнликләри арашдыраг.

а) *Анчаг төрәмәдән асылы тәнликләр.* Белә тәнлијин үмуми шәкли

$$F(y')=0 \qquad (16)$$

олур. Тутаг ки, $F(\kappa)=0$ чәбри тәнлијинин сонлу вә ја һесабы сајда һәгиги $\kappa_1, \kappa_2, \ldots$ көкләри вар. Онда (16) тәнлијиндән, төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$y'=\kappa_i\ \ i=1,2,\ldots$$

тәнликләрини алырыг вә онларын үмуми һәлләри күллиси

$$y=\kappa_i x+c,\quad i=1,2,\ldots$$

(16) тәнлијинин үмуми һәлли олур. Бурадан тә'јин олунан

$$\kappa_i=\frac{y-c}{x},\ i=1,2,\ldots$$

гијмәтини $F(\kappa_i)=0$ бәрабәрлијиндә нәзәрә алсаг, (16) тәнлијинин үмуми интегралы

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0.$$

Мисал 5. $\sin y'=0$ тәнлијинә бахаг. Бу тәнликдән төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш сонсуз сајда

$$y'=\kappa\pi,\ \ \kappa=0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ldots$$

тәнликләри алыныр. Онда

$$y=\kappa\pi x+c,\quad \kappa=0;\pm 1;\pm 2;\ldots$$

функсијалары күллиси бахылан тәнлијин үмуми һәлли,

$$\sin\frac{y-c}{x}=0$$

исә үмуми интегралы олур.

Мисал 6. $y'^3-1=0$ тәнлијинин үмуми интегралы $\left(\frac{y-c}{x}\right)^3-1=0$. Бу үмуми интеграл $y'=1$ һәгиги тәнлијинин һәлләри илә јанашы

$$y'=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

комплекс тәнликләринин һәлләрини дә өзүндә сахлајыр.

Гејд 1. $F(\kappa)=0$ тәнлијинин көкләри мүәјјән бир интервалы долдурарса, (16) тәнлијинин јухарыда көстәрилән һәлләрдән фәргли һәлләри дә ола биләр.

Мисал 7. $y'+|y'|=0$ тәнлијинә бахаг. Бу һалда

$$\kappa+|\kappa|=0.$$

тәнлијинин һәлләри $(-\infty, 0]$ јарымохуну долдурур. Она көрә дә бахылан диференсиал тәнлијин

$$y = \kappa x + c, \ \kappa \in (-\infty, 0]$$

һәлләриндән фәргли $y = -x^2$, $y = -x^3$, $x \in [0, +\infty)$ вә c, һәлләри дә вар.

б) *Ахтарылан функсија ашкар дахил олмајан тәнликләр.* Белә тәнликләр.

$$F(x, y') = 0 \tag{17}$$

шәклиндәдир. Бу тәнлији һәлл етмәк үчүн ашағыдакы һаллара бахаг.

1) *Тәнлији y'-ә нәзәрән һәлл етмәк мүмкүндүр.* Онда

$$y' = f_\kappa(x), \ \kappa = 1, 2, \ldots$$

тәнликләрини аларыг вә бу һалда (17) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = \int f_\kappa(x)\, dx + c, \quad \kappa = 1, 2, \ldots$$

бәрабәрликләри илә верилир.

2) *Тәнлији*

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t) \tag{18}$$

параметрик шәклиндә көстәрмәк мүмкүндүр, јә'ни мүәјјән (t_0, t_1) интервалында тә'јин олунан һамар $\varphi(t), \psi(t)$ функсијалары үчүн $F(\varphi(t), \psi(t)) = 0$ ејнилији өдәнир.

Тәнлијин интеграл әјриләри бојунча $dy = y'dx$ диференсиал мүнасибәти өдәндијиндән, (18)-ә әсасән

$$dy = \psi(t)\ \varphi'(t)\, dt.$$

Бурадан

$$y = \int \psi(t)\ \varphi'(t)\, dt + c$$

вә демәли,

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt + c$$

мүнасибәтләри (17) тәнлијинин параметрик шәкилдә үмуми һәлли олур.

3) *(17) тәнлијини x-ә нәзәрән һәлл етмәк мүмкүндүр:*

$$x = \varphi(y'). \tag{19}$$

Бу һал, $y' = t$ көтүрмәклә 2-чи һала кәтирилир.

Гејд 2. Әкәр һәр һансы a әдәди үчүн

$$\lim_{z \to +\infty} F(a, z) = 0, \ \lim_{z \to -\infty} F(a, z) = 0$$

мүнасибәтләриндән һеч олмаса бири өдәнәрсә, $x = a$ функсијасы (17) тәнлијинин һәлли олур. Бу һәлл мәхсуси һәлл ола биләр.

Гејд 3. Тутаг ки, (17) тәнлији

$$P(x, y') + Q(x, y') = 0 \tag{20}$$

шәклиндәдир вә $P(x, z)$, $Q(x, z)$ функсијалары ујғун олараг κ вә m дәрәчәли бирчинс функсијалардыр. Онда (20) тәнлијини

$$x^\kappa P\left(1, \frac{y'}{x}\right) + x^m Q\left(1, \frac{y'}{x}\right) = 0$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурада мүәјјәнлик үчүн $\kappa > m$ гәбул едиб $y' = tx$ әвәзләмәси апарсаг, (20) тәнлијини

$$x = \sqrt[\kappa-m]{-\frac{Q(1, t)}{P(1, t)}}, \ y' = t \sqrt[\kappa-m]{-\frac{Q(1, t)}{P(1, t)}}$$

параметрик шәклиндә јазмаг олар. Бу исә јухарыда бахдығымыз 2-чи һала ујғундур.

Мисал 8. $e^{y'} - y'^2 - x = 0$ тәнлијини

$$x = e^t - t^2, \ y' = t$$

параметрик шәкилдә јазмаг олар вә онун үмуми һәлли

$$x = e^t - t^2, \ y = (t-1)e^t - \frac{2}{3}\ t^3 + c$$

параметрик шәклиндә тапылыр.

Мисал 9.

$$x^3 + y'^3 - xy' = 0$$

тәнлијинә бахаг. Бу тәнликдә

$$P(x, y') = x^3 + y'^3, \ Q(x, y') = -xy'$$

функсијалары ујғун олараг $\kappa = 3$, $m = 2$ дәрәчәли бирчинс функсијалардыр. Одур ки, $y' = tx$ әвәзләмәси апармагла тәнлији

$$x = \frac{t}{1 + t^3}, y' = \frac{t^2}{1 + t^3}$$

параметрик шәклинә кәтирмәк олар. Бурадан, бахылан тәнлијин үмуми һәллини

$$x = \frac{t}{1 + t^3}, \quad y = \frac{1 + 4t^3}{6(1 + t^3)^2} + c$$

параметрик шәклиндә тапырыг.

в) *Сәрбәст дәјишән ашкар дахил олмајан тәнликләр.* Натамам тәнликләрдән бир синфи дә

$$F(y, y') = 0 \tag{21}$$

шәклиндә олан тәнликләрдир.

1) Тутаг ки, (21) тәнлијини y'-ә нәзәрән һәлл етмәк мүмкүндүр:

$$y' = f_\kappa(y), \ \kappa = 1, 2, \ldots.$$

Алынан тәнликләри һәлл етмәклә (21) тәнлијинин үмуми интегралыны гурмаг олар.

2) Тутаг ки, (21) тәнлиjини

$$y=\varphi(t),\ y'=\psi(t) \qquad (22)$$

параметрик шәклиндә көстәрмәк мүмкүндүр. Бурадан $dy = y'dx$ мүнасибәтинә әсасән алырыг ки,

$$dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt.$$

Бу тәнлиjи һәлл едәрәк (21) тәнлиjинин үмуми һәллини

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt+c,\ y=\varphi(t)$$

параметрик шәклиндә гура биләрик.

3) Тутаг ки, (21) тәнлиjи y-ә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$y=\varphi(y').$$

Бу һал, $y'=t$ гәбул етмәклә 2-чи һала кәтирилир.

Гејд 4. $F(a,0)=0$ исә, $y=a$ функсиjасы да (21) тәнлиjинин һәллидир. Бу һәлл мәхсуси һәлл ола биләр.

Мисал 10.

$$y^{2/5}+y'^{2/5}=a^{2/5}$$

тәнлиjинә бахаг. Бу тәнлиjи

$$y=a\sin^5 t,\ y'=a\cos^5 t$$

параметрик шәклиндә jазмаг олар. Бурадан тәнлиjин үмуми һәллини

$$x=\frac{5}{3}\operatorname{tg}^3 t-5\operatorname{tg} t+5t+c,\ y=a\sin^5 t$$

параметрик шәклиндә тапырыг. Аjдындыр ки, $y=a$ функсиjасы да бахылан тәнлиjин һәллидир.

Мисал 11.

$$y-(y'-1)e^{y'}=0$$

тәнлиjини $y'=t,\ y=(t-1)e^t$ параметрик шәклиндә jазмаг олар. Онда jухарыда көстәрилән гаjда илә бахылан тәнлиjин үмуми һәллини

$$x=e^t+c,\ y=(t-1)e^t$$

вә jа параметри jох етмәклә

$$y=(x-c)[\ln(x-c)-1],\ (x>c)$$

шәклиндә тапа биләрик. Бу мисалда $F(y,y')=y-(y'-1)e^{y'}$ вә $a=-1$ әдәди $F(a,0)=0$ тәнлиjинин көкүдүр, jә'ни $y=-1$ бахылан тәнлиjин һәллидир. Көстәрмәк олар ки, $y=-1$ дүз хәтти, һәлләр аиләсинин гуршаjанындыр. Демәли, $y=-1$ һәлли мәхсуси һәллдир.

г) *Натамам тәнликләрә кәтирилән тәнликләр.* Мүәjjән κ әдәди, $(x,y,z)\in D$ нөгтәси вә $(ux,u^{\kappa}y,u^{\kappa-1}z)\in D$ шәртини

өдәjән истәнилән u үчүн

$$F(ux,u^{\kappa}y,u^{\kappa-1}z)=u^m F(x,y,z) \qquad (23)$$

оларса, (1) тәнлиjинә *үмумиләшмиш бирчинс тәнлик* деjилир.

Көстәрәк ки, үмумиләшмиш бирчинс тәнлиjи

$$x=e^t,\ y=ze^{\kappa t}$$

әвәзләмәси васитәсилә ($x<0$ олдугда $x=-e^t$, $y=ze^{\kappa t}$ әвәзләмәси апармаг лазымдыр) натамам тәнлиjә кәтирмәк олар. Доғрудан да, әвәзләмәjә әсасән $y'=\frac{dy}{dx}=e^{(\kappa-1)t}\left(\frac{dz}{dt}+\kappa z\right)$ олдуғундан, (23) шәртини дә нәзәрә алмагла (1) тәнлиjини

$$F\left(1,z,\frac{dz}{dt}+\kappa z\right)=0$$

шәклиндә jазмаг олар. Бу исә сәрбәст дәjишән ашкар шәкилдә дахил олмаjан тәнликдир.

Мисал 12. $(xy'+3y)^2-49x=0$ тәнлиjи үмумиләшмиш бирчинс тәнликдир. Бу тәнликдә $x=e^t,\ y=ze^{0,5t}$ $(x>0)$ әвәзләмәси апарсаг,

$$\left(\frac{dz}{dt}+3{,}5z\right)^2-49=0$$

тәнлиjи алынар. Бу тәнлиjи һәлл едәрәк бахылан тәнлиjин үмуми һәллини

$$x=e^t,\ y=ce^{-3t}\pm 2e^{0,5t}$$

параметрик шәклиндә вә jа параметри jох етмәклә $y=cx^{-3}\pm 2\sqrt{x}$ шәклиндә тапарыг.

§ 4. ПАРАМЕТР ДАХИЛ ЕТМӘJИН ҮМУМИ ҮСУЛУ

Бу параграфда

$$F(x,y,y')=0 \qquad (1)$$

тәнлиjиндән y'-и x,y дәjишәнләринин елементар функсиjалары васитәсилә ифадә етмәк мүмкүн олмаjан үмуми һала бахылыр.

Тутаг ки, uOv мүстәвисинин мүәjjән Ω областында тә'jин олунан һамар

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ y'=h(u,v) \qquad (24)$$

функсиjалары ашағыдакы шәртләри өдәjир:

1) $(\varphi(u,v),\ \psi(u,v),\ h(u,v))\in D,\quad (u,v)\in\Omega,$

2) $F(\varphi(u,v),\ \psi(u,v),\ h(u,v))=0,\quad (u,v)\in\Omega.$

Бу һалда (24) тәнликләр системинә (1) тәнлиjинин параметрик шәкли деjилир.

260—7

Көстәрәк ки, (1) тәнлиіинин (24) параметрик шәкли мә'-лум оларса, ону һәмишә төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш тәнлијә кәтирмәк олар. Доғрудан да, (24)-дән тә'јин олунан

$$dx = \varphi_u(u,v)\,du + \varphi_v(u,v)\,dv, \quad dy = \psi_u(u,v)\,du + \psi_v(u,v)\,dv,$$

$$y' = h(u,v)$$

ифадәләрини $dy = y'dx$ мүнасибәтиндә јазсаг

$$[\psi_u(u,v) - h(u,v)\,\varphi_u(u,v)]\,du + [\psi_v(u,v) - \\ - h(u,v)\,\varphi_v(u,v)]\,dv = 0 \qquad (25)$$

тәнлијини аларыг. Бу исә төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш тәнликдир.

Тутаг ки, (25) тәнлијинин үмуми һәлли $v = \omega(u,c)$ шәклиндәдир. Онда.

$$x = \varphi(u, \omega(u,c)), \; y = \psi(u, \omega(u,c)) \qquad (26)$$

(1) тәнлијинин параметрик шәкилдә үмуми һәлли олар; бурада c ихтијари сабитдир. (26) системиндән u параметрини јох етмәк мүмкүн оларса, (1) тәнлијинин

$$y = \Phi(x,c)$$

шәклиндә үмуми һәллини вә ја

$$\Phi(x,y,c) = 0$$

шәклиндә үмуми интегралыны аларыг. $v = g(u)$ функсијасы (25) тәнлијинин мәхсуси һәлли исә, $x = \varphi(u, g(u))$, $y = \psi(u, g(u))$ функсијасы (1) тәнлијинин мәхсуси һәлли ола биләр.

Мисал 13. $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$ тәнлијинә бахаг. Бу тәнлији

$$x = vue^{-u}, \; y = v, \; y' = e^u$$

параметрик шәклиндә јазмаг олар вә уіғун (25) тәнлији

$$(u-1)(vdu - dv) = 0$$

шәклиндәдир. Бурадан $u = 1$ вә $v = ce^u$ һәлләрини аларыг. Онда $x = cu$, $y = ce^u$ бахылан тәнлијин параметрик шәкилдә үмуми һәлли олар. Одур ки, u параметрини јох етсәк, тәнлијин $y = ce^{x/c}$ шәкилдә үмуми һәллини аларыг. Бахылан тәнлијин $u = 1$ һәллинә уіғун һәлли $y = ex$ олар. Асанлыгла јохламаг олар ки, бу һәлл $y = ce^{x/c}$ аиләсинин гуршајанıдыр вә демәли, бахылан тәнлијин мәхсуси һәллидир.

Параметр дахил етмәјин үмуми үсулуну тәтбиг едәркән (1) тәнлијинин (24) параметрик шәклиндә көстәрилмәси вә параметрик шәкилдә көстәрилмәси мүмкүн олдугда, алынан (25) тәнлијинин квадратура илә һәлл олунмасы мәсәләси мејдана чыхыр.

Ашағыдакы хүсуси һаллары арашдыраг:

а) *Сәрбәст дәјишәнә нәзәрән һәлл олунан тәнликләр.* Тутаг ки, (1) тәнлији x-ә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$x = \varphi(y, y').$$

Параметр олараг y вә p-ни көтүрмәклә бу тәнлији

$$x = \varphi(y,p), \; y' = p$$

параметрик шәклиндә көстәрмәк олар. Бурадан $dy = y'dx$ мүнасибәтинә әсасән төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$[p\,\varphi_y(y,p) - 1]\,dy + \varphi_p(y,p)\,dp = 0$$

тәнлији алыныр.

Мисал 14. $xy'^3 = yy'^2 + y^{4/3}$ тәнлији x-ә нәзәрән һәлл олунандыр. Ону

$$x = \frac{y}{p} + \frac{y^{4/3}}{p^3}, \; y' = p$$

шәклиндә јазараг $dy = pdx$ мүнасибәтиндән истифадә етсәк:

$$\frac{dy}{dp} - \frac{9}{4p}y = \frac{3}{4}py^{2/3}$$

Бернулли тәнлијини аларыг. Бурадан

$$y = p^{9/4}\left(c + \frac{1}{5}p^{5/4}\right)^3.$$

Демәли, бахылан тәнлијин параметрик шәкилдә үмуми һәлли

$$x = p^{5/4}\left(v + \frac{1}{5}p^{5/4}\right)^3 + \left(c + \frac{1}{5}p^{5/4}\right)^4.$$

$$y = p^{9/4}\left(c + \frac{1}{5}p^{5/4}\right)^3.$$

Ајдындыр ки, $y = 0$, алынмыш Бернулли тәнлијинин мәхсуси һәллидир. Асанлыгла јохламаг олар ки, $y = 0$ һәм дә бахылан тәнлијин мәхсуси һәллидир.

б) *Ахтарылан функсијаја нәзәрән һәлл олунан тәнликләр.* Тутаг ки, (1) тәнлији y-ә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$y = f(x, y').$$

Бу тәнлији

$$y = f(x,p), \; y' = p$$

параметрик шәклиндә јазмаг олар вә бурадан да $dy = pdx$ мүнасибәтинә әсасән төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$[f_x(x,p) - p]\,dx + f_p(x,p)\,dp = 0$$

тәнлији алынар.

Мисал 15. $y = xy' + \sqrt{x(1 + y'^2)}$ тәнлијини һәлл едәк. Бунун үчүн $y' = p$ гәбул едиб, тәнлији

$$y = px + \sqrt{x(1+p^2)}$$

шәклиндә јазаг. Бурадан

$$\frac{dx}{dp}+\frac{2p}{1+p^2}x+\frac{2}{\sqrt{1+p^2}}x^{3/2}=0$$

Бернулли тәнлији алынар вә онун үмуми һәлли $x=(1+p^2)^{-1}(c+\operatorname{arc\,tg}p)^{-2}$. Онда бахылан тәнлијин үмуми һәлли:

$$x=(1+p^2)^{-1}(c+\operatorname{arc\,tg}p)^{-2},$$

$$y=p(1+p^2)^{-1}(c+\operatorname{arc\,tg}p)^{-2}+(c+\operatorname{arc\,tg}p)^{-1}.$$

в) *Клеро тәнлији.*

$$y=xy'+\psi(y')$$

тәнлијинә Клеро тәнлији дејилир; бурада $\psi(z)$ верилмиш диференсиалланан функсијадыр. Көстәрәк ки, Клеро тәнлији квадратура илә һәлл олунур. Бунун үчүн тәнлији

$$y=xp+\psi(p),\quad y'=p$$

параметрик шәклиндә јазыб, јухарыдакы гајданы тәтбиг едәк. Онда

$$[x+\psi'(p)]\,dp=0$$

тәнлијини аларыг. Бурадан да

$$dp=0,\quad x+\psi'(p)=0$$

тәнликләри алыныр вә онларын ујғун һәлләри $p=c$, $x=-\psi'(p)$ олур. Бу һәлләрә ујғун олараг, Клеро тәнлијинин

$$y=cx+\psi(c), \tag{27}$$

үмуми һәлли вә

$$x=-\psi'(p),\quad y=-p\psi'(p)+\psi(p) \tag{28}$$

һәлли алыныр.

Көстәрәк ки, $\psi(p)$ функсијасынын икинчи тәртиб кәсилмәз төрәмәси варса вә $\psi''(p)\neq 0$ исә, (28) функсијасы Клеро тәнлијинин мәхсуси һәллидир. Бунун үчүн көстәрәк ки, (28) илә тә'јин олунан әјри (27) аиләсинин гуршајаныдыр. Тә'рифә көрә (27) аиләсинин гуршајаны

$$\begin{cases} y=cx+\psi(c),\\ 0=x+\psi'(c)\end{cases} \tag{29}$$

системиндән c параметрини јох етмәклә алыныр. $\psi''(p)\neq 0$ олдуғундан (29) дүстурлары c параметриндән асылы һамар функсија тә'јин едир. Она көрә (29) системинә (27) аиләсинин гуршајанынын параметрик шәкилдә тәнлији кими бахмаг олар.

Ајдындыр ки, (28) вә (29) системләри ејни бир функсија тә'јин едир.

Мисал 16. Ихтијари нөгтәдә әјријә чәкилмиш тохунанын координат охларындан ајырдығы үчбучағын саһәси $2a^2$-дыр. Әјрини тапын.

Һ ә л л и. Тутаг ки, (x, y) ахтарылан әјри үзәриндә ихтијари нөгтәдир. Бу нөгтәдә әјријә чәкилән тохунанын тәнлији

$$Y-y=y'(X-x)$$

олар; бурада (X, Y) тохунанын чари координатларыдыр. Тохунанын координат охларындан ајырдығы парчалар $x-\frac{y}{y'}$ вә $y-xy'$ олдуғундан, шәртә көрә

$$\left(x-\frac{y}{y'}\right)(y-xy')=4a^2.$$

Бурадан

$$y=xy'\pm 2a\sqrt{-y'}\qquad (y'<0)$$

Клеро тәнлији алынар. $y=cx\pm 2a\sqrt{-c}$, $(c<0)$ тәнлијин үмуми һәлли, $xy=a^2$ исә мәхсуси һәллидир.

г) *Лагранж тәнлији.*

$$y=x\varphi(y')+\psi(y')$$

тәнлијинә Лагранж тәнлији дејилир, бурада $\varphi(p)$, $\psi(p)$ верилмиш диференсиалланан функсијалардыр вә $\varphi(p)\not\equiv p$ ($\varphi(p)\equiv p$ олдугда Клеро тәнлији алыныр). Лагранж тәнлијини

$$y=x\varphi(p)+\psi(p),\quad y'=p$$

параметрик шәкилдә јазараг, $dy=pdx$ мүнасибәтинә әсасән төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш

$$[\varphi(p)-p]\,dx+[x\varphi'(p)+\psi'(p)]\,dp=0$$

тәнлијини аларыг. Ајдындыр ки, p-јә сәрбәст дәјишән, x-ә ахтарылан функсија кими бахдыгда бу тәнлик хәтти тәнликдир.

Мисал 17. Координат башланғычындан кечән вә һәр бир нөгтәсиндә чәкилмиш нормалынын биринчи рүбдә координат охлары арасында галан парчасынын узунлуғу 2-јә бәрабәр олан әјрини тапын.

Һ ә л л и. Әјри үзәриндә көтүрүлмүш ихтијари (x, y) нөгтәсиндә чәкилән нормалын тәнлији

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$

олдуғундан, бу нормал координат охларыны ујғун олараг $(x+yy', 0)$ вә $\left(0, y+\frac{x}{y'}\right)$ нөгтәләриндә кәсир. Мәсәләнин шәртинә әсасән

$$(x+yy')^2+\left(y+\frac{x}{y'}\right)^2=4.$$

Бурадан

$$y=-\frac{x}{y'}\pm\frac{2}{\sqrt{1+y'^2}}$$

Лагранж тәнлији алыныр вә

$$x = cp(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} \pm p(1+p^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$y = -c(1+p^2)^{-\frac{1}{2}} \mp (1+p^2)^{-\frac{3}{2}} \pm 2(1+p^2)^{-\frac{1}{2}}$$

онун параметрик шәкилдә үмуми һәлли олур. Графики координат башланғычындан кечән вә мәсәләнин шәртини өдәјән һәлл

$$x = p(p^2+2)(1+p^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad y = p^2(1+p^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

§ 5. ТРАЈЕКТОРИЈА ҺАГГЫНДА МӘСӘЛӘ

Биртәртибли диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин һәндәси тәтбигләриндән бири трајекторија һаггында мәсәлә дир.

Тутаг ки, a параметриндән асылы

$$\Phi(x, y, a) = 0 \qquad (30)$$

һамар әјриләр аиләси верилмишдир. *Бу аиләнин һәр бир әјриси илә ејни α бучағы алтында кәсишән әјринин тапылмасы мәсәләсинә трајекторија һаггында мәсәлә, әјринин өзүнә исә аиләнин трајекторијасы дејилир.* $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *олдугда трајекторија ортогонал,* $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ *олдугда исә изогонал трајекторија адланыр.*

Верилмиш аиләнин трајекторијаларыны тапаг. Бунун үчүн әввәлҹә аиләнин диференсиал тәнлијини гураг. Бу мәгсәдлә x-ә сәрбәст дәјишән, y-ә исә ахтарылан функсија кими бахыб, (30) бәрабәрлијиндән төрәмә алаг:

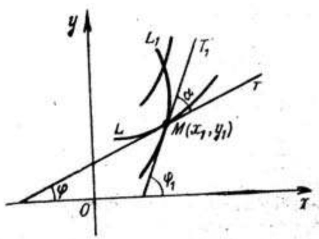
$$\Phi_x(x, y, a) + \Phi_y(x, y, a)\, y' = 0. \qquad (31)$$

(30) вә (31) мүнасибәтләриндән a параметрини јох етсәк,

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (32)$$

тәнлијини аларыг. Ајдындыр ки, (30) аиләси (32) тәнлијинин үмуми интегралыдыр.

Тутаг ки, L_1 әјриси (30) аиләсинин трајекторијасыдыр вә $M(x_1, y_1)$ нөгтәси бу трајекторија үзәриндә ихтијари нөгтәдир (шәкил 12). (30) аиләсинин бу нөгтәдән кечән әјрисини L илә ишарә едәк. L вә L_1 әјриләринә $M(x_1, y_1)$ нөгтәсиндә чәкилән MT вә MT_1 тохунанларынын Ox



Шәкил 12.

охунун мүсбәт истигамәти илә әмәлә кәтирдији бучаглары ујғун олараг φ вә φ_1 илә ишарә етсәк, $\varphi_1 - \varphi = \alpha$ олар. $M(x_1, y_1)$ нөгтәси L_1 әјриси үзрә һәрәкәт етдикҹә φ вә φ_1 бучаглары дәјишир, лакин $\varphi_1 - \varphi$ фәрги һәмишә сабит олуб, α-ја бәрабәр олур.

Төрәмәнин һәндәси мә'насына әсасән MT вә MT_1 тохунанларынын бучаг әмсаллары $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$, $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{dy_1}{dx_1}$ олар.

Тутаг ки, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Онда $\varphi = \varphi_1 - \alpha$ бәрабәрлијинә әсасән, MT вә MT_1 тохунанларынын бучаг әмсаллары арасында

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi_1}$$

вә ја

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \kappa}{1 + \kappa \frac{dy_1}{dx_1}}, \quad (\kappa = \operatorname{tg}\alpha) \qquad (33)$$

мүнасибәтини аларыг.

$M(x_1, y_1)$ нөгтәси (32) тәнлијинин L интеграл әјриси үзәриндә олдуғундан, (33) мүнасибәтинә әсасән,

$$F\left(x_1, y_1, \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \kappa}{1 + \kappa \frac{dy_1}{dx_1}}\right) = 0$$

олмалыдыр. $M(x_1, y_1)$ нөгтәси L_1 әјриси үзәриндә ихтијари нөгтә олдуғундан, бурадан алырыг ки, бу әјри бојунҹа

$$F\left(x, y, \frac{\frac{dy}{dx} - \kappa}{1 + \kappa \frac{dy}{dx}}\right) = 0, \qquad (34)$$

јә'ни (34) мүнасибәти (30) аиләсинин изогонал трајекторијаларынын диференсиал тәнлијидир.

Беләликлә, (30) аиләсинин изогонал трајекторијаларынын тапылмасы мәсәләси (34) диференсиал тәнлијинин һәллинә кәтирилир.

Тутаг ки, $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Бу һалда $\varphi = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$ олдуғундан $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}$. Демәли, MT вә MT_1 тохунанларынын бучаг әмсаллары арасында

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}$$

мүнасибәти өдәнир. Бурадан, јухарыдакына охшар мүһакимә апармагла аларыг ки, (30) аиләсинин ортогонал трајекторијаларынын диференсиал тәнлији

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0. \qquad (35)$$

Мисал 18. Координат башланғычындан кечән дүз хәтләр аиләсинин изогонал вә ортогонал трајекторијаларыны тапмалы.

Һ ә л л и. Координат башланғычындан кечән дүз хәтләр аиләси

$$y = ax$$

тәнлији илә верилир; бурада a параметрдир. Бу аиләнин диференсиал тәнлији

$$y = \frac{dy}{dx}x \qquad (36)$$

олур. Алынмыш тәнликдә $\frac{dy}{dx}$ әвәзинә $\left(\frac{dy}{dx} - \kappa\right) : \left(1 + \kappa\frac{dy}{dx}\right)$ јазсаг, алынан

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \kappa x}{x - \kappa y}$$

диференсиал тәнлији, изогонал трајекторијалар аиләсинин диференсиал тәнлији олар. Ајдындыр ки, бу тәнлик бирчинс тәнликдир вә онун үмуми һәлли

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c\exp\left(\frac{1}{\kappa}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right).$$

Алынан аилә, координат башланғычындан кечән дүз хәтләр аиләсинин изогонал трајекторијаларыдыр.

Бахылан аиләнин ортогонал трајекторијаларыны тапмаг үчүн (36) тәнлијиндә $\frac{dy}{dx}$ әвәзинә $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ јазаг. Онда

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

тәнлијини аларыг. Бу тәнлијин һәлләри исә

$$x^2 + y^2 = c$$

чеврәләр аиләсидир.

Чалышмалар

1. Ашағыдакы тәнликләри төрәмәјә нәзәрән һәлл едиб үмуми һәллини тапын:

а) $y'^2 + yy' + 2ye^x - 4e^{2x} = 0$; *Чаваб*: $(y - e^x - ce^{-x})(y + 2e^x - c) = 0$.

б) $y'^2 - (x+1)y + xy^2 = 0$; *Чаваб*: $(y - ce^x)\left(y - ce^{\frac{x^2}{2}}\right) = 0$.

в) $y'^2 + 2yy' - y^3(2 - ye^x)e^x = 0$; *Чаваб*: $[ye^x(1 + ce^x) - 1][y(c + e^x) - 1] = 0$.

г) $x^2y'^2 - x^2y'^2 - y^2y' + y^2 = 0$. *Чаваб*: $(y - ce^x)\left(y - ce^{-\frac{x}{2}}\right)(y - x - c) = 0$.

2. $y'^2 - (x+1)yy' + xy^2 = 0$, $y'^2 + 2yy' + y^3(2 - ye^x)e^x = 0$ тәнликләринин мәхсуси һәлләрини, тәнлијин дискриминант әјриси вә үмуми һәллин гуршаjаны васитәсилә тапын.

3. Ашағыдакы натамам тәнликләри һәлл един:

а) $x^{2/3} + y'^{2/3} = a^{2/3}$, *Чаваб*: $x = a\cos^3 t$, $32y = a^2\sin 2t(3 + 2\sin^2 t - 8\sin^4 t) - 6a^2t + c$.

б) $y^{2/3} + y'^{2/3} = a^{2/3}$. *Чаваб*: $x = 3\operatorname{ctg} t + 3t + c$, $y = a\cos^3 t$.

4. $\sin y' + |\sin y'| = 0$ тәнлијинин үмуми һәллини тапын. Көстәрин ки, төрәмәси $(2\kappa - 1)\pi \leqslant y' \leqslant 2\kappa\pi$ $(\kappa = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$ шәртини өдәјән ихтијари $y = \varphi(x)$ функсијасы да онун һәллидир.

5. Параметр дахил етмәклә ашағыдакы тәнликләри һәлл един:

а) $y = xy' + x^\alpha\varphi(y')$; $(\alpha \neq 0, \alpha \neq 1)$ *Чаваб*: $x = \left\{[\varphi(p)]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\left(c + \frac{1-\alpha}{\alpha}\int[\varphi(p)]^{-\frac{1}{\alpha}}dp\right)\right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}$, $y = xp + x^\alpha\varphi(p)$.

б) $2y = 3xy' - y'^2$; *Чаваб*: $2xp^3 = c + p^4$, $4yp^2 = 3c + p^4$; $y = C$.

в) $y = xy' - 2(1 + y')^2$; *Чаваб*: $y = cx - 2(1+c)^2$, $8(x + y) = x^2$.

г) $y = 3xy'^2 + y'^3$; *Чаваб*: $2x(3p - 1)^2 = 3p^2(1 - 2p) + c$, $y = 3xp^2 + p^3$; $y = 0$; $27y = 9x + 1$.

ғ) $2x = \frac{y}{y'} - y^2y'^2$. *Чаваб*: $2p^2x = c - c^2p$, $py = c$, $32x^3 = -27y^4$.

6. Ашағыда верилмиш аиләләрин диференсиал тәнликләрини тапын:

а) $y = cx^2 + c^2$, *Чаваб*: $4x^4y = 2x^3y' + y'^2$.

б) $(y - c)^2 = 4xc$, *Чаваб*: $xy'^2 + 2xy' - y = 0$.

в) $y^2 + 2cxy = c^2$, *Чаваб*: $(x^2 + 1)y'^2 - y^2 = 0$.

г) $x = ct$, $y = \frac{c}{2}(1 + t^2)$, *Чаваб*: $xy'^2 - 2yy' + x = 0$.

7. $y=x$ дүз хəттинə тохунан ваһид радиуслу чеврəлəр аилəсинин диференсиал тəнлиjини тапын.

Чаваб: $[(x-y\pm\sqrt{2})^2-1]y'^2-2y'=1-(y\pm\sqrt{2}-x)^2$.

8. Тəпəлəри $y=x$ дүз хəтти үзəриндə јерлəшəн вə $y=x^2+2bx+c$ шəклиндə олан параболалар аилəсинин диференсиал тəнлиjини тапын.

Чаваб: $y''-2y'+4(x-y)=0$.

9. Верилмиш аилəлəрин ортогонал траjекториjаларыны тапын.

а) $x^2+2ay=a^2\,(a>0)$, *Чаваб*: $cx^2-2cy+1=0\,(c>0)$.

б) $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$, *Чаваб*: $(x^2+y^2)^2=2cxy$.

Көстəриш. Полjар координат системинə кечмəли.

в) $r=a(1-\cos\varphi)$, *Чаваб*: $r=c(1+\cos\varphi)$.

10. $y=ce^x$ аилəси илə 45°-ли бучаг əмəлə кəтирəн траjекториjалары гурун.

Чаваб: $(1+y)^2-ce^{x+y}=0$.

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2$ еллипслəр аилəсинин (a, b верилмиш əдəдлəрдир) ортогонал траjекториjаларыны тапын.

Чаваб: $y^{b^2}=cx^{a^2}$.

IV ФƏСИЛ

ДИФЕРЕНСИАЛ ТƏНЛИКЛƏР СИСТЕМИ

§ 1. ҮМУМИ АНЛАЈЫШЛАР ВƏ ТƏ'РИФЛƏР

Тəтбиги əһəмиjjəтли мəсəлəлəрин һəлли, үмумиjjəтлə ,бир нечə ахтарылан функсиjа вə онларын төрəмəлəри дахил олан диференсиал тəнликлəр системинə кəтирилир. Адəтəн механика вə физика мəсəлəлəрини һəлл едəркəн сəрбəст дəjишəн, заман олдуғундан, бундан сонра сəрбəст дəjишəни t илə, ахтарылан функсиjалары исə $x, y, z, \ldots$ вə jа $x_1, x_2, \ldots$ илə, онларын төрəмəлəрини исə $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$ вə с. ишарə едəчəjик. Ахтарылан функсиjалары $x_1, x_2, \ldots, x_n$ илə ишарə етсəк, *диференсиал тəнликлəр системини* үмуми һалда

$$F_i\left(t, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{(m_1)}, \ldots, x_n, \dot{x}_n, \ldots, x_n^{(m_n)}\right)=0, \quad i=1, \ldots, n \qquad (1)$$

шəклиндə jазмаг олар; бурада $F_1, F_2, \ldots, F_n$ функсиjалары $1+m_1+m_2+\cdots+m_n+n$ өлчүлү Евклид фəзасынын мүəjjəн G областында верилмиш функсиjалардыр.

Үмумиjjəтлə, (1) системиндə тəнликлəрин саjы илə ахтарылан функсиjаларын саjы еjни олмаjа билəр. Лакин биз тəнликлəрин саjы илə ахтарылан функсиjаларын саjы еjни олан системлəрə бахачағыг. (1) системиндə $n=1$ оларса, x_1 əвəзинə x, m_1 əвəзинə m jазмагла

$$F\left(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m)}\right)=0 \qquad (2)$$

тəнлиjини аларыг. $m>1$ олдугда белə тəнлиjə *јүксəк тəртибли тəнлик* деjилир.

Геjд едəк ки, $x_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ функсиjасынын (1) системиндə иштирак едəн төрəмəлəринин əн јүксəк тəртиблисинин тəртиби m_i исə m_i-jə (1) системинин x_i дəjишəнинə нəзəрəн тəртиби, $m_1+m_2+\cdots+m_n$ əдəдинə исə системин тəртиби деjилир. Тутаг ки, (1) системи əн јүксəк тəртиб төрəмəлəрə нəзəрəн һəлл олунандыр:

$$x_i^{(m_i)}=f_i\left(t, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_1^{(m_1-1)}, \ldots, x_n, \dot{x}_n, \ldots, x_n^{(m_n-1)}\right) \qquad (3)$$
$$i=1,2,\ldots,n.$$

Бу системə *јүксəк тəртиб төрəмəлəрə нəзəрəн һəлл олунмуш систем деjилир.*

Хүсуси һалда, (2) тəнлиjи m-чи тəртиб төрəмəjə нəзəрəн һəлл олунандырса, алынан

$$x^{(m)}=f\left(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(m-1)}\right) \qquad (4)$$

тəнлиjинə *јүксəк тəртиб төрəмəjə нəзəрəн һəлл олунмуш тəнлик деjилир.*

Əлавə функсиjалар дахил етмəклə (1) системини, һəр бир тəнлиjиндə ахтарылан функсиjаларын анчаг биринчи тəртиб төрəмəси иштирак едəн јени системə кəтирмəк олар. Доғрудан да,

$$\begin{aligned} &x_1=x_{11},\ \dot{x}_1=x_{12}, \ldots, x_1^{(m_1-1)}=x_{1m_1},\\ &x_2=x_{21},\ \dot{x}_2=x_{22}, \ldots, x_2^{(m_2-1)}=x_{2m_2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &x_n=x_{n1},\ \dot{x}_n=x_{n2}, \ldots, x_n^{(m_n-1)}=x_{nm_n} \end{aligned} \qquad (5)$$

ишарə етсəк, (1) системини

$$\begin{cases} \dot{x}_{11}=x_{12},\ \dot{x}_{12}=x_{13}, \ldots, \dot{x}_{1m_1-1}=x_{1m_1},\\ \dot{x}_{21}=x_{22},\ \dot{x}_{22}=x_{23}, \ldots, \dot{x}_{2m_2-1}=x_{2m_2},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot{x}_{n1}=x_{n2},\ \dot{x}_{n2}=x_{n3}, \ldots, \dot{x}_{nm_n-1}=x_{nm_n},\\ F_i(t, x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m_1}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, \dot{x}_{nm_n})=0,\\ i=1,2,\ldots,n \end{cases} \qquad (6)$$

системи илə əвəз етмəк олар.

Көстәрәк ки, (1) системи илә (6) системи еквивалентдир: (1) системинин мүәјјән һәлли верилдикдә (6) системинин бир һәллини гурмаг олар вә тәрсинә, (6) системинин мүәјјән һәлли верилдикдә (1) системинин бир һәллини гурмаг олар. Бунун үчүн әввәлчә (1) системинин һәллинин тә'рифини верәк.

Тутаг ки, (a,b) интервалында, ујғун олараг, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ тәртибдән төрәмәләри олан $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ функсијалары верилмишдир. Онда $t \in (a,b)$ үчүн

1) $\left(t, \varphi_1(t), \dot{\varphi}_1(t), \ldots, \varphi_1^{(m_1)}(t), \ldots, \varphi_n(t), \dot{\varphi}_n(t), \ldots, \varphi_n^{(m_n)}(t)\right) \in G,$

2) $F_i(t, \varphi_1(t), \dot{\varphi}_1(t), \ldots, \varphi_1^{(m_1)}(t), \ldots, \varphi_n(t), \dot{\varphi}_n(t), \ldots, \varphi_n^{(m_n)}(t)) = 0$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

оларса, $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ *функсијаларына (1) системинин (a,b) интервалында һәлли дејилир.*

Верилмиш (1) системинин (6) системинә кәтирилмә гајдасындан ајдындыр ки, $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ функсијалары (1) системинин (a,b) интервалында һәллидирсә:

$$x_{11} = \varphi_1(t), x_{12} = \dot{\varphi}_1(t), \ldots, x_{1m_1} = \varphi_1^{(m_1-1)}(t),$$
$$x_{21} = \varphi_2(t), x_{22} = \dot{\varphi}_2(t), \ldots, x_{2m_2} = \varphi_2^{(m_2-1)}(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n1} = \varphi_n(t), x_{n2} = \dot{\varphi}_n(t), \ldots, x_{nm_n} = \varphi_n^{(m_n-1)}(t)$$

функсијалары һәмин интервалда (6) системинин һәллидир.

Тәрсинә, тутаг ки, $x_{ij} = \psi_{ij}(t), i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m_i$ функсијалары (6) системинин һәллидир. Бурадан алыныр ки, $\psi_{11}(t), \psi_{21}(t), \ldots, \psi_{n1}(t)$ функсијаларынын ујғун олараг $m_1, m_2, \ldots, m_n$ тәртибдән төрәмәләри вар вә $x_1 = \psi_{11}(t)$, $x_2 = \psi_{21}(t), \ldots, x_n = \psi_{n1}(t)$ функсијалары (1) системинин һәллидир.

Хүсуси һалда, (3) системиндә $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1$ олдугда алынан

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

системинә *n тәртибли нормал систем дејилир.* Биз кәләчәкдә јалныз нормал системләри өјрәнәчәјик.

Сәрбәст дәјишән (7) системинин сағ тәрәфинә ашкар шәкилдә дахил олмадыгда, јә'ни систем

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

шәклиндә олдугда, она *автоном* вә ја *динамик* систем дејилир.

(7) системинин сағ тәрәфи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән хәтти оларса, белә системә *хәтти систем* дејилир.

$$\dot{x}_i = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \cdots + a_{in}(t)x_n + f_i(t), \tag{9}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

шәклиндә олан хәтти системә ***бирчинс олмајан хәтти систем,***

$$\dot{x}_i = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \cdots + a_{in}(t)x_n,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

системинә исә (9) системинә ујғун *бирчинс систем* дејилир. $a_{ij}(t) = a_{ij} = \text{const}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ олдугда, хәтти систем ***сабит әмсаллы хәтти систем адланыр.***

§ 2. НОРМАЛ СИСТЕМИН ҺӘЛЛИ ҺАГГЫНДА

а) ***Системин һәлли.*** Тутаг ки, $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары $n+1$ өлчүлү Евклид фәзасынын мүәјјән D областында тә'јин олунмушлар. Бу һалда дејирләр ки,

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

системи D областында верилмишдир.

Үмуми шәкилдә верилмиш (1) системинин һәллинин тә'рифинә әсасән, нормал системин һәллинин тә'рифи ашағыдакы шәкилдә олар.

Фәрз едәк ки, (a, b) интервалында диференсиалланан $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ функсијалары верилмишдир вә

1) $(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in D,\ t \in (a, b),$

2) $\dot{\varphi}_i(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)),\ t \in (a, b),\ i = 1, 2, \ldots, n$

шәртләри өдәнир. ***Онда $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ функсијаларына (7) системинин (a, b) интервалында һәлли дејилир.***

Системин һәлләрини тапмаг мәсәләсинә онун интегралланмасы дејилир. Системин интеграллланмасында әсас мәсәлә онун һәлләрини тапмаг вә онларын хассәләрини өјрәнмәкдән ибарәтдир.

б) *Һәндәси изаһ.* Тутаг ки, $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ функсијалары (7) системинин (a, b) интервалында тә'јин олунмуш һәр һансы һәллидир. Һәр бир $t \in (a, b)$ үчүн $(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$-јә $n+1$ өлчүлү Евклид фәзасынын нөгтәси кими бахсаг, t аргументи (a, b) интервалында дәјишдикдә бу нөгтәләр һәмин фәзада бир әјри тәсвир едәр. Бу әјријә системин $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ һәллинә ујғун ***интеграл әјриси дејилир.*** $t = t_0$ олдугда $\varphi_i(t_0) = x_i^0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ оларса, ***һәмин интеграл әјриси $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсиндән кечир.***

D областындан һәр һансы $M(t, x_1, \ldots, x_n)$ нөгтәси көтүрүб, бу нөгтәдә $f_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ функсијаларынын гијмәтләрини һесабламаг вә һәмин нөгтәдән истигамәтверичи косинуслары $1, f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n)$ әдәдләри илә мүтәнасиб олан дүз хәтт парчасы кечирәк. Бу гајда илә D областынын һәр бир нөгтәсиндә, (7) системинин көмәји илә бир истигамәт тә'јин етмиш олуруг. Белә истигамәтләр чохлуғуна ***истигамәтләр мејданы дејилир.*** Ајдындыр ки, верилмиш $(t, \varphi_1(t), \ldots,$

$\varphi_n(t)$) интеграл әјрисинин һәр бир нөгтәсиндә она чәкилән тохунанын истигамәти һәмин нөгтәдә меіданын истигамәти илә үст-үстә дүшүр. Демәли, *системи һәлл етмәк, һәндәси олараг һәр бир нөгтәсиндә чәкилмиш тохунаны, мејданын һәмин нөгтәдәки истигамәти илә үст-үстә дүшән әјриләри тапмагдан ибарәтдир.*

Системин сағ тәрәфиндәки $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ функсијаларындан һеч олмаса бири, верилмиш $P(t', x_1', \ldots, x_n')$ нөгтәсиндә $\frac{0}{0}$ шәкилли гејри-мүәјјәнлијә чеврилирсә, бу нөгтәдә мејданын истигамәти мүәјјән олунмур. Белә нөгтәдән кечән һәллә бахылмыр вә мүәјјән $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ һәлли

$$\lim_{t \to t'} \varphi_i(t) = x_i', \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

шәртини өдәјирсә, дејирләр ки, *бу һәлл P нөгтәсинә јанашыр.*

в) Коши мәсәләси. (7) нормал системинин

$$\varphi_1(t_0) = x_1^0, \ \varphi_2(t_0) = x_2^0, \ldots, \varphi_n(t_0) = x_n^0 \qquad (10)$$

шәртләрини өдәјән $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ һәллинин тапылмасы мәсәләсинә *Коши мәсәләси*, $t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ әдәдләринә исә *Коши мә'лумлары* вә ја *башланғыч мә'лумлар* дејилир.

Коши мәсәләсини һәлл етмәк, *һәндәси олараг, $M_0(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјрисини тапмаг демәкдир.*

Фәрз едәк ки, $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ функсијалары (7) нормал системинин (10) шәртләрини өдәјән вә мүәјјән $h > 0$ әдәди үчүн $(t_0 - h, t_0 + h)$ интервалында тә'јин олунмуш һәллидир. *Әкәр (7) системинин (10) шәртләрини өдәјән һәр бир башга $x_1 = \psi_1(t)$, $x_2 = \psi_2(t), \ldots, x_n = \psi_n(t)$ һәлли, мүәјјән $\delta > 0$, $(\delta \leqslant h)$* үчүн $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ *интервалында $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$ һәлли илә үст-үстә дүшүрсә, $M_0(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир,—дејилир.* Әкс һалда, *јә'ни M_0 нөгтәсиндән бирдән чох интеграл әјриси кечәрсә вә ја һәмин нөгтәдән кечән интеграл әјриси јохдурса, дејәчәјик ки, бу нөгтәдә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији позулур.*

Ашағыда исбат едәчәјик ки, $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары M_0 нөгтәсинин мүәјјән әтрафында кәсилмәздирләрсә, (7) системинин (10) шәртләрини өдәјән ***һеч олмаса бир һәлли вар. Әлавә олараг $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијаларынын M_0 нөгтәси әтрафында кәсилмәз $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ хүсуси төрәмәләри варса, бу һәлл јеканә олур.***

г) Үмуми, хүсуси вә мәхсуси һәлл. Тутаг ки, D областынын һәр бир нөгтәсиндән (7) системинин јеканә интеграл әјриси кечир вә n сајда $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ихтијари сабитләриндән асылы олан

$$x_i = \varphi_i(t, c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (11)$$

функсијалар аиләси ашағыдакы шәртләри өдәјир:

1) D областындан көтүрүлмүш һәр бир $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ нөгтәси үчүн (11) системи $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләринә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$c_i = \psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad (12)$$

2) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләринин (12) илә тә'јин олунан һәр бир гијмәтиндә (11) функсијалары (7) нормал системинин һәллидир. Онда (11) функсијалары аиләсинә D областында (7) нормал системинин *үмуми һәлли* дејилир.

Үмуми һәллдән Коши мәсәләсинин һәллини алмаг олар. Доғрудан да, (12)-јә әсасән $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләрини

$$c_i^0 = \psi_i(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

шәклиндә тә'јин едиб (11)-дә јазсаг, алынан

$$x_i = \varphi_i(t, c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

функсијалары (7) системинин (10) шәртләрини өдәјән һәлли олур. Бә'зән t аргументинин мүәјјән t_0 гијмәтини гејд едәрәк үмуми һәлдә $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләри әвәзинә ахтарылан функсијаларын $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ башланғыч гијмәтләрини көтүрүрләр. Бу заман (11) үмуми һәлли

$$x_i = \tilde{\varphi}_i(t, t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

шәклиндә јазылыр. Үмуми һәллин белә формасына *Коши формасы дејилир.*

Верилмиш һәллә ујғун олан интеграл әјриси үзәриндәки һәр бир нөгтәдә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији сахланарса, белә һәллә хүсуси һәлл дејилир.

Үмуми һәллин тә'рифиндән ајдындыр ки, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләринин (12) дүстурлары илә тә'јин олунан һәр бир гијмәтиндә ($\pm\infty$ дахил олмагла) үмуми һәллдән алынан һәлл хүсуси һәлдир.

Верилмиш һәллә ујғун олан интеграл әјрисинин һәр бир нөгтәсиндә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији позулан һәллә мәхсуси һәлл дејилир.

Тә'рифдән ајдындыр ки, D илә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији сахланан максимал областы ишарә етсәк, мәхсуси һәлли $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләринин һеч бир гијмәтиндә үмуми һәллдән алмаг олмаз вә мәхсуси һәлл варса, она ујғун олан интеграл әјриси анчаг бу областын сәрһәдиндә јерл-

шир. Демәли, һәмин интеграл әјриси һәм дә D областынын сәрһәдинин тәнлијини өдәмәлидир. D областынын сәрһәди ән чоху n өлчүлү олдуғундан алынып ки, мәхсуси һәлл ән чоху $n-1$ ихтијари сабитдән асылы ола биләр. Ајдындыр ки, бу һалда (7) системинин һәм дә D областынын һәмин сәрһәд нөгтәләри үчүн тә'јин олундуғу фәрз олунур.

Мисал 1.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = 3\sqrt[3]{y^2} \end{cases}$$

системиндә $f_1(t,x,y) = -x + y$, $f_2(t,x,y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ функсијалары t, x, y дәјишәнләринин фәзасында кәсилмәздирләр. Буна көрә дә фәзанын ихтијари нөгтәсиндән системин һеч олмаса бир интеграл әјриси кечир. Лакин $y = 0$ мүстәвиси үзәриндә $f_2(t,x,y)$ функсијасынын y-ә нәзәрән хүсуси төрәмәси мәһдуд олмадығындан, һәмин мүстәви үзәриндәки нөгтәләрдә һәллин јеканәлији позула бил р.

Системин икинчи тәнлијинин үмуми һәлли $y = (t + c_1)^3$ шәклиндәдир вә $y = 0$ онун мәхсуси һәллидир. Бунлары системин биринчи тәнлијиндә јеринә јазыб һәлл етсәк, $y > 0$ $y < 0$ областларында

$$x = c_2 e^{-t} + (c_1 + t)^3 - 3(c_1 + t)^2 + 6(c_1 + t) - 6,$$
$$y = (t + c_1)^3$$

үмуми һәллини вә

$$x = ce^{-t}, \ y = 0$$

шәклиндә һәллини аларыг. Икинчи һәлл мәхсуси һәллдир. Доғрудан да, $y = 0$ мүстәвиси үзәриндә көтүрүлмүш ихтијари $(t_0, x_0, 0)$ нөгтәсиндән бахылан системин

$$x = (x_0 + 6)e^{t_0 - t} + (t - t_0)^3 - 3(t - t_0)^2 + 6(t - t_0) - 6,$$
$$y = (t - t_0)^3$$

вә

$$x = x_0 e^{t_0 - t}, \ y = 0$$

интеграл әјриләри кечир.

ғ) *Системин интегралы. Биринчи интеграл. Үмуми интеграл.* Тутаг ки, (11) функсијалар аиләси D областында (7) нормал системинин үмуми һәллидир. Үмуми һәллин тә'рифинә көрә (11) системи D областында $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләринә нәзәрән (12) шәклиндә һәлл олунандыр. Демәли,

$$\psi_i(t, \varphi_1(t, c_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, \varphi_n(t, c_1, c_2, \ldots, c_n)) = c_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n \qquad (13)$$

ејниликләри өдәнир. Бурадан алырыг ки, $\psi_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијаларында $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументләри әвәзинә (7) системинин графики D областында јерләшән ихтијари һәллини јаздыгда һәмин функсијалар ејнилик кими сабитә чеврилирләр. Белә ки, мүхтәлиф һәлләри јаздыгда мүхтәлиф сабитләр алыныр.

Ејнилик кими сабит олмајан $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасында $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументләри әвәзинә (7) системинин графики D областында јерләшән ихтијари һәллини јаздыгда һәмин функсија ејнилик кими сабитә чевриләрсә, она (7) системинин интегралы,

$$\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = c \qquad (14)$$

мүнасибәтинә исә биринчи интегралы дејилир, бурада c $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасынын гијмәтләри чохлуғундан көтүрүлмүш ихтијари әдәддир.

Тә'рифдән ајдындыр ки, (12) мүнасибәтләри илә тә'јин олунан $\psi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары (7) системинин интегралларыдыр вә (12) бәрабәрликләринин һәр бири исә онун биринчи интегралыдыр.

Тутаг ки, $\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасы (7) системинин D областында диференсиалланан интегралыдыр. Онда D областындан ихтијари $(\tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ нөгтәси көтүрүб, (7) системинин $x_1(\tau) = \xi_1$, $x_2(\tau) = \xi_2, \ldots, x_n(\tau) = \xi_n$ шәртләрини өдәјән һәллини $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ илә ишарә етсәк,

$$\psi(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \equiv c. \qquad (15)$$

Алынан ејнилијин t-јә нәзәрән төрәмәсини тапаг:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\dot{x}_1(t) + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}\dot{x}_n(t) \equiv 0. \qquad (16)$$

Ахырынчы ејнилији, $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ функсијалары (7) нормал системинин һәлли олдуғундан,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1} f_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) + \cdots +$$
$$+ \frac{\partial\psi}{\partial x_n} f_n(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \equiv 0 \qquad (17)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу ејниликдә $t = \tau$ јазаг:

$$\frac{\partial\psi(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial t} + \frac{\partial\psi(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial x_1} f_1(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) + \cdots +$$
$$+ \frac{\partial\psi(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial x_n} f_n(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) = 0.$$

Дикәр тәрәфдән, $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ нөгтәси D областынын ихтијари нөгтәси олдуғундан, сонунчу бәрабәрлији белә јаза биләрик:

$$\frac{\partial\psi(t,x_1,\ldots,x_n)}{\partial t}+\frac{\partial\psi(t,x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1}f(t,x_1,\ldots,x_n)+\cdots+$$
$$+\frac{\partial\psi(t,x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_n}f_n(t,x_1,\ldots,x_n)=0. \qquad (18)$$

Алынан (18) ејнилијинин сол тәрәфинә $\psi(t, x_1, \ldots, x_n)$ функсијасынын (7) системинә әсасән төрәмәси дејилир вә белә ишарә едилир: $\psi_{(7)}$.

Беләликлә, $\psi(t, x_1, \ldots, x_n)$ функсијасы (7) системинин диференсиалланан интегралы исә, онун һәмин системә әсасән төрәмәси сыфыр олур. Бурадан ајдындыр ки, $\psi(t, x_1, \ldots, x_n)$ функсијасы

$$\frac{\partial u}{\partial t}+f_1(t,x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+f_n(t,x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \qquad (19)$$

хүсуси төрәмәли тәнлијинин һәллидир.

Көстәрәк ки, (19) тәнлијинин һәр бир $u=\psi(t, x_1, \ldots, x_n)$ һәлли (7) нормал системинин диференсиалланан интегралыдыр. Доғрудан да, $u=\psi(t, x_1, \ldots, x_n)$ функсијасы (19) хүсуси төрәмәли тәнлијинин һәлли исә, (18) ејнилији өдәнир. Бу ејниликдә $x_1, x_2, \ldots, x_n$ әвәзинә (7) системинин һәр һансы $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ һәллини јазсаг, (17) ејнилијини вә бурадан да (16) ејнилијини аларыг. Бу исә көстәрир ки, (15) ејнилији өдәнир.

Апарылан мүһакимәләрә әсасән, системин интегралына ашағыдакы шәкилдә дә тә'риф вермәк олар:

Диференсиалланан вә $\frac{\partial\psi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x_n}$ төрәмәләриндән һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан $\psi(t, x_1, \ldots, x_n)$ функсијасынын (7) нормал системинә әсасән төрәмәси ејнилик кими сыфра бәрабәрдирсә, она (7) системинин диференсиалланан интегралы дејилир.

Гејд едәк ки, (12) биринчи интеграллар системинин белә бир хассәси вар ки, бу системи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән һәлл етдикдә (7) нормал системинин үмуми һәлли алыныр. *Белә хассәјә малик олан n сајда биринчи интеграллар системинә (7) нормал системинин үмуми интегралы дејилир.*

Үмумијјәтлә, верилмиш n сајда биринчи интегралын көмәји илә нә вахт системин үмуми һәллини гурмағын мүмкүн олдуғуну көстәрмәк үчүн, функсијалар системинин асылы олуб-олмамасы анлајышыны верәк.

Тутаг ки, D областында тә'јин олунмуш

$$u_1=\psi_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n=\psi_n(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (*)$$

функсијалары үчүн елә $F(u_1, \ldots, u_n)$ функсијасы вардыр ки,

1) бу функсија $u_1, \ldots, u_n$ дәјишәнләринин n өлчүлү фәзасында тә'јин олунуб вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар;

2) $F(u_1, \ldots, u_n)$ функсијасы фәзанын һеч бир алт областында ејнилик кими сабитә чеврилмир;

3) D областынын һәр бир гапалы мәһдуд алт областында

$$\Phi(t, x_1, \ldots, x_n)=F(\psi_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(t, x_1, \ldots, x_n))\equiv 0$$

ејнилији өдәнир. Онда дејирләр ки, (*) функсијалары D областында функсионал асылыдырлар (вә ја садәчә олараг асылыдырлар).

Әкс һалда, **(*)** функсијалары D областында *функсионал асылы олмајан адланыр. (7) системинин функсионал асылы олмајан n сајда интегралына онун үмуми интегралы дејилир.*

Исбат едәчәјик ки, әкәр $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсијалары D областында кәсилмәздирләрсә вә кәсилмәз $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j=1, 2, \ldots, n$, хүсуси төрәмәләри варса, (7) системинин функсионал асылы олмајан n сајда диференсиалланан интеграллары, јә'ни үмуми интегралы вар. (бах: VI фәсил, Теорем 7).

Теорем 1. *Тутаг ки, (*) функсијалары D областында (7) нормал системинин диференсиалланан интегралларыдыр. Бу интегралларын функсионал асылы олмамасы үчүн*

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (20)$$

шәртинин өдәнмәси зәрури вә кафидир.

Зәрурилијин исбаты. Тутаг ки, **(*)** функсијалары (7) системинин D областында функсионал асылы олмајан диференсиалланан интегралларыдыр. Анализдән мә'лум олан теоремә әсасән, бурадан алыныр ки, һәр бир $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)\in D$ нөгтәсиндә

$$M=\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi_1}{\partial t} & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial\psi_n}{\partial t} & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

матрисинин рангы n-ә бәрабәрдир.

Ајдындыр ки, $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсиндә $\frac{\partial\psi_i}{\partial t}=0$, $i=1, 2, \ldots, n$ оларса, бу нөгтәдә (20) шәрти өдәнир. Она көрә дә $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсиндә $\frac{\partial\psi_1}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial\psi_n}{\partial t}$ төрәмәләриндән һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан һала бахаг.

Шәртә көрә (*) функсиіалары D областында (7) системинин диференсиалланан интеграллары олдуғундан, бу областда

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}f_1+\cdots+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}f_n=0,$$
$$\frac{\partial\psi_2}{\partial t}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}f_1+\cdots+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_n}f_n=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial\psi_n}{\partial t}+\frac{\partial\psi_n}{\partial x_1}f_1+\cdots+\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}f_n=0$$

мүнасибәтләри өдәнәр. Бу мүнасибәтләри $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәси үчүн јазыб $z_1=f_1, \ldots, z_n=f_n$ ишарә етсәк,

$$\begin{cases}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}z_1+\cdots+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}z_n=-\frac{\partial\psi_1}{\partial t},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1}z_1+\cdots+\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}z_n=-\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\end{cases}$$

бәрабәрликләрини алырыг. Алынмыш бәрабәрликләрә $z_1,\ldots,z_n$ мәчһулларына нәзәрән хәтти бирчинс олмајан чәбри тәнликләр системи кими бахаг. Бу систем уіушан олдуғундан, мәчһулларын әмсалларындан дүзәлмиш матрисин рангы илә кенишләнмиш матрисин рангы бәрабәрдир. M матрисинин рангы n олдуғундан, бурадан (20) шәртинин өдәнмәси алыныр.

Кафилијин исбаты. Тутаг ки, D областында (20) шәрти өдәнир, лакин (*) функсијалары функсионал асылыдыр, јә'ни ејнилик кими сабит олмајан вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан елә $F(u_1, \ldots, u_n)$ функсијасы вар ки, D областынын һәр бир гапалы мәһдуд алт областында

$$F(\psi_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \psi_n(t, x_1, \ldots, x_n))\equiv 0$$

ејнилији өдәнир. Бу ејнилији $x_1, \ldots, x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән диференсиалласаг:

$$F_{u_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}+\cdots+F_{u_n}\frac{\partial\psi_n}{\partial x_1}\equiv 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_{u_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}+\cdots+F_{u_n}\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\equiv 0$$

ејниликләрини аларыг. Шәртә көрә D областында $F_{u_1},\ldots,F_{u_n}$ төрәмәләринин һамысы бирдән сыфыр олмадығындан, бу ејниликләр (20) шәртинә зиддир. Теорем исбат олунду.

Тутаг ки, $\psi_1, \ldots, \psi_n$ функсијалары D областында (7) системинин диференсиалланан вә функсионал асылы олмајан интегралларыдыр. Онда (20) шәртинә әсасән

$$\begin{cases}\psi_1(t, x_1, \ldots, x_n)=c_1,\\ \psi_2(t, x_1, \ldots, x_n)=c_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \psi_n(t, x_1, \ldots, x_n)=c_n\end{cases}$$

системини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән һәлл етмәк олар вә алынан

$$\begin{cases}x_1=\varphi_1(t, c_1, \ldots, c_n),\\ x_2=\varphi_2(t, c_1, \ldots, c_n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n=\varphi_n(t, c_1, \ldots, c_n)\end{cases}$$

функсијалар аиләси (7) системинин D областында үмуми һәллидир; бурада $c_1, c_2, \ldots, c_n$-ләр (*) функсијаларынын гијмәтләри чохлуғундан ихтијари сабитләрдир.

Системин һәр һансы биринчи интегралы мә'лум олдугда онун тәртибини бир ваһид азалтмаг олар. Доғрудан да тутаг ки,

$$\psi(t, x_1, \ldots, x_n)=c \tag{21}$$

(7) системинин биринчи интегралыдыр вә (21) тәнлији x_n-ә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$x_n=\omega(t, x_1, \ldots, x_{n-1}, c). \tag{22}$$

Онда x_n-ин бу гијмәтини (7) системинин биринчи $n-1$ тәнлијиндә јазсаг, $n-1$ тәртибли

$$x_i=f_i(t, x_1, \ldots, x_{n-1}, \omega(t, x_1, \ldots, x_{n-1}, c)),\ i=1, 2, \ldots, n-1$$

системини аларыг. Бу системи һәлл едиб (22) мүнасибәтини дә нәзәрә алсаг, (7) системинин үмуми һәллини гура биләрик.

Бу мүһакимәләрдән ајдындыр ки, (7) системинин k сајда функсионал асылы олмајан биринчи интегралы мә'лум оларса, онун тәртибини k ваһид азалтмаг олар.

Бир чох һалларда верилмиш системи онунла ејникүчлү олан, лакин асан интегралланан јени системлә әвәз етмәклә биринчи интегралларыны алмаг олар

Мисал 2.

$$\begin{cases}\dot x=x(x+y),\\ \dot y=-y(x+y)\end{cases}$$

системинә бахаг. Системин биринчи тәнлијини y-ә, икинчи тәнлијини x-ә вуруб тәрәф-тәрәфә топласаг:

$$\dot x y+\dot y x=0$$

тәнлијини аларыг. Бурадан системин

$$xy=c_1$$

биринчи интегралыны тапарыг вә онун көмәји илә системин үмуми һәллинин гурулмасы мәсәләси $x = c_1 + x^2$ тәнлијинин үмуми һәллинин гурулмасы мәсәләсинә кәлир.

Мисал 3.
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x + y + t \end{cases}$$

системинин асылы олмајан интегралларыны тапаг. Бунун үчүн системи

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(x + y) = 2(x + y) + t, \\ \frac{d}{dt}(x - y) = -t \end{cases}$$

системи илә әвәз едәк. Алынан систем интегралланыр вә

$$(4x + 4y + 2t + 1)e^{-2t} = c_1,$$
$$2x - 2y + t^2 = c_2$$

шәклиндә ики биринчи интегралыны тапмаг олар. Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\psi_1(t, x, y) = (4x + 4y + 2t + 1)e^{-2t},$$
$$\psi_2(t, x, y) = 2x - 2y + t^2$$

интеграллары функсионал асылы дејилдир вә буна көрә дә

$$x = Ae^{2t} - \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8} + B,$$

$$y = Ae^{2t} + \frac{t^2}{4} - \frac{t}{4} - \frac{1}{8} - B \quad \left(A = \frac{c_1}{8}, \ B = \frac{c_2}{4}\right)$$

функсијалары бахылан системин үмуми һәлли олур.

д) *Системин симметрик формасы.* (7) нормал системини

$$dt = \frac{dx_i}{f_i(t, x_1, \ldots, x_n)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

вә ја

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{f_1(t, x_1, \ldots, x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, \ldots, x_n)} \tag{23}$$

шәклиндә јазмаг олар.

$$\frac{dy_1}{X_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})} = \frac{dy_2}{X_2(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})} = \cdots = \frac{dy_{n+1}}{X_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})} \tag{24}$$

системинә бахаг. Бурадан aјдындыр ки, $t = y_1$, $x_1 = y_2, \ldots, x_n = y_{n+1}$, $X_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \equiv 1$, $X_{i+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \equiv f_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ гәбул етсәк, (23) системи (24) системинин хүсуси һалыдыр. *(24) системинә ади диференсиал тәнликләр системинин симметрик формасы дејилир.*

Симметрик системин нормал системдән фәрги ондан ибарәтдир ки, белә системә дәјишәнләр еjни һүгугла дахил олурлар.

Фәрз едәчәјик ки, $X_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ функсијалары мүәјјән D областында кәсилмәздирләр вә бу областын һеч бир нөгтәсиндә һамысы бирдән сыфыр дејил.

Тутаг ки, $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{n+1}^0) \in D$ нөгтәсиндә $X_{n+1}(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{n+1}^0) \neq 0$. Онда (24) системиндә y_{n+1}-ә сәрбәст дәјишән кими бахараг $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_{n+1}^0)$ нөгтәсинин әтрафында ону n тәртибли

$$\frac{dy_i}{dy_{n+1}} = \frac{X_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})}{X_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{25}$$

нормал системи илә әвәз едә биләрик. *Бу нормал системин һәлли, интегралы, биринчи интегралы, үмуми һәлли вә үмуми интегралы, уjғун олараг, (24) симметрик системинин һәлли, интегралы, биринчи интегралы, үмуми һәлли вә үмуми интегралы адланыр.*

Гејд едәк ки, $\psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ функсијасы D областында (24) симметрик системинин диференсиалланан интегралы исә, $u = \psi(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$ функсијасы һәмин областда

$$X_1(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})\frac{\partial u}{\partial y_1} + X_2(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})\frac{\partial u}{\partial y_2} + \cdots + X_{n+1}(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})\frac{\partial u}{\partial y_{n+1}} = 0, \tag{26}$$

хүсуси төрәмәли тәнлијинин һәлли олур.

Бир чох һалларда нормал системин симметрик шәклә кәтирилмәси онун биринчи интегралларыны тапмаг үчүн әлверишли олур. Системи (24) шәклиндә јаздыгдан сонра, диференсиаллара нәзәрән хәтти олан елә формалар ахтарылыр ки, сол тәрәфдә там диференсиал, сағ тәрәфдә исә сыфыр олсун. Алынан там диференсиалы интегралламараг сабитә бәрабәр етмәклә биринчи интеграл тапылыр. Бу гајда илә n сајда функсионал асылы олмајан интеграл гурмаг мүмкүн олса, системин үмуми интегралыны вә демәли, үмуми һәллини гурмаг олар.

Мисал 4.

$$\frac{dy_1}{y_2+y_3}=\frac{dy_2}{y_1+y_3}=\frac{dy_3}{y_1+y_2}$$

системинин үмуми интегралыны тураг.

Һәлли. Чевирмәләрлә алынмыш

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1-dy_2}{y_1-y_2}=\dfrac{dy_2-dy_3}{y_2-y_3},\\ \dfrac{d(y_1+y_2+y_3)}{2(y_1+y_2+y_3)}=\dfrac{dy_1-dy_2}{-(y_1-y_2)}.\end{cases}$$

системини интеграллајаг. Бу системин һәр тәнлији там диференсиал шәклиндәдир вә онлары интеграллаcаг

$$\frac{y_1-y_2}{y_2-y_3}=c_1,$$

$$(y_1+y_2+y_3)(y_1-y_2)^2=c_2$$

биринчи интегралларыны аларыг.

§ 3. ЈҮКСӘК ТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

а) Үмуми анлајышлар вә тә'рифләр. Биринчи параграфда гејд етдик ки, $n>1$ олдугда

$$F(t,\ x,\ \dot{x},\ \ldots,\ x^{(n)})=0 \qquad (2')$$

шәклиндә олан тәнлијә јүксәк тәртибли тәнлик дејилир вә онун тәртиби тәнликдә иштирак едән ән јүксәк тәртиб төрәмә илә мүәјјән олунур. Бу тәнликдән $x^{(n)}$-ә нәзәрән һәлл етмәклә алынан

$$x^{(n)}=f(t,\ x,\ \dot{x},\ \ldots,\ x^{(n-1)}) \qquad (4')$$

тәнлијинә ән јүксәк тәртиб төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш тәнлик дејилир.

Јухарыда көстәрдијимиз гајдаја әсасән

$$x_1=x,\ x_2=\dot{x}_1=\dot{x},\ \ldots,\ x_n=\dot{x}_{n-1}=x^{(n-1)} \qquad (27)$$

әвәзләмәләри васитәсилә (4′) тәнлијини

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=x_3,\\ \ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dot{x}_{n-1}=x_n,\\ \dot{x}_n=f(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\end{cases} \qquad (28)$$

нормал системинә кәтирмәк олар. Одур ки, нормал систем үчүн вердијимиз анлајышлары вә тә'рифләри ујғун дәјишикликләрлә (4′) тәнлији үчүн дә вермәк олар.

Тутаг ки, $x_1=\varphi_1(t),\ x_2=\varphi_2(t),\ \ldots,\ x_n=\varphi_n(t)$ функсијалары (28) системинин $(a,\ b)$ интервалында

$$x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0,\ \ldots,\ x_n(t_0)=x_n^0$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллидир. Онда (27) әвәзләмәләриндән ајдындыр ки, $x=\varphi_1(t)$ функсијасы (4′) тәнлијинин $(a,\ b)$ интервалында

$$x(t_0)=x_1^0,\ \dot{x}(t_0)=x_2^0,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0)=x_n^0 \qquad (29)$$

шәртләрини өдәјән һәллидир.

(4′) тәнлијинин

$$x(t_0)=x_0,\ \dot{x}(t_0)=x_0^1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{n-1} \qquad (30)$$

шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә *Коши мәсәләси*, $t_0, x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}$ *әдәдләринә исә Коши мә'лумлары* дејилир.

Ајдындыр ки, $x=\varphi(t)$ функсијасы (4′) тәнлијинин $(a,\ b)$ интервалында (30) шәртләрини өдәјән һәлли исә,

$$x_1=\varphi(t),\ x_2=\dot{\varphi}(t),\ \ldots,\ x_n=\varphi^{(n-1)}(t)$$

функсијалары (28) системинин

$$x_1(t_0)=x_0,\ x_2(t_0)=x_0^1,\ \ldots,\ x_n(t_0)=x_0^{n-1}$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллидир. Тә'рифә көрә $(t,\ \varphi(t),\ \dot{\varphi}(t),\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(t)),\ t\in(a,\ b)$ нөгтәләринин һәндәси јери (28) системинин $(t_0,\ x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1})$ нөгтәсиндән кечән интеграл әјриси олдуғундан, она (4′) тәнлијинин һәмин нөгтәдән кечән *интеграл әјриси* дејәҹәјик.

Бу мүһакимәләр көстәрир ки, (4′) тәнлији үчүн гојулмуш Коши мәсәләси, (28) системи үчүн гојулмуш мүәјјән Коши мәсәләсинә еквивалентдир.

Хүсуси һалда, $n=2$ олдугда (4′) тәнлији

$$\ddot{x}=f(t,\ x,\ \dot{x}) \qquad (4'')$$

шәклинә дүшүр вә онун үчүн башланғыч шәртләри

$$x(t_0)=x_0,\ \dot{x}(t_0)=x_0^1 \qquad (30')$$

олур. (4″) тәнлијинин (30′) шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләси, һәндәси олараг һәмин тәнлијин tOx мүстәвиси үзәриндә $(t_0,\ x_0)$ нөгтәсиндән кечән вә бу нөгтәдә тохунанынын бучаг әмсалы x_0^1 олан интеграл әјрисини (әјриләрини) тапмаг демәкдир.

Нормал системин үмуми һәллинин тә'рифиндән ајдындыр ки,

$x_i=\varphi_i(t,\ c_1, c_2, \ldots, c_n),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ функсијалары (28) системинин D областында үмуми һәлли олдугда

$$x=\varphi_1(t,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n) \qquad (31)$$

функсиjасы һəмин областда (4′) тəнлиjинин үмуми һəлли олур.

Үмуми һəллдəн (4′) тəнлиjинин (30) **башланғыч** шəртлəрини өдəjəн һəллини алмаг үчүн $c_1, c_2, \ldots, c_n$ **сабитлəрини**

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) = x_0, \\ \varphi_1(t_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) = x_0^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0, c_1, c_2, \ldots, c_n) = x_0^{n-1} \end{cases} \qquad (32)$$

системиндəн тə'jин етмəк лазымдыр.

Тутаг ки, (32) системиндəн $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитлəри

$$c_i^0 = \psi_i(t_0, x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

шəклиндə тə'jин олунмушдур. Онда (4′) тəнлиjинин (30) шəртлəрини өдəjəн һəлли

$$x = \varphi_1(t, \psi_1(t_0, x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}), \ldots,$$
$$\ldots, \psi_n(t_0, x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}))$$

олар. Бурада t_0 əдəдини геjд едəрəк $x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}$ əдəдлəрини дəjишəн көтүрмəклə алынан

$$x = \varphi(t, t_0, x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}) \qquad (33)$$

функсиjасына үмуми һəлл кими бахмаг олар. *Үмуми һəллин белə формасына Коши формасы* деjилир.

Һəр бир нөгтəсиндə Коши мəсəлəсинин һəллинин jеканəлиjи сахланан интеграл əjрисинə уjғун олан һəллə *хүсуси һəлл*, jеканəлик позулан һəллə *мəхсуси һəлл* деjилир.

Геjд едəк ки, системдə олдуғу кими, (4′) тəнлиjинин мəхсуси һəлли ән чоху $n-1$ саjда ихтиjари сабитдəн асылы ола билəр.

Мисал 1.

$$\dddot{x} = 3\sqrt[3]{\ddot{x} - t} + 1$$

тəнлиjини һəлл едəк.

Һəлли. $x = y + t$ əвəзлəмəси апарсаг

$$\dot{y} = 3\sqrt[3]{y}$$

тəнлиjини аларыг. Бу тəнлиjин үмуми һəлли

$$y = (2t + c_1)^{3/2}$$

шəклиндəдир вə $y = 0$ онун мəхсуси һəллидир. Онда

$$x = \frac{t^3}{6} + \frac{1}{35}\,(2t + c_1)^{7/2} + c_2 t + c_3$$

бахылан тəнлиjин үмуми һəлли

$$x = \frac{t^3}{6} + a_1 t + a_2$$

мəхсуси һəлли олар.

б) Нормал системин jүксəк тəртибли тəнлиjə кəтирилмəси. Jухарыда көстəрдик ки, əлавə функсиjалар дахил етмəклə jүксəк тəртибли тəнлиjи нормал системə кəтирмəк олар. Бə'зи һалларда исə нормал системи jүксəк тəртибли тəнлиjə кəтирмəк əлверишли олур.

Тутаг ки, (7) системиндə $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсиjаларынын D областында $(n-1)$ тəртибə гəдəр ($(n-1)$-чи тəртиб төрəмə дə дахил олмагла) кəсилмəз хүсуси төрəмəлəри вар*.

Системин биринчи тəнлиjиндə $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дəjишəнлəринə t дəjишəнинин функсиjасы кими бахараг диференсиаллаjаг. Бу заман (7) системини дə нəзəрə алараг jаза билəрик:

$$\ddot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}\dot{x}_j = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} f_j \equiv \Phi_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (34_1)$$

Бурадан, һəр дəфə (7) системини нəзəрə алмагла, $n-2$ дəфə ардычыл олараг диференсиаллаjаг:

$$\dddot{x}_1 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_j}\dot{x}_j = \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_j} f_j \equiv \Phi_3(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (34_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1^{(n-1)} = \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial x_j}\dot{x}_j = \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{n-2}}{\partial x_j} f_j \equiv$$
$$\equiv \Phi_{n-1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (34_{n-2})$$

$$x_1^{(n)} = \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_j}\dot{x}_j = \frac{\partial \Phi_{n-1}}{dt} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_j} f_j \equiv \Phi_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (34_{n-1})$$

---

* Һəллин варлығы һаггында икинчи фəсилдə вердиjимиз теоремин исбат гаjдасы илə көстəрмəк олар ки, бу заман (7) системинин һəр бир һəллинин n-чи тəртибə гəдəр кəсилмəз төрəмəлəри вар.

Тутаг ки,

$$\begin{cases} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \dot{x}_1, \\ \Phi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \ddot{x}_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{(n-1)} \end{cases} \qquad (35)$$

системи $x_2, x_3, \dots, x_n$ мәчһулларына нәзәрән һәлл олунандыр:

$$x_i = \omega_i\left(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n-1)}\right), \quad i = 2, 3, \dots, n. \qquad (36)$$

Алынан гиjмәтләри (34_{n-1}) мүнасибәтиндә јеринә јазсаг, x_1-ә нәзәрән n тәртибли

$$x_1^{(n)} = \Phi_n\left(t, x_1, \omega_2\left(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n-1)}\right), \dots, \omega_n\left(t, x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n-1)}\right)\right) \qquad (37)$$

тәнлијини аларыг.

Беләликлә, $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ функсијаларынын $n-1$ тәртибә гәдәр кәсилмәз хүсуси төрәмәләри варса вә (35) системи $x_2, x_3, \dots, x_n$ мәчһулларына нәзәрән һәлл олунандырса, (7) системиндән (37) тәнлијини алмаг олар. Бу исә көстәрир ки, $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, $\dots$, $x_n = \varphi_n(t)$ функсијалары (7) системинин (a, b) интервалында һәр һансы һәлли исә, $x_1 = \varphi_1(t)$ функсијасы һәмин интервалда (37) тәнлијинин һәллидир.

Анализ курсундан мә'лумду ки,

$$\frac{D(f_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_3} \dots & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (38)$$

олдугда (35) системи $x_2, x_3, \dots, x_n$ мәчһулларына нәзәрән һәлл олунандыр.

Көстәрәк ки, $x_1 = \varphi_1(t)$ функсијасы (37) тәнлијинин һәр һансы һәлли исә, (38) шәрти өдәндикдә (36) мүнасибәтләри илә тә'јин олунан $x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$ функсијалары $x_1 = \varphi_1(t)$ функсијасы илә бирликдә (7) системинин һәллидир.

Доғрудан да, $x_1 = \varphi_1(t)$ функсијасы (37) тәнлијинин һәлли олдуғундан, бу функсија (36) мүнасибәтләри илә тә'јин олунан $x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$ функсијалары илә бирликдә (35) бәрабәрликләрини ejнилијә чевирир. Демәли, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ функсијалары (7) системинин биринчи тән-

лијини өдәјирләр. Буну нәзәрә алараг $(34_1), (34_2), \dots, (34_{n-1})$ бәрабәрликләринин икинчи һиссәсиндән үчүнчү һиссәсини чыхмагла

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\dot{x}_2 - f_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\dot{x}_3 - f_3) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\dot{x}_n - f_n) = 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(\dot{x}_2 - f_2) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}(\dot{x}_3 - f_3) + \dots + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_n}(\dot{x}_n - f_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_2}(\dot{x}_2 - f_2) + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_3}(\dot{x}_3 - f_3) + \dots + \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial x_n}(\dot{x}_n - f_n) = 0 \end{cases}$$

бәрабәрликләрини аларыг.

Бу бәрабәрликләрә $\dot{x}_2 - f_2, \dots, \dot{x}_n - f_n$ фәргләринә нәзәрән хәтти бирчинс тәнликләр системи кими бахараг (38) шәртинә әсасән аларыг ки,

$$\dot{x}_2 - f_2 = 0, \dots, \dot{x}_n - f_n = 0$$

ejниликләри өдәнир. Бу исә көстәрир ки, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ функсијалары (7) системинин галан тәнликләрини дә өдәјир.

Ајдындыр ки, јухарыдакы әмәлијјатлары апаркән үмумилији позмадан, һәмишә системин биринчи тәнлијини көтүрмәк олар, әкс һалда мәчһулларын нөмрәсини дәјишмәклә буна наил ола биләрик.

Гејд едәк ки, (38) шәрти өдәнмәдикдә (35) системи $x_2, x_3, \dots, x_n$ мәчһулларына нәзәрән һәлл олунмаја биләр. Бу заман (7) нормал системини, үмумијјәтлә, n тәртибли бир тәнлијә кәтирмәк мүмкүн олмур, лакин бу системдән һәр биринин тәртиби n-дән аз олан бир груп тәнликләр алмаг олур ки, онларын тәртибләри чәми n-ә бәрабәр олур.

Мисал 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \dot{y} = x^2 y + z, \\ \dot{z} = y - z \end{cases}$$

системини бир јүксәк тәртибли тәнлијә кәтирәк.

Системин биринчи тәнлијини t-јә нәзәрән ики дәфә ардычыл олараг диференсиаллајаг:

$$\ddot{x} = y + x^2 y,$$
$$\dddot{x} = (x^2 y + z)(1 + x^2) + 2xy\dot{x}.$$

Бурадан алынан

$$\begin{cases} \dot{x} = y + z, \\ \ddot{x} = y + x^2 y \end{cases}$$

системиндән y, z дәјишәнләрини тә'јин едиб $\dddot{x}$-ин ифадәсиндә јеринә јазсаг, үч тәртибли

$$\dddot{x} = (x^2 - 1)\ddot{x} + \left(1 + x^2 + \frac{2x\ddot{x}}{1 + x^2}\right)\dot{x}$$

тәнлијини аларыг.

Мисал 3.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax, \\ \dot{y} = by + cz, \quad c \neq 0, \\ \dot{z} = ey + \gamma z \end{cases}$$

үчтәртибли системини

$$\dot{x} = ax,$$
$$\ddot{y} = (b + \gamma)\dot{y} + (ce - b\gamma)y$$

тәнликләринә кәтирмәк олар вә бу тәнликләрин тәртибләринин чәми үчдүр.

в) Јүксәк тәртиб төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш тәнликләр һаггында. Тутаг ки,

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0 \tag{2'}$$

тәнлији верилмишдир. Бу тәнлијин *(30) башланғыч шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә Коши мәсәләси* дејилир.

Фәрз едәк ки, (2′) тәнлијини $x^{(n)}$-ә нәзәрән һәлл етмәклә

$$x^{(n)} = f_\kappa(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}), \ \kappa = 1, 2, \ldots \tag{39}$$

тәнликләрини алмаг мүмкүндүр.

Алынмыш тәнликләрин үмуми һәлләри күллисинә (2′) тәнлијинин *үмуми һәлли* дејилир. Ајдындыр ки, (2′) тәнлијинин (30) шәртләрини өдәјән һәлләринин сајы, (39) тәнликләринин һәмин шәртләри өдәјән һәлләринин сајындан аз дејил.

Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш бир тәртибли тәнликләрдә олдуғу кими, (2′) тәнлијинин (30) шәртләрини өдәјән һәлләринин сајы

$$F(t_0, x_0, x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}, z) = 0$$

тәнлијиндән тә'јин олунан мүхтәлиф z көкләринин сајына бәрабәр олдугда дејирләр ки, *Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир.* Әкс һалда исә Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији позулур.

г) *Аралыг интеграл, биринчи интеграл вә тәнлијин тәртибинин азалдылмасы.* Тутаг ки, n сајда $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләриндән асылы олан

$$\Phi(t, x, c_1, \ldots, c_n) = C \tag{40}$$

аиләси верилмишдир. Аиләнин диференсиал тәнлијини гурмаг үчүн (40) тәнлијиндә x-ә t-нин функсијасы кими бахараг ону ардычыл олараг n дәфә диференсиалламагла алынан

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x} = 0, \\ &\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t}\dot{x} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\dot{x}^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\ddot{x} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial^n\Phi}{\partial t^n} + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial x}x^{(n)} = 0 \end{aligned} \tag{41}$$

тәнликләри илә (40) тәнлијиндән $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләрини јох етмәк лазымдыр. Бу заман (2′) шәклиндә диференсиал тәнлик алынып ки, һәмин тәнлик (40) аиләсинин диференсиал тәнлији олур.

Фәрз едәк ки, x функсијасынын κ тәртибә гәдәр төрәмәләри вә $n-\kappa$ сајда $c_{\kappa+1}, c_{\kappa+2}, \ldots, c_n$ $(\kappa < n)$ сабитләри дахил олан

$$\psi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(\kappa)}, c_{\kappa+1}, c_{\kappa+2}, \ldots, c_n) = 0 \tag{42}$$

мүнасибәти верилмишдир, бурада ψ кифајәт гәдәр һамар функсијадыр. Бу мүнасибәти t-јә нәзәрән ардычыл олараг $n-\kappa$ дәфә диференсиаллајаг:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\dot{x} + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial x^{(\kappa)}}x^{(\kappa+1)} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial^{n-\kappa}\psi}{\partial t^{n-\kappa}} + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial x^{(\kappa)}}x^{(n)} = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Онда $n-\kappa+1$ сајда олан (42), (43) мүнасибәтләриндән $c_{\kappa+1}, c_{\kappa+2}, \ldots, c_n$-и јох етдикдә (2′) тәнлији алынарса, (42) *мүнасибәтинә (2′) тәнлијинин аралыг интегралы дејилир.*

Хүсуси һалда, $\kappa = n-1$ олдугда (42) аралыг интегралы

$$\psi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, c_n) = 0 \tag{44}$$

шәклинә дүшүр вә *она (2′) тәнлијинин биринчи интегралы* дејилир. Ајдындыр ки, (42) аралыг интегралына κ тәртибли диференсиал тәнлик кими бахсаг, бу тәнлијин һәр бир һәлли (2′) тәнлијинин һәллидир. Одур ки, (2′) тәнлијинин (42) шәкилли аралыг интегралы мә'лум олдугда онун интегралланмасы κ тәртибли диференсиал тәнлијин интегралланмасына кәтирилир. Хүсуси һалда, тәнлијин ики функсионал асылы олмајан

$$\psi_1(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, c_{n-1}) = 0,$$
$$\psi_2(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, c_n) = 0$$

биринчи интеграллары мә'лум исә, бунлардан $x^{(n-1)}$ төрәмәсини јох етмәклә

$$\psi\left(t,\ x,\ \dot{x},\ \ldots,\ x^{(n-2)},\ c_{n-1},\ c_n\right)=0$$

аралыг интегралыны алмаг олар. Јә'ни тәнлијин тәртибини ики ваһид азалтмаг олар.

Ејни гајда илә үч, дөрд вә даһа чох асылы олмајан биринчи интеграллар мә'лум оларса, тәнлијин тәртибини үч, дөрд вә даһа чох азалтмаг олар. Хүсуси һалда, n сајда асылы олмајан биринчи интеграллар вериләрсә, һәмин интеграллардан $\dot{x},\ \ddot{x},\ \ldots,\ x^{(n-1)}$ төрәмәләрини јох етмәклә (40) шәклиндә аилә аларыг ки, она да *(2′) тәнлијинин үмуми интегралы* дејилир.

Мисал 4.

$$t x\ddot{x}-(x+2t\dot{x})\dot{x}=0$$

тәнлијинин

$$\dot{x}+c_1 t x^2=0$$

шәклиндә биринчи интегралы вар. Ону һәлл етмәклә алынан

$$c_1 x t^2+c_2 x-2=0$$

мүнасибәти бахылан тәнлијин үмуми интегралы олар.

§ 4. ЈҮКСӘК ТӘРТИБЛИ НАТАМАМ ТӘНЛИКЛӘР ВӘ ТӘРТИБИ АЗАЛДЫЛАБИЛӘН ТӘНЛИКЛӘР

Верилмиш n тәртибли

$$F\left(t,\ x,\ \dot{x},\ \ldots,\ x^{(n)}\right)=0 \qquad (2')$$

тәнлијиндә $t,\ x,\ \dot{x},\ \ldots,\ x^{(n-1)}$ аргументләриндән һеч олмаса бири ашкар иштирак етмәјән тәнлијә *јүксәк тәртиб натамам тәнлик* дејилир. Ашағыда бә'зи јүксәк тәртиб натамам тәнликләрин интегралланмасы үсуллары верилир. Бундан әлавә бу параграфда тәртиби азалдыла билән бә'зи јүксәк тәртибли диференсиал тәнликләр өјрәнилир.

а) *Ахтарылан функсија вә онун мүәјјән тәртибә гәдәр төрәмәләри иштирак етмәјән тәнликләр.* Белә тәнликләр

$$F\left(t,\ x^{(\kappa)},\ x^{(\kappa+1)},\ \ldots,\ x^{(n)}\right)=0 \quad (\kappa\geq 1) \qquad (45)$$

шәклиндә олан тәнликләрдир.

Әввәлчә (45) тәнлијинин хүсуси һалы олан

$$F\left(t,\ x^{(n)}\right)=0 \qquad (46)$$

тәнлијинин һәлл үсулларыны верәк.

1). Тутаг ки, (46) тәнлији $x^{(n)}$-ә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$x^{(n)}=f(t). \qquad (47)$$

Фәрз едәк ки, $f(t)$ функсијасы мүәјјән $(\alpha,\ \beta)$ интервалында кәсилмәздир. Тәнлији

$$dx^{(n-1)}=f(t)\,dt$$

шәклиндә јазыб, t_0-дан t-јә гәдәр интегралласаг, аларыг:

$$x^{(n-1)}(t)=\int_{t_0}^{t} f(t_1)\,dt_1+c_1, \quad t_0\in(\alpha,\ \beta).$$

Алынан тәнлији

$$dx^{(n-2)}=\left(\int_{t_0}^{t} f(t_1)\,dt_1+c_1\right)dt$$

шәклиндә јазараг јенә дә t_0-дан t-јә гәдәр интегралласаг:

$$x^{(n-2)}(t)=\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} f(t_2)\,dt_2+c_1(t-t_0)+c_2.$$

Бу гајда илә интеграллама әмәлини $n-2$ дәфә тәкрар етмәклә

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n+$$

$$+c_1\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+c_{n-1}(t-t_0)+c_n. \qquad (48)$$

Бурада $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ ихтијари сабитләрдир, t_0 исә $(\alpha,\ \beta)$ интервалындан ихтијари нөгтәдир.

Көстәрәк ки, (48) аиләси (47) тәнлијинин

$$D=\{\alpha<t<\beta;-\infty<x<+\infty;\ \ldots;\ -\infty<x^{(n-1)}<+\infty\}$$

областында үмуми һәллини верир.

Доғрудан да, D областындан көтүрүлмүш ихтијари $(t_0,\ x_0,\ x_0^1,\ \ldots,\ x_0^{n-1})$ нөгтәси үчүн (48) аиләсиндән (47) тәнлијинин

$$x(t_0)=x_0,\ \dot{x}(t_0)=x_0^1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{n-1}$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини јеканә гајда илә

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} dt_1\int_{t_0}^{t_1} dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n+$$

$$+x_0^{n-1}\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+x_0^1(t-t_0)+x_0 \qquad (49)$$

шәклиндә гурмаг олар. Хүсуси һалда, $x_0 = x_0^1 = \cdots = x_0^{n-1} = 0$ олдугда

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n$$

һәлли алынар вә бу һәлл

$$x(t_0) = 0,\ \dot{x}(t_0) = 0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = 0 \qquad (50)$$

башланғыч шәртләрини өдәјир.
Билаваситә јохламагла көстәрмәк олар ки,

$$y(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s)\, ds$$

функсијасы да (47) тәнлијинин (50) башланғыч шәртләрини өдәјән һәллидир. Һәллин јеканәлијинә әсасән алырыг ки, $\tilde{x}(t) = y(t)$; јә'ни

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s)\, ds \quad (51)$$

дүстуру доғрудур. Бу *дүстура Коши дүстуру* дејилир.

2). Тутаг ки, (46) тәнлијини

$$t = \varphi(\tau),\ x^{(n)} = \psi(\tau),\ \tau \in (\tau_1, \tau_2) \qquad (52)$$

параметрик шәклиндә көстәрмәк мүмкүндүр, јә'ни

$$F(\varphi(\tau), \psi(\tau)) = 0,\ \tau \in (\tau_1, \tau_2).$$

Дикәр тәрәфдән, $dx^{(n-1)} = x^{(n)} dt$ олдуғундан, (52) мүнасибәтләринә әсасән, $dx^{(n-1)} = \psi(\tau)\varphi'(\tau)\, d\tau$. Бурадан, интегралламагла

$$x^{(n-1)} = \int \psi(\tau)\varphi'(\tau)\, d\tau + c_1 \equiv \psi_1(\tau, c_1)$$

мүнасибәтини алырыг. Бу гајданы

$$t = \varphi(\tau),\ x^{(n-1)} = \psi_1(\tau, c_1)$$

мүнасибәтләринә тәтбиг етмәклә, нәтичәдә (46) тәнлијинин

$$t = \varphi(\tau),\ x = \psi_n(\tau, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

параметрик шәклиндә үмуми һәллини гура биләрик.

Ајдындыр ки, (46) тәнлији t-јә нәзәрән һәлл олунан һал, $x^{(n)} = \tau$ гәбул етмәклә, бу һала кәтирилир.

Ајдындыр ки, (45) тәнлијиндә $x^{(k)} = y$ әвәзләмәси апарсаг, $n - k$ тәртибли

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n-k)}) = 0$$

тәнлијини аларыг. Тутаг ки, алынмыш тәнлијин үмуми интегралы мә'лумдур:

$$\Phi(t, y, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}) = 0.$$

Бурада $y = x^{(k)}$ јазсаг, k тәртибли

$$\Phi(t, x^{(k)}, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}) = 0$$

тәнлији алынар ки, бу да (46) шәклиндә олан тәнликдир.

Мисал 1.

$$t\dddot{x} + \ddot{x} - t\sqrt{\ddot{x}} = 0$$

тәнлијиндә $y = \ddot{x}$ әвәзләмәси апарсаг,

$$t\dot{y} + y - t\sqrt{y} = 0$$

Бернулли тәнлијини аларыг.

$$y = \frac{1}{t}\left(c_1 + \frac{1}{3} t^{3/2}\right)^2$$

бу тәнлијин үмуми һәлли, $y = 0$ мәхсуси һәллидир. Онда

$$x = c_1^2 t(\ln|t| - 1) + \frac{8c_1}{45} t^{5/2} + \frac{1}{108} t^4 + c_2 t + c_3$$

бахылан тәнлијин үмуми һәлли,

$$x = c_1 t + c_2$$

исә мәхсуси һәлли олар.

Мисал 2.

$$t^2 - \ddot{x}^2 = 1$$

тәнлијини

$$t = \operatorname{ch}\tau, \quad \ddot{x} = \operatorname{sh}\tau$$

параметрик шәклиндә көстәрмәк олар.

Бурадан, $d\dot{x} = \ddot{x} dt$ мүнасибәтинә әсасән

$$t = \operatorname{ch}\tau,\ \dot{x} = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2\tau - \frac{1}{2}\tau + c_1.$$

$dx = \dot{x}\, dt$ олдуғундан, интегралламагла бахылан тәнлијин үмуми һәллини

$$t = \operatorname{ch}\tau,\ x = \frac{1}{24}\operatorname{sh} 3\tau + \frac{3}{8}\operatorname{sh}\tau - \frac{1}{2}\tau \operatorname{ch}\tau + c_1 \operatorname{ch}\tau + c_2$$

шәклиндә гура биләрик.

б) Сәрбәст дәјишән ашкар шәкилдә дахил олмајан тәнликләр. Тутаг ки, сәрбәст дәјишән ашкар иштирак етмәјән

$$F(x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0 \qquad (53)$$

тәнлији верилмишдир. Көстәрәк ки, бу тәнлијин тәртибини бир ваһид азалтмаг олар. Бунун үчүн тәнликдә $\dot{x} = p$ әвәз-

ләмәси апараraг, x-ә сәрбәст дәјишән, p-јә исә онун функсијасы кими бахаг. Бу заман:

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = p\frac{dp}{dx},$$

$$\dddot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dx}\right)\frac{dx}{dt} = p\left[\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + p\frac{d^2p}{dx^2}\right]$$

вә үмумијјәтлә,

$$x^{(\kappa)} = p\omega_\kappa\left(p, \frac{dp}{dx}, \ldots, \frac{d^{\kappa-1}p}{dx^{\kappa-1}}\right), \ \kappa = 2, 3, \ldots, n.$$

Бурада ω_κ мә'лум функсијадыр. Бу гијмәтләри (53) тәнлијиндә јазсаг, $n-1$ тәртибли

$$F_1\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

тәнлијини аларыг. Алынмыш тәнлијин үмуми интегралы

$$\Phi(x, p, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) = 0$$

оларса, (53) тәнлијинин үмуми интегралынын тапылмасы мәсәләси, бир тәртибли

$$\Phi(x, \dot{x}, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) = 0$$

тәнлијинин үмуми интегралынын тапылмасы мәсәләсинә кәтириләр. Ајдындыр ки, $m_\kappa (\kappa = 1, 2, \ldots)$ әдәдләри

$$F(m, 0, 0, \ldots, 0) = 0 \qquad (54)$$

тәнлијинин көкләри исә, $x = m_\kappa (\kappa = 1, 2, \ldots)$ функсијалары (53) тәнлијинин һәлләридир.

(53) тәнлијинин ики хүсуси һалына бахаг.

1). $F\left(x^{(n-1)}, x^{(n)}\right) = 0$ тәнлији. Бу тәнликдә $x^{(n-1)} = y$ әвәзләмәси апарсаг, бир тәртибли

$$F(y, \dot{y}) = 0$$

тәнлијини аларыг. Алынан тәнлији 3-чү фәсилдә верилән үсулларла арашдырмаг олар. Әкәр

$$\Phi(t, y, c_1) = 0$$

бу тәнлијин үмуми интегралы оларса, $y = x^{(n-1)}$ олдуғуну нәзәрә алмагла, $n-1$ тәртибли (46) шәкилли

$$\Phi\left(t, x^{(n-1)}, c_1\right) = 0$$

тәнлијини аларыг.

2). $F\left(x^{(n-2)}, x^{(n)}\right) = 0$ тәнлији. Бу тәнликдә $x^{(n-2)} = y$ әвәзләмәси апарсаг, ики тәртибли

$$F(y, \ddot{y}) = 0 \qquad (55)$$

тәнлијини аларыг.

Тутаг ки, (55) тәнлији $\ddot{y}$-ә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$\ddot{y} = f(y).$$

Онун һәр тәрәфини $2\dot{y}$-ә вурмагла

$$d\left(\dot{y}^2\right) = 2f(y)\,dy$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан да төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш

$$\dot{y}^2 = 2\int f(y)\,dy + c_1$$

тәнлији алынар. Бу тәнлијин үмуми интегралы

$$\Phi(t, y, c_1, c_2) = 0$$

шәклиндә тапыларса, $y = x^{(n-2)}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (46) шәкилли

$$\Phi\left(t, x^{(n-2)}, c_1, c_2\right) = 0$$

тәнлији алынар.

Тутаг ки, $F\left(x^{(n-2)}, x^{(n)}\right) = 0$ тәнлијини $x^{(n-2)} = \varphi(\tau), x^{(n)} = \psi(\tau)$ параметрик шәклиндә көстәрмәк мүмкүндүр. Онда

$$dx^{(n-2)} = x^{(n-1)}dt, \ dx^{(n-1)} = x^{(n)}dt$$

мүнасибәтләриндән dt-ни јох етмәклә

$$x^{(n-1)}dx^{(n-1)} = \psi(\tau)\varphi'(\tau)\,d\tau$$

мүнасибәтини аларыг. Бурадан

$$x^{(n-1)} = \sqrt{2\int\psi(\tau)\varphi'(\tau)\,d\tau + c_1} \equiv \psi_1(\tau, c_1)$$

шәклиндә тә'јин едирик. Беләликлә, параметрик шәкилдә верилмиш

$$x^{(n-2)} = \varphi(\tau), \quad x^{(n-1)} = \psi_1(\tau, c_1)$$

тәнлијини аларыг.

$dx^{(n-2)} = x^{(n-1)}dt$ мүнасибәтинә әсасән

$$dt = \frac{\varphi'(\tau)\,d\tau}{\psi_1(\tau, c_1)}.$$

Бурадан,

$$t = \int\frac{\varphi'(\tau)\,d\tau}{\psi_1(\tau, c_1)} + c_2 = \varphi_1(\tau, c_1, c_2).$$

Беләликлә, $F\left(x^{(n-2)}, x^{(n)}\right) = 0$ тәнлијинин интегралланмасы, параметрик шәкилдә верилмиш

$$t = \varphi_1(\tau, c_1, c_2), \quad x^{(n-2)} = \varphi(\tau)$$

тәнлијинин интегралланмасына кәтирилир.

Мисал 3.

$$x^4 - x^3\ddot{x} = 1$$

тәнлији (53) шәкилли тәнликдир.

Тәнликдә $\dot{x} = p$ әвәзләмәси апармагла ону дәјишәнләринә ајрылан

$$x^3 p\frac{dp}{dx} = x^4 - 1$$

тәнлијинә кәтирмәк олар вә бурадан

$$p = \pm\frac{\sqrt{x^4+2c_1x^2+1}}{x}.$$

Дикәр тәрәфдән, $p = \frac{dx}{dt}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, ахырынчы тәнлији

$$\frac{x\,dx}{\pm\sqrt{x^4+2c_1x^2+1}} = dt$$

шәклиндә јаза биләрик. Бурадан да, бахылан тәнлијин үмуми интегралыны тапарыг:

$$x^2 + c_1 \pm \sqrt{x^4+2c_1x^2+1} = c_2 e^{2t}.$$

Мисала ујғун олан (54) тәнлијинин $m = \pm 1$ һәгиги көкләри вар вә демәли, $x = \pm 1$ функсијалары да бахылан тәнлијин һәлләридир, лакин бу һәлләри үмуми интегралдан $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ көтүрмәклә алмаг олар.

Мисал 4. $\dddot{x}^2 - \ddot{x}^2 = 1$ тәнлијини

$$\ddot{x} = \operatorname{sh}\tau, \quad \dddot{x} = \operatorname{ch}\tau$$

параметрик шәклиндә көстәрмәк олар.

Бурадан $d\ddot{x} = \dddot{x}\,dt$ олдуғундан алырыг ки, $dt = d\tau$, јә'ни $\tau = t + c_1$. Демәли,

$$\ddot{x} = \operatorname{sh}(t+c_1).$$

Бу тәнлији һәлл етмәклә алынан

$$x = \operatorname{sh}(t+c_1) + c_2t + c_3$$

аиләси бахылан тәнлијин үмуми һәлли олар.

Мисал 5.

$$2\ddot{x} = 3x^2$$

тәнлијинин $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини тапмалы.

Һ ә л л и. Тәнлијин һәр тәрәфини $\dot{x}$-ә вурсаг,

$$2\dot{x}\ddot{x} = 3\dot{x}x^2 \quad \text{вә ја} \quad d(\dot{x}^2) = 3x^2dx$$

тәнлијини аларыг. Бурадан

$$\dot{x}^2 = x^3 + c_1.$$

Башланғыч шәртләрини нәзәрә алсаг, ($c_1 = 0$)

$$\dot{x}^2 = x^3$$

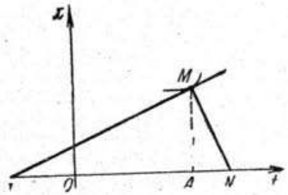
тәнлијини аларыг. Алынан тәнлији $x(0) = 1$ шәртини нәзәрә алмагла һәлл едәрәк, бахылан тәнлијин

$$x(t-2)^2 = 4$$

интегралларыны тапарыг.

Мисал 6. Һәр бир нөгтәсиндә әјрилик радиусу, нормалын бу нөгтә илә абсис оху арасындакы парчасынын узунлуғуна бәрабәр олан әјрини тапын.

Һ ә л л и. Ахтарылан $x = x(t)$ әјриси үзәриндә ихтијари $M(t,x)$ нөгтәси көтүрәк. Бу нөгтәдә әјријә MT тохунаныны вә MN нормалыны чәкәк (шәкил 13). Тохунаны Ot оху илә әмәлә кәтирдији бучағы α илә ишарә етсәк, AMN дүзбучаглы үчбучағындан ајдындыр ки,



Шәкил 13.

$$MN = \frac{AM}{\cos\alpha} = x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Төрәмәнин һәндәси мә'насына әсасән бурадан алырыг ки,

$$|MN| = |x|\sqrt{1+\dot{x}^2}.$$

Диференсиал һәндәсәдән мә'лумдур ки, $x = x(t)$ шәклиндә верилмиш әјринин әјрилик радиусу $R = (1+\dot{x}^2)^{3/2} : |\ddot{x}|$ дүстуру илә һесабланыр. Мәсәләнин шәртинә әсасән

$$(1+\dot{x}^2)^{3/2} : |\ddot{x}| = |x|\sqrt{1+\dot{x}^2}$$

олар вә бурадан

$$x\ddot{x} = 1+\dot{x}^2, \quad -x\ddot{x} = 1+\dot{x}^2$$

тәнликләри алыныр. Ајдындыр ки, бу тәнликләрдә сәрбәст дәјишән ашкар иштирак етмир. Бу тәнликләрдән биринчисини һәлл едәк. Бунун үчүн $\dot{x} = p$ әвәзләмәси апараг. Онда $\ddot{x} = p\frac{dp}{dx}$ вә тәнлик

$$xp\frac{dp}{dx} = 1 + p^2$$

дәјишәнләринә ајрылан тәнлијинә кәтирилир. Ону интеграллајыб $p = \dot x$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\dot x = \pm\sqrt{(c_1x)^2-1}$$

биртәртибли тәнликләрини аларыг. Бурадан да интегралламагла үмуми интегралы алмыш оларыг:

$$2c_1c_2\, x\, e^{c_1 t} = 1 + c_2 e^{2c_1 t}.$$

Охшар гајда илә икинчи тәнлији дә һәлл етсәк

$$c_1^2(x^2+t^2)+2c_1c_2t+c_2^2=1$$

үмуми интегралыны тә'јин едә биләрик.

в) *Ахтарылан функсија вә онун төрәмәләринә нәзәрән бирчинс олан тәнликләр.* Тутаг ки, $F(t,x,\dot x,\dots,x^{(n)})$ функсијасы $x,\dot x,\dots,x^{(n)}$ дәјишәнләринә нәзәрән бирчинс функсијадыр, јә'ни истәнилән z вә мүәјјән m әдәди үчүн

$$F(t, zx, z\dot x,\dots,zx^{(n)}) = z^m F(t,x,\dot x,\dots,x^{(n)}) \qquad (56)$$

ејнилији өдәнир. Онда

$$F(t,x,\dot x,\dots,x^{(n)})=0 \qquad (2)$$

тәнлији *ахтарылан функсија вә онун төрәмәләринә нәзәрән бирчинс тәнлик* адланыр. Тәнликдә $\dot x = xy$ әвәзләмәси апараг, бурада y јени ахтарылан функсијадыр. Онда

$$\ddot x = \dot x y + x\dot y = x(y^2+\dot y),$$

$$\dddot x = \dot x(y^2+\dot y)+x(2y\dot y+\ddot y) = x(y^3+3y\dot y+\ddot y),$$

. . . .

$$x^{(n)} = x\,\omega_n(y,\dot y,\dots,y^{(n-1)}).$$

Бу гијмәтләри (2′) тәнлијиндә јазыб (56) ејнилијини нәзәрә алсаг,

$$x^m F(t,1,y,\dots,\omega_k(y,\dot y,\dots,y^{(n-1)}))=0$$

тәнлијини вә ја ($x\ne0$ гәбул едәрәк)

$$F_1(t,y,\dot y,\dots,y^{(n-1)})=0 \qquad (57)$$

тәнлијини аларыг. Тутаг ки,

$$y=\varphi(t,c_1,c_2,\dots,c_{n-1})$$

бу тәнлијин үмуми һәллидир. Әвәзләмәјә әсасән

$$\frac{\dot x}{x}=\varphi(t,c_1,c_2,\dots,c_{n-1})$$

тәнлији алыныр вә бурадан (2′) тәнлијинин

$$x = c_n\exp\left(\int\varphi(t,c_1,c_2,\dots,c_{n-1})\,dt\right) \qquad (58)$$

шәклиндә үмуми һәллини аларыг.

Гејд едәк ки, (57) тәнлијини аларкән $x=0$ һәлли итә биләрди, лакин һәмин һәлл (58) үмуми һәллиндән $c_n=0$ көтүрмәклә алыныр.

Мисал 7. $x\dot x\ddot x - tx^3 - \dot x^3 = 0$ тәнлијинин $x(0)=1, \dot x(0)=1$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини тапаг.

Һәлли. Ајдындыр ки, тәнлик x, $\dot x$, $\ddot x$-ә нәзәрән бирчинс тәнликдир. $\dot x = xy$ әвәзләмәси апарсаг, y-ә нәзәрән

$$ydy - tdt = 0$$

тәнлијини аларыг. Онун үмуми интегралы $y^2-t^2=c_1$. Беләликлә,

$$\frac{\dot x}{x} = \pm\sqrt{c_1+t^2}$$

тәнлији алынар.

Башланғыч шәртләри нәзәрә алсаг, бурадан

$$\frac{dx}{x}=\pm\sqrt{1+t^2}\,dt.$$

Бу тәнлији $x(0)=1$ шәртини нәзәрә алараг интеграллaсаг

$$x^2=\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)e^{t\sqrt{1+t^2}}$$

бахылан тәнлијин верилмиш башланғыч шәртләри өдәјән һәлләри олар.

г) *Үмумиләшмиш бирчинс тәнликләр.* Истәнилән z вә мүәјјән k, m әдәдләри үчүн

$$F(zt, z^kx, z^{k-1}\dot x,\dots,z^{k-n}x^{(n)}) = z^mF(t,x,\dot x,\dots,x^{(n)}) \qquad (59)$$

ејнилији өдәнәрсә,

$$F(t,x,\dot x,\dots,x^{(n)})=0 \qquad (2')$$

тәнлијинә үмумиләшмиш бирчинс тәнлик дејилир.

Белә тәнлијин тәртибини азалтмаг үчүн

$$t=e^\tau,\quad x=ye^{k\tau}$$

әвәзләмәси апараг; бурада τ јени сәрбәст дәјишән, y исә јени ахтарылан функсијадыр. Бу әвәзләмәдән x-ин t-јә нәзәрән төрәмәләрини y-ин өзү вә τ сәрбәст дәјишәнинә нәзәрән төрәмәләри илә ифадә едәк:

$$\dot x = \frac{dx}{dt} = \frac{ke^{k\tau}y\,d\tau+e^{k\tau}dy}{e^\tau d\tau} = e^{(k-1)\tau}\left(\frac{dy}{d\tau}+ky\right),$$

$$\ddot x = \frac{d\dot x}{dt} = \frac{d\dot x}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = e^{-\tau}\frac{d}{d\tau}\left[e^{(k-1)\tau}\left(\frac{dy}{d\tau}+ky\right)\right]=$$

$$= e^{(k-2)\tau}\left[\frac{d^2y}{d\tau^2}+(2k-1)\frac{dy}{d\tau}+k(k-1)y\right],\dots,$$

$$x^{(n)} = e^{(k-n)\tau}\omega_n\left(y, \frac{dy}{d\tau}, \ldots, \frac{d^n y}{d\tau^n}\right).$$

Бу гиjмәтләри (2′) тәнлиjиндә јазараг (59) шәртини нәзәрә алсаг,

$$F\left(1, y, \frac{dy}{d\tau} + ky, \ldots, \omega_n\left(y, \frac{dy}{d\tau}, \ldots, \frac{d^n y}{d\tau^n}\right)\right) = 0$$

тәнлиjини аларыг. Алынмыш тәнлиjә τ сәрбәст дәjишәни ашкар шәкилдә дахил деjилдир вә демәли, о, (53) шәкилли тәнликдир.

Мисал 8.

$$t^4\ddot{x} + (t\dot{x} - x)^3 = 0$$

тәнлиjинин үмумиләшмиш бирчинс тәнлик олдуғуну јохлаjаг вә ону һәлл едәк. Бунун үчүн $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = t^4\ddot{x} + (t\dot{x} - x)^3$ функсиjасында $t, x, \dot{x}, \ddot{x}$ дәjишәнләрини уjғун олараг zt, $z^k x$, $z^{k-1}\dot{x}$, $z^{k-2}\ddot{x}$ илә әвәз едәк. Онда

$$F(zt, z^k x, z^{k-1}\dot{x}, z^{k-2}\ddot{x}) = z^{k+2}t\ddot{x} + z^{3k}(t\dot{x} - x)^3.$$

Бурадан аjдындыр ки, $k + 2 = 3k$, јә'ни $k = 1$ оларса, тәнлик үмумиләшмиш бирчинс тәнлик олар. Демәли, тәнликдә $t = e^\tau$, $x = ye^\tau$ әвәзләмәси апармаг лазымдыр. Онда

$$\dot{x} = \frac{dy}{d\tau} + y, \quad \ddot{x} = \left(\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{dy}{d\tau}\right)e^{-\tau}.$$

Бу гиjмәтләри тәнликдә јеринә јазсаг, садә чевирмәләрдән сонра

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{dy}{d\tau} + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^3 = 0$$

тәнлиjи алыныр. Алынмыш тәнлиjә τ сәрбәст дәjишәни ашкар дахил олмадығындан $\frac{dy}{d\tau} = p$ әвәзләмәси едәк вә p-јә y-ин функсиjасы кими бахаг. Онда $\frac{d^2y}{d\tau^2} = p\frac{dp}{dy}$ вә p-јә нәзәрән

$$p\frac{dp}{dy} + p + p^3 = 0$$

тәнлиjи алынар. Бурадан

$$\frac{dp}{dy} + (1 + p^2) = 0, \quad p = 0$$

тәнликләри алыныр. Биринчи тәнлиjин үмуми һәлли

$$p = \operatorname{tg}(c_1 - y)$$

шәклиндәдир. Әвәзләмәjә әсасән бурадан

$$\frac{dy}{d\tau} = \operatorname{tg}(c_1 - y)$$

тәнлиjини алырыг вә ону интегралламагла бахылан тәнлиjин үмуми интегралыны тапырыг:

$$t\sin\left(\frac{x}{t} - c_1\right) = c_2.$$

Аjдындыр ки, $p = 0$ тәнлиjиндән $y = c$ олар вә демәли, $x = ct$ бахылан тәнлиjин һәлли олар. Лакин бу һәлл үмуми һәллдән $c_2 = 0$ көтүрмәклә алыныр.

ғ) *Сол тәрәфи там диференсиал олан тәнликләр.* Һәр һансы $\Phi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$ функсиjасынын t-јә нәзәрән там диференсиалы, јә'ни x-и t-нин функсиjасы көтүрмәклә һесабланмыш төрәмәси $F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)})$ функсиjасына бәрабәр оларса,

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0 \qquad (2')$$

тәнлиjинә сол тәрәфи там диференсиал олан тәнлик деjилир.

Мә'лумдур ки, $\Phi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$ функсиjасынын там диференсиалы

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\ddot{x} + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial x^{(n-1)}}x^{(n)}$$

дүстуру илә һесабланыр. Одур ки, (2′) тәнлиjи сол тәрәфи там диференсиал олан тәнлик исә

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}\ddot{x} + \cdots + \frac{\partial\Phi}{\partial x^{(n-1)}}x^{(n)}$$

олар вә бу һалда, (2′) тәнлиjини

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) = 0$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан исә $n - 1$ тәртибли

$$\Phi(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) = c_1$$

тәнлиjи алынар.

Демәли, сол тәрәфи там диференсиал олан тәнлиjин бир биринчи интегралы һәмишә тапыла биләр.

Мисал 9.

$$\ddot{x} - t\dot{x} - x - 1 = 0$$

тәнлиjинә бахаг. Бу тәнлик үчүн

$$\ddot{x} - t\dot{x} - x - 1 = \frac{d}{dt}(\dot{x} - tx - t)$$

олдуғундан, бахылан тәнлиjин биринчи интегралы

$$\dot{x} - tx - t = c_1$$

шәклиндә олар. Алынмыш тәнлик бир тәртибли хәтти тәнликдир. Ону һәлл етсәк, бахылан тәнлијин үмуми һәлли

$$x = e^{\frac{t^2}{2}}\left(c_2 + c_1 \int e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) - 1.$$

§ 5. НОРМАЛ СИСТЕМИН ҺӘЛЛИНИН ВАРЛЫҒЫ

Төрәмәјә көрә һәлл олунмуш биртәртибли диференсиал тәнлијин һәллинин варлығы вә јеканәлији һаггында II фәсилдә исбат олунан теоремләрин чоxуну нормал систем үчүн дә вермәк олур вә бу теоремләр аналожи үсул илә исбат олунурлар. Она көрә дә нормал системин һәллинин варлығы вә јеканәлији һаггында бә'зи теоремләрин гыса исбатыны вермәклә кифајәтләнәҹәјик.

Бу параграфда

$$x_i' = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{7}$$

$$x_i(t_0) = x_i^0 \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{60}$$

Коши мәсәләсинин һәллинин варлығы һаггында ашағыдакы теорем исбат олунур.

Теорем 2 *(Пеано). Тутаг ки, $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i=1, 2,\dots,n$ функсијалары мәркәзи $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ нөгтәсиндә олан $n+1$ өлчүлү, гапалы*

$$R = \{t_0 - a \leqslant t \leqslant t_0 + a; \ x_i^0 - b \leqslant x_i \leqslant x_i^0 + b; \ i = 1, 2, \dots, n\}$$

паралелепипединдә кәсилмәздирләр. Онда (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир һәлли вар; бурада

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \ M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\left\{\max_R |f_i(t, x_1, \dots, x_n)|\right\}.$$

Исбаты. Бир тәнлик үчүн верилмиш исбат гајдасы илә (бах: II фәсил, § 3) көстәрмәк олар ки, (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ парчасында тә'јин олунан һәллинин варлығы мәсәләси

$$x_i(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^{t} f_i(s, x_1(s), \dots, x_n(s)) ds, \quad i = 1, \dots, n \tag{61}$$

интеграл тәнликләр системинин һәмин парчада кәсилмәз һәллинин варлығына еквивалентдир.

Садәлик үчүн $t_0 = 0$ көтүрәк вә (61) интеграл тәнликләр системинин $[0, \alpha]$ парчасында кәсилмәз һәллинин варлығыны көстәрәк.

Иxтијари $0 < h \leqslant \alpha$ әдәди көтүрүб

$$h_1 = \frac{h}{2}, \quad h_2 = \frac{h}{2^2}, \dots, h_m = \frac{h}{2^m}, \dots$$

ардычыллығыны дүзәлдәк. Һәр бир m нөмрәси үчүн, сыфырдан башлајараг, $[0, \alpha]$ парчасыны узунлуғу h_m-ә бәрабәр олан һиссәләрә бөләк вә бу бөлкүјә ујғун

$$x_i^m(0) = x_i^0,$$

$$x_i^m(t) = x_i^m(rh_m) + f_i(rh_m, x_1^m(rh_m), \dots, x_n^m(rh_m))(t - rh_m),$$

$$t \in (rh_m, (r+1)h_m], \ r = 0, 1, \dots, \left[\frac{\alpha}{h_m}\right]; \ i = 1, 2, \dots, n; \tag{62}$$

$$m = 1, 2, \dots$$

функсијаларыны дүзәлдәк, бурада $[z]$ илә z әдәдинин там һиссәси ишарә олунмушдур.

Бу гајда илә $[0, \alpha]$ парчасында кәсилмәз олан

$$\{x_1^m(t)\}, \{x_2^m(t)\}, \dots, \{x_n^m(t)\} \tag{63}$$

функсијалар ардычыллығыны гурураг. Бу ардычыллыгларын һәр биринин $[0, \alpha]$ парчасында Арсела теореминин шәртләрини өдәдијини бир тәнлик үчүн Пеано теореминин исбатындакы гајда илә көстәрмәк олар. Одур ки, (63) ардычыллыгларындан $[0, \alpha]$ парчасында мүнтәзәм јығылан алт ардычыллыглар сечмәк олар. Садәлик үчүн һәмин алт ардычыллыглары јенә $\{x_1^m(t)\}, \{x_2^m(t)\}, \dots, \{x_n^m(t)\}$ илә ишарә едәк вә фәрз едәк ки, бу ардычыллыглар $[0, \alpha]$ парчасында $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ функсијаларына мүнтәзәм јығылырлар. Көстәрәк ки, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ функсијалары $[0, \alpha]$ парчасында (61) интеграл тәнликләр системинин һәллидир ($t_0 = 0$).

Хүсуси һалда, (62) дүстурларында $t = (r+1)h_m$ көтүрсәк,

$$x_i((r+1)h_m) = x_i^m(rh_m) + f_i(rh_m, x_1^m(rh_m), \dots,$$

$$x_n^m(rh_m))h_m, \ i = 1, 2, \dots, n \tag{64}$$

бәрабәрликләрини аларыг.

Иxтијари $t \in (0, \alpha]$ көтүрәк. Онда $l_m = \left[\frac{t}{h_m}\right]$ үчүн $\lim\limits_{m \to \infty} l_m h_m = t$, $\lim\limits_{m \to \infty} (l_m + 1)h_m = t$ вә демәли,

$$\lim_{m \to \infty} x_i^m(l_m h_m) = \varphi_i(t), \quad \lim_{m \to \infty} x_i^m((l_m + 1)h_m) = \varphi_i(t),$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

(64) бәрабәрликләриндә r әдәдинә $0, 1, \dots, l_m$ гијмәтләри вериб, алынан бәрабәрликләри тәрәф-тәрәфә топласаг,

$$x_i^m((l_m+1)h_m) = x_i^0 + \sum_{r=0}^{l_m} f_i(rh_m, x_1^m(rh_m), \ldots, x_n^m(rh_m))h_m,$$

$$i=1, 2, \ldots, n \tag{65}$$

бәрабәрликләрини аларыг. Бу бәрабәрликләри ашағыдакы шәкилдә јазаг:

$$x_i^m((l_m+1)h_m) = x_i^0 + \sum_{r=0}^{l_m} f_i(rh_m, \varphi_1(rh_m), \ldots, \varphi_n(rh_m))h_m +$$

$$+ \sum_{r=0}^{l_m} [f_i(rh_m, x_1^m(rh_m), \ldots, x_n^m(rh_m)) -$$

$$- f_i(rh_m, \varphi_1(rh_m), \ldots, \varphi_n(rh_m)] h_m.$$

Биринчи чәм $f_i(s, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))$ функсијасынын $[0, t]$ парчасында интеграл чәминдән

$$-f_i(l_m h_m, \varphi_1(l_m h_m), \ldots, \varphi_n(l_m h_m))((l_m+1)h_m - t)$$

топлананы илә фәргләнир. Она көрә

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{r=0}^{l_m} f_i(rh_m, \varphi_1(rh_m), \ldots, \varphi_n(rh_m))h_m =$$

$$= \int_0^t f_i(s, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))\, ds, \quad i=1,2,..,n.$$

Шәртә көрә $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ функсијалары кәсилмәз олдуғундан вә (63) ардычылыглары $[0, \alpha]$ парчасында $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ функсијаларына мүнтәзәм јығылдығындан

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{r=0}^{l_m} [f_i(rh_m), x_1^m(rh_m), \ldots, x_n^m(rh_m)) -$$

$$- f_i(rh_m, \varphi_1(rh_m), \ldots, \varphi_n(rh_m))] = 0.$$

Беләликлә, (65) бәрабәрликләриндә m сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк,

$$\varphi_i(t) = x_i^0 + \int_0^t f_i(s, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))]\, ds,$$

$$i=1, 2, \ldots, n \tag{61}$$

олар. Теорем исбат олунду

Нәтичә 1. *Теоремин шәртләри дахилиндә (7) системинин (6) шәртини өдәјән вә $[0, \alpha]$ парчасында тә'јин олунан һәлли јеканә исә, (62) дүстурлары илә тә'јин олунан (63) функсијалар ардычыллыгларынын өзләри һәллә мүнтәзәм јығылырлар.*

Нәтичә 2. *Тутаг ки, $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ функсијасы гапалы R паралелепипединдә кәсилмәздир. Онда*

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) \tag{4'}$$

тәнлијинин

$$x(t_0) = x_0, \ \dot{x}(t_0) = x_1^0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0 \tag{66}$$

башланғыч шәртләрини өдәјән вә $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир һәлли вар; бурада

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},$$

$$M = \max_R |f(t, x_1, \ldots, x_n)|.$$

§ 6. ЈЕКАНӘЛИК ТЕОРЕМЛӘРИ

Бу параграфда нормал системин һәллинин јеканәлији һаггында ики теорем исбат олунур. Бунлардан бири Осгуд теоремидир. Осгуд теореми исбат едиләркән ашағыдакы леммадан истифадә едилир.

Лемма. *Тутаг ки, $z_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсијаларынын (a, b) интервалында сонлу төрәмәси вар. Онда $z(t) = \sum_{i=1}^{m} |z_i(t)|$ функсијасынын (a, b) интервалынын һәр бир нөгтәсиндә $D_+z(t)$ сағ, $D_-z(t)$ сол төрәмәләри вар вә*

$$|D_\pm z(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\dot{z}_i(t)|. \tag{67}$$

Исбаты. $z_i(t)$ функсијасынын (a, b) интервалында сонлу төрәмәси олмасына бахмајараг $|z_i(t)|$ функсијасынын (a, b) интервалынын бә'зи нөгтәләриндә төрәмәси олмаја биләр. Көстәрәк ки, (a, b) интервалынын һәр бир нөгтәсиндә $D_+|z_i(t)|$ сағ, $D_-|z_i(t)|$ сол төрәмәләри вар вә $|D_+|z_i(t)|| = |D_-|z_i(t)|| = |\dot{z}_i(t)|$. Бунун үчүн ашағыдакы мүмкүн олан һаллара бахаг.

а) t нөгтәсиндә $z_i(t) \neq 0$. Шәртә көрә $z_i(t)$ функсијасы (a, b) интервалында кәсилмәз олдуғундан, t нөгтәсинин елә әтрафы вар ки, бу әтрафда өз ишарәсини сахлајыр. Она көрә

$$|z_i(t)| = z_i(t) \operatorname{sgn} z_i(t)$$

функсијасындан төрәмә алсаг,

$$D|z_i(t)| = \dot{z}_i(t) \operatorname{sgn} z_i(t).$$

Бурада

$$\operatorname{sgn} u = \begin{cases} 1, & u > 0 \text{ оларса}, \\ 0, & u = 0 \text{ оларса}, \\ -1, & u < 0 \text{ оларса}. \end{cases}$$

б) t нөгтәси $z_i(t)$ функсиjасынын изолә олунмуш сыфрыдыр. Онда $z_i(t) = 0$ вә кичик $|h| > 0$ әдәди үчүн $z_i(t+h) \neq 0$ олдуғундан

$$D_+ |z_i(t)| = \lim_{h\to 0\,(h>0)} \frac{|z_i(t+h) - z_i(t)|}{h} = \lim_{h\to 0(h<0)} \left|\frac{z_i(t+h) - z_i(t)}{h}\right| = |\dot z_i(t)|,$$

$$D_- |z_i(t)| = \lim_{h\to 0(h<0)} \frac{|z_i(t+h)| - |z_i(t)|}{h} =$$

$$= -\lim_{h\to 0\,(h<0)} \left|\frac{z_i(t+h) - z_i(t)}{h}\right| = |\dot z_i(t)|.$$

в) t нөгтәси $z_i(t)$ функсиjасынын изолә олунмаjан сыфрыдыр. Онда $z_i(t) = 0$ вә t-jә jығылан елә $\{t_n\}$ ардычыллығы вардыр ки, $z_i(t_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Бу һалда $|z_i(t)|$ функсиjасынын төрәмәси

$$D|z_i(t)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z_i(t_n) - z_i(t)|}{t_n - t} = 0.$$

Демәли, бүтүн һалларда $|D_\pm |z_i(t)|| = |\dot z_i(t)|$. Бурадан

$$|D_\pm z(t)| = \left|\sum_{i=1}^n D_\pm |z_i(t)|\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |D_\pm |z_i(t)|| = \sum_{i=1}^n |\dot z_i(t)|.$$

Лемма исбат олунду.

Теорем 3 (Осгуд). *Тутаг ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсиjалары D областынын ихтиjари ики $(t, x_1, \ldots, x_n)$ вә $(t, y_1, \ldots, y_n)$ нөгтәләри үчүн*

$$|f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - f_i(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{68}$$

бәрабәрсизликләрини өдәjирләр. Бурада $\omega(u)$ функсиjасы $(0, u_0]$, $(u_0 > 0)$ jарыминтервалында мүсбәтдир, кәсилмәздир вә

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^{u_0} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \tag{69}$$

шәртини өдәjир. Онда D областынын һәр бир $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәси үчүн (7) системинин (60) шәртләрини өдәjән ән чоху бир һәлли вар.

Исбаты. Тутаг ки, (7) системинин (60) шәртләрини өдәjән ики $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ вә $x_i = \psi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ мүхтәлиф һәлли вар. $z_i(t) = \varphi_i(t) - \psi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ишарә едиб, $z(t) = \sum_{i=1}^n |z_i(t)|$ функсиjасыны дүзәлдәк. Фәрзиjjәмизә көрә $z(t_0) = 0$ вә елә t_1 нөгтәси вар ки, $z(t_1) = z_1 > 0$. Үмумилиjи позмадан $t_1 > t_0$ гәбул етмәк олар. (Әкс һалда t әвәзинә $-t$ көтүрмәклә буна наил олмаг олар.) Теоремин (68) шәртләринә әсасән

$$|\dot z_i(t)| = |\dot\varphi_i(t) - \dot\psi_i(t)| = |f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) -$$

$$- f_i(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))| \leqslant$$

$$\leqslant \omega\left(\sum_{j=1}^n |\varphi_j(t) - \psi_j(t)|\right) = \omega\left(\sum_{j=1}^n |z_j(t)|\right).$$

Бурадан

$$\sum_{j=1}^n |\dot z_j(t)| \leqslant n\,\omega\left(\sum_{j=1}^n |z_j(t)|\right)$$

бәрабәрсизлиjи алыныр. Леммадан алынан (67) бәрабәрсизлиjини бурада нәзәрә алсаг, $|D_\pm z(t)| \leqslant n\omega(z(t))$.

$z(t_1) = z_1 > 0$ олдуғундан ахырынчы бәрабәрсизлиjи күчләндириб

$$|D_\pm z(t)| < (n+1)\,\omega(z(t)) \tag{70}$$

шәкилдә jазмаг олар.

Инди

$$\dot y = (n+1)\,\omega(y)$$

тәнлиjинин $y(t_1) = z_1$ шәртини өдәjән һәллинә бахаг. Теоремин (69) шәртинә әсасән бу мәсәләнин jеканә мүсбәт $y = y(t)$ һәлли вар вә һәллин графики асимптотик олараг Ot охунун мәнфи һиссәсинә jахынлашыр (бах: II фәсил, § 6).

Аjдындыр ки, $y(t)$ вә $z(t)$ функсиjаларынын графикләри (t_1, z_1) нөгтәсиндә кәсишир вә (70) бәрабәрсизлиjинә әсасән $t = t_1$ олдугда

$$|D_- z(t_1)| < (n+1)\,\omega(z(t_1)) = (n+1)\,\omega(y(t_1)) = \dot y(t_1).$$

Бурадан алыныр ки, кичик $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн

$$z(t) > y(t), \quad t \in (t_1 - \varepsilon, t_1) \tag{71}$$

бәрабәрсизлиjи өдәнир.

Көстәрәк ки, (71) бәрабәрсизлиjи бүтүн (t_0, t_1) интервалында өдәнир. Доғрудан да, әкс һалда елә $t_2 \in (t_0, t_1)$ нөгтәси тапылар ки, бу нөгтәдә $z(t_2) = y(t_2)$ вә $D_+ z(t_2) \geqslant \dot y(t_2)$ олар. Ахырынчы мүнасибәт, (70)-ә әсасән алынан

$$|D_+ z(t_2)| < (n+1)\,\omega(z(t_2)) = (n+1)\,\omega(y(t_2)) = \dot y(t_2)$$

бәрабәрсизлијинә зиддир. Демәли, $t\in(t_0, t_1)$ үчүн $z(t) > y(t)$ олур. Бурадан, хүсуси һалда, $z(t_0) \geqslant y(t_0) > 0$ алыныр. Бу исә $z(t_0)=0$ шәртинә зиддир. Теорем исбат олунду.

Нәтиҹә 1. $f_i(t, x_1, \ldots, x_n), i=1,2,\ldots,n$ *функсијалары D областында кәсилмәздирләрсә вә Осгуд теореминин шәртләрини өдәјирләрсә, һәмин областын һәр бир нөгтәсиндән (7) системинин јеканә интеграл әјриси кечир.*

Һәллин варлығы Пеано теореминдән, јеканәлији исә Осгуд теореминдән алыныр.

Нәтиҹә 2. *Тутаг ки, $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ функсијасы D областында тә'јин олунуб вә*

$$|f(t, x_1,\ldots,x_n) - f(t, y_1,\ldots,y_n)| \leqslant \omega\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|\right)$$

шәртини өдәјир. Бурада $\omega(u)$ Осгуд теореминдәки шәртләри өдәјән функсијадыр. Онда $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)\in D$ нөгтәси үчүн (4') тәнлијинин (66) башланғыҹ шәртләрини өдәјән чоху бир һәлли вар.

Ге ј д. Осгуд теореминдәки $\omega(u)$ функсијасы олараг $\omega(u)=Ku$ $(K\geqslant 0)$ көтүрсәк, (68) шәрти

$$|f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - f_i(t, y_1,\ldots,y_n)| \leqslant$$

$$\leqslant K\sum_{j=1}^{n} |x_j-y_j|, \quad i=1,2,\ldots,n$$

шәклинә дүшүр. Бу һалда дејирләр ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $i=1,2,\ldots,n$ *функсијалары $x_1,\ldots,x_n$ аргументләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир.*

Көстәрмәк олар ки, $f_i(t, x_1,\ldots,x_n)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ функсијасынын D областында $x_1,\ldots,x_n$ аргументләринә нәзәрән мәһдуд хүсуси төрәмәләри варса вә област $x_1,\ldots,x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән габарыг исә, һәмин функсија D областында $x_1,\ldots,x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир.

Теорем 4. *Тутаг ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n), i=1,2,\ldots,n$ функсијалары $(n+1)$-өлчүлү, гапалы*

$$R = \{t_0\leqslant t\leqslant t_0+a;\ x_i^0-b\leqslant x_i\leqslant x_i^0+b,\ i=1,2,\ldots,n\}$$

паралелепипединдә кәсилмәздир вә бурада

$$|f_i(t,x_1,\ldots,x_n) - f_i(t,y_1,\ldots,y_n)|\,(t-t_0) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|x_j-y_j|\},\quad i=1,2,\ldots,n \qquad (72)$$

бәрабәрсизликләрини өдәјир. Онда (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә $[t_0, t_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар. Бурада $\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$,

$$M = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\max_{R} |f_j(t, x_1,\ldots,x_n)|\right\}.$$

Исбаты. Һәллин варлығы Пеано теореминдән алыныр. Она көрә һәллин јеканәлијини исбат едәк. Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә $[t_0, t_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунан ики $x_i=\varphi_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$ вә $x_i=\psi_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$ мүхтәлиф һәлләри вар.

Ајдындыр ки,

$$F_i(t) = \frac{\varphi_i(t)-\psi_i(t)}{t-t_0},\quad i=1,2,\ldots,n$$

функсијалары $(t_0, t_0+\alpha]$ јарыминтервалында кәсилмәздирләр. Дикәр тәрәфдән, $\varphi_i(t_0)=\psi_i(t_0)=x_i^0$, $i=1,2,\ldots,n$ олдуғундан, Лопитал гајдасыны тәтбиг етсәк,

$$\lim_{t\to t_0+0} F_i(t) = \lim_{t\to t_0+0}\frac{\varphi_i(t)-\psi_i(t)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0+0}\frac{\dot\varphi_i(t)-\dot\psi_i(t)}{1} =$$

$$= \lim_{t\to t_0+0}[f_i(t, \varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)) - f_i(t, \psi_1(t),\ldots,\psi_n(t))] =$$

$$=0,\ i=1,2,\ldots,n.$$

Демәли, $F_i(t)$ функсијаларынын t_0 нөгтәсиндәки гијмәтини сыфра бәрабәр көтүрсәк, бу функсијалар $[t_0, t_0+\alpha]$ парчасында кәсилмәз олар.

Тутаг ки, $m = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+\alpha}|F_i(t)|\right\} = |F_{i_0}(t_1)|$. Онда $t_1>t_0$ вә $|F_{i_0}(t_1)|>0$. Дикәр тәрәфдән, (72) шәртинә әсасән алыныр ки,

$$m = |F_{i_0}(t_1)| = \frac{|\varphi_{i_0}(t_1)-\psi_{i_0}(t_1)|}{t_1-t_0} =$$

$$= \frac{1}{t_1-t_0}\left|\int_{t_0}^{t_1}[f_{i_0}(t, \varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)) - f_{i_0}(t, \psi_1(t),\ldots,\right.$$

$$\left.\psi_n(t))]\,dt\right| \leqslant \frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{|\varphi_j(t)-\psi_j(t)|}{t-t_0}\right\}dt = \qquad (73)$$

$$= \frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|F_j(t)|\}\,dt.$$

Һәр бир $t\in[t_0, t_1]$ нөгтәси үчүн

$$\Phi(t) = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\{|F_j(t)|\}$$

ишарә едәк. $F_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсиjалары $[t_0, t_1]$ парчасында кәсилмәз вә һамысы еjнилик кими сабит олмадығындан, $\Phi(t)$ бу парчада еjнилик кими сабит олмаjан, кәсилмәз функсиjадыр.

Jухарыда алынмыш (73) бәрабәрсизлиjини

$$m \leqslant \frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}\Phi(t)\,dt$$

шәклиндә jазыб, интеграла орта гиjмәт теоремини тәтбиг етсәк,

$$m \leqslant \Phi(\bar t) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\,|F_i(t)|\,\} = |F_{\kappa_0}(\bar t)|,\ t_0<\bar t<t_1, 1\leqslant \kappa_0 \leqslant n.$$

m әдәдинин тә'jининә әсасән $|F_{\kappa_0}(\bar t)| < |F_{i_0}(t_1)| = m$ олмалыдыр. Алынан зиддиjjәт теоремин доғрулуғуну көстәрир.

§ 7. НОРМАЛ СИСТЕМ ҮЧҮН АРДЫЧЫЛ JАХЫНЛАШМА ҮСУЛУ

Бу параграфда (7) системинин (60) шәртләрини өдәjән һәллинин варлығы вә jеканәлиjи һаггында Пикар теореминин гыса исбаты верилир.

Теорем 5 (Пикар). *Тутаг ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, \ldots, n$ функсиjалары мәркәзи $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсиндә олан $(n+1)$-өлчүлү, гапалы $R=\{t_0-a\leqslant t\leqslant t_0+a;\ x_i^0-b\leqslant x_i \leqslant x_i^0+b, i=1, 2, \ldots, n\}$ паралелепипединдә кәсилмәздир вә $x_1, \ldots, x_n$ аргументләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәjир:*

$$|f_i(t, x_1, \ldots, x_n) - f_i(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant \qquad (74)$$

$$\leqslant K\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|,\ i=1, 2, \ldots, n.$$

Онда (7) системинин (60) шәртләрини өдәjән вә $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ парчасында тә'jин олунан jеканә һәлли вар, бу һәлли ардычыл jахынлашмаларын лимити кими тапмаг олар. Бурада $\alpha=\min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\max\limits_{R}|f_i(t, x_1, \ldots, x_n)|\right\}$.

Исбаты. Башланғыч jахынлашма олараг $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ парчасында кәсилмәз олан вә $|\varphi_i^0(t)-x_i^0|\leqslant b$, $i=1, 2, \ldots, n$ шәртләрини өдәjән $x_i=\varphi_i^0(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсиjаларыны көт рүб,

$$\varphi_i^{m+1}(t) = x_i^0 + \int_{t_0}^{t} f_i\left(s, \varphi_1^m(s), \ldots, \varphi_n^m(s)\right)ds, \qquad (75_m)$$

$$i=1, 2, \ldots, n;\quad m=0, 1, \ldots,$$

рекурент дүстурлары илә тә'jин олунан

$$\{\varphi_1^m(t)\}, \{\varphi_2^m(t)\}, \ldots, \{\varphi_n^m(t)\} \qquad (*)$$

ардычыллыгларыны дүзәлдәк.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $t\in[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ үчүн

$$|\varphi_i^m(t)-x_i^0|\leqslant b,\quad i=1, 2, \ldots, n,\ m=0, 1, 2, \ldots$$

бәрабәрсизликләри өдәнир. Дикәр тәрәфдән, (75_m) дүстурларындан (74) Липшис шәртинә әсасән

$$|\varphi_i^{m+1}(t)-\varphi_i^m(t)| \leqslant K\left|\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j^m(s)-\varphi_j^{m-1}(s)|\,ds\right|, \qquad (76)$$

$$i=1, 2, \ldots, n,\quad m=1, 2, \ldots$$

бәрабәрсизликләри алыныр. Бурадан, хүсуси һалда, $m=1$ олдугда

$$|\varphi_i^2(t)-\varphi_i^1(t)| \leqslant K\left|\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j^1(s)-\varphi_j^0(s)|\,ds\right|,\ i=1, 2, \ldots, n.$$

Дикәр тәрәфдән, $\varphi_i^0(t)$, $\varphi_i^1(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсиjалары $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ парчасында кәсилмәз олдуғундан елә $L>0$ әдәди тапмаг олар ки, $t\in[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ үчүн

$$|\varphi_i^0(t)|\leqslant L,\quad |\varphi_i^1(t)|\leqslant L,\quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Демәли,

$$|\varphi_i^1(t)-\varphi_i^0(t)|\leqslant 2L,\quad i=1, 2, \ldots, n$$

бәрабәрсизликләри өдәнир. Бу гиjмәтләндирмәни jухарыдакы бәрабәрсизликдә jеринә jазсаг,

$$|\varphi_i^2(t)-\varphi_i^1(t)|\leqslant 2nLK|t-t_0|,\quad i=1, 2, \ldots, n$$

олар. Риjази индуксиjа үсулу илә

$$|\varphi_i^{m+1}(t)-\varphi_i^m(t)|\leqslant 2L(nK)^m\frac{|t-t_0|^m}{m!},\quad i=1, 2, \ldots, n,\ m=0, 1, 2, \ldots$$

олдуғуну көстәрмәк олар. Бурадан, $|t-t_0|\leqslant\alpha$ олдуғундан, алырыг ки,

$$L+2L+2L\frac{nK\alpha}{1!}+2L\frac{(nK\alpha)^2}{2!}+\cdots+2L\frac{(nK\alpha)^m}{m!}+\cdots \qquad (77)$$

әдәди сырасы

$$\varphi_i^0(t)+\left(\varphi_i^1(t)-\varphi_i^0(t)\right)+\left(\varphi_i^2(t)-\varphi_i^1(t)\right)+\cdots+$$
$$+\left(\varphi_i^{m+1}(t)-\varphi_i^m(t)\right)+\cdots,\ i=1, 2, \ldots, n \qquad (78)$$

функсионал сыралары үчүн мажорант сырадыр. Даламбер әламәтинә көрә (77) әдәди сырасы jығылыр. Онда Веjерштрас

әламәтинә әсасән алырыг ки, (78) функсионал сыралары $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ парчасында мүнтәзәм јығылырлар. Демәли, (*) функсионал ардычыллыглары $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ парчасында мүәјјән кәсилмәз $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ функсијаларына мүнтәзәм јығылырлар. Бир тәнлик үчүн ардычыл јахынлашма үсулундакы кими, көстәрмәк олар ки,

$$\lim_{m\to\infty}\int_{t_0}^{t} f_i(s, \varphi_1^m(s), \ldots, \varphi_n^m(s))\,ds =$$

$$=\int_{t_0}^{t} f_i(s, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))\,ds, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Она көрә дә (75_m) бәрабәрликләриндә m сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк,

$$\varphi_i(t)=x_i^0+\int_{t_0}^{t} f_i(s, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s))\,ds, \; i=1, 2, \ldots, n. \quad (79)$$

Бурадан $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ функсијаларынын (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән һәлли олдуғу алыныр.

Һәллин јеканәлијини исбат етмәк үчүн әксини фәрз едәк. Тутаг ки, (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ парчасында тә'јин олунан $x_i=\varphi_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ һәллиндән башга $x_i=\psi_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ һәлли дә вардыр. Онда $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ парчасында

$$\psi_i(t)=x_i^0+\int_{t_0}^{t} f_i(s, \psi_1(s), \ldots, \psi_n(s))\,ds, \quad i=1,2,\ldots,n \quad (80)$$

ејниликләри өдәнир.

Липшис шәртинә әсасән (79) вә (80) бәрабәрликләриндән алырыг ки,

$$|\varphi_i(t)-\psi_i(t)| \leqslant K\left|\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j(s)-\psi_j(s)|\,ds\right|, \; i=1,2,\ldots,n.$$

Бурадан

$$\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(t)-\psi_i(t)| \leqslant nK\left|\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(s)-\psi_i(s)|\,ds\right|$$

бәрабәрсизлији алыныр. Мүәјјәнлик үчүн фәрз едәк ки, $t\in[t_0, t_0+\alpha]$. Бу һалда бәрабәрсизлијә Гроноулл леммасыны тәтбиг етсәк аларыг ки,

$$\sum_{i=1}^{n}|\varphi_i(t)-\psi_i(t)| \leqslant 0, \; t\in[t_0, t_0+\alpha].$$

Демәли, $[t_0, t_0+\alpha]$ парчасында $\varphi_i(t)\equiv\psi_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$. Ејни гајда илә $t\in[t_0-\alpha, t_0]$ үчүн $\varphi_i(t)\equiv\psi_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ олдуғуну көстәрмәк олар. Теорем исбат олунду.

Нәтичә. *Тутаг ки, (9) хәтти диференсиал тәнликләр системиндә $a_{ij}(t)$, $i, j=1, 2, \ldots, n$ әмсаллары вә $f_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсијалары мүәјјән (α, β) интервалында кәсилмәздирләр. Онда истәнилән $t_0\in(\alpha, \beta)$ вә ихтијари x_1^0, $x_2^0, \ldots, x_n^0$ әдәдләри үчүн (9) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә (α, β) интервалында тә'јин олунан јеканә һәлли вар. Хүсуси һалда, сабит әмсаллы хәтти бирчинс системин истәнилән башланғыч шәрти өдәјән јеканә һәлли вар вә бу һәлл бүтүн һәгиги охда тә'јин олунмушдур.*

§ 8. ДАВАМЕТДИРИЛМӘЈӘН ҺӘЛЛ

Бу параграфда

$$\dot{x}_i=f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i=1, 2, \ldots, n \quad (7)$$

системинин һәлләринин давамы мәсәләси өјрәнилир. Бурада $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсијалары $t, x_1, \ldots, x_n$ дәјишәнләри фәзасынын мүәјјән D областында тә'јин олунмушдур.

Тутаг ки,

$$x_i=\varphi_i(t), \; i=1, 2, \ldots, n \quad (81)$$

функсијалары (α, β) интервалында,

$$x_i=\psi_i(t), \quad i=1, 2, \ldots, n \quad (82)$$

функсијалары исә $(\alpha, \beta]$ јарыминтервалында вә ја (α, β) интервалыны өзүндә сахлајан (α, γ) $(\gamma>\beta)$ интервалында (7) системинин һәллидир. *Бу һәлләр (α, β) интервалында үст-үстә дүшдүкдә (82) һәллинә (81) һәллинин сағa давамы дејилир, (81) һәлли исә сағa даваметдирилән һәлл адланыр.*

Аналожи олараг сола даваметдирилән һәллә тә'риф вермәк олар. *Нә сағa, нә дә сола давам етдирилә билмәјән һәллә даваметдирилмәјән һәлл дејилир.*

Айдындыр ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсијалары D областында кәсилмәздирсә, бу областын һәр бир $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәси үчүн (7) системинин

$$x_i(t_0)=x_i^0, \quad i=1, 2, \ldots, n \quad (60)$$

шәртләрини өдәјән һеч олмаса бир һәлли вар. Доғрудан да, елә $a>0$ вә $b>0$ әдәдләри тапмаг олар ки, мәркәзи $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсиндә олан $(n+1)$-өлчүлү, гапалы

$$R=\{t_0-a\leqslant t\leqslant t_0+a; \; x_i^0-b\leqslant x_i\leqslant x_i^0+b, \; i=1, 2, \ldots, n\}$$

паралелепипеди тамамилә D областында јерләшсин. Онда Пеано теореминә әсасән, (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә мүәјјән $[\alpha_1, \beta_1]$ (бурада $\alpha_1 = t_0 - \alpha$, $\beta_1 = t_0 + \alpha$; $\alpha = \min \left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $M = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{\max_{R} | f_i(t, x_1, \ldots, x_n) | \right\}$) парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир һәлли вар. Бу һәлли (белә һәлләр чох оларса, онлардан бирини) $x_i = \varphi_i^1(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ илә ишарә едәк вә онун сağа давам етдирилмәси мәсәләсини өјрәнәк. Бунун үчүн $x_i^1 = \varphi_i^1(\beta_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ишарә едиб (7) системинин $x_i(\beta_1) = x_i^1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ шәртләрини өдәјән һәллинә бахаг. Пеано теореминә әсасән бу мәсәләнин мүәјјән $[\alpha_2, \beta_2]$ ($\alpha_2 < \beta_1 < \beta_2$) парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир һәлли вар. Бу һәлли (әкәр белә һәлләр чох оларса, онлардан бирини) $x_i = \varphi_i^2(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ишарә едәк. Онда

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \varphi_i^1(t), & t \in [\alpha_1, \beta_1], \\ \varphi_i^2(t), & t \in (\beta_1, \beta_2], \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

функсијалары (7) системинин $[\alpha_1, \beta_2]$ парчасында һәлли олур. Демәли, бу һәлл $x_i = \varphi_i^1(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәллинин давамыдыр. Гејд едәк ки, бу һәлли даваметдирилмәјән һәллә гәдәр давам етдирмәк олар (бах: II фәсил, § 4). Ајдындыр ки, Коши мәсәләсинин һәлли јеканә олмадыгда ејни бир һәллин мүхтәлиф давамлары ола биләр.

Теорем 6. *Тутаг ки,* $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *функсијалары* D *областында кәсилмәздирләр вә кәсилмәз* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *хүсуси төрәмәләри вар. Онда* D *областынын һәр бир* $(t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *нөгтәси үчүн (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән јеканә даваметдирилмәјән һәлли вар.*

Исбаты. Теоремин шәртләри дахилиндә D областынын һәр бир нөгтәсиндә (7) системи үчүн Коши мәсәләсинин јеканә һәлли вар. Доғрудан да, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары R-дә кәсилмәз олмагла бәрабәр, бурада $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аргументләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјирләр. Демәли, 5-чи теоремә әсасән (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән вә мүәјјән $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар. Бу һәлли јухарыда көстәрилән гајда илә мүәјјән интервала гәдәр давам етдирмәк олар. Беләликлә, (7) системинин (60) шәртләрини өдәјән һәр бир һәллинин өзүнүн тә'јин олундуғу интервал вардыр.

Системин (60) шәртләрини өдәјән бүтүн мүмкүн олан һәлләринин тә'јин олундуғу интервалларын сол учларындан ибарәт чохлуғу R_1, сағ учларындан ибарәт чохлуғу исә R_2 илә

ишарә едәк. R_1 чохлуғунун дәгиг ашағы сәрһәдини a (хүсуси һалда, $a = -\infty$ ола биләр) илә, R_2 чохлуғунун дәгиг јухары сәрһәдини исә b (хүсуси һалда, $b = +\infty$ ола биләр) илә ишарә едәк. Инди системин (60) шәртләрини өдәјән вә (a, b) интервалында тә'јин олунан

$$x_i = \Phi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{83}$$

һәллини гураг. Бунун үчүн (a, b) интервалынын ихтијари t^* нөгтәсиндә (83) функсијаларыны тә'јин етмәк лазымдыр.

Мүәјјәнлик үчүн $t_0 < t^*$ олдуғуну фәрз едәк. Гурмаја көрә b әдәди R_2 чохлуғунун дәгиг јухары сәрһәди олдуғундан, системин (60) шәртләрини өдәјән вә t^* нөгтәсини өз дахилиндә сахлајан интервалда тә'јин олунан һәлли вар. Бу интервалда тә'јин олунан $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәлли үчүн $\Phi_i(t^*) = \varphi_i(t^*)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ көтүрәк. Көстәрәк ки, (83) функсијаларынын $t = t^*$ нөгтәсиндә гијмәтләринин белә көтүрүлмәси $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәллинин сечилмәсиндән асылы олмур. Доғрудан да, системин (60) шәртләрини өдәјән вә t^* нөгтәсини өз дахилиндә сахлајан башга интервалда тә'јин олунан $x_i = \psi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәллини көтүрсәк, һәллин јеканәлијинә әсасән $\psi_i(t^*) = \varphi_i(t^*)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ олмалыдыр. Демәли, (83) функсијалары $t = t^*$ нөгтәсиндә биргијмәтли тә'јин олунур.

Бу гајда илә (83) функсијаларыны (a, b) интервалында тә'јин едәрик. Һәллин јеканәлијинә әсасән һәр бир $t^* \in (a, b)$ нөгтәсинин бу интервала дахил олан елә әтрафы вар ки, (83) функсијалары һәмин әтрафда системин (60) шәртләрини өдәјән һәлләринин бири илә үст-үстә дүшүр. Она көрә (83) функсијалары (a, b) интервалында системин (60) шәртләрини өдәјән һәлли олур. Тутаг ки, $x_i = \varphi_i^*(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијалары системин (60) шәртләрини өдәјән вә (α, β) интервалында тә'јин олунан һәр һансы һәллидир. Онда $\alpha \in R_1$, $\beta \in R_2$ вә демәли, $a \leq \alpha$, $\beta \leq b$ олур. Бурадан һәллин јеканәлијинә әсасән, (α, β) интервалынын (a, b) интервалына дахил олмасы вә (83) һәлли илә $x_i = \varphi_i^*(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәллинин (α, β) интервалында үст-үстә дүшмәси алыныр. Демәли, (83) һәлли $x_i = \varphi_i^*(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәллинин давамыдыр. Нәһајәт, көстәрәк ки, (83) һәлли давам етдирилмәјәндир. Әксини фәрз едәк, тутаг ки, (83) һәлли давам етдириләндир вә $x_i = \bar{\varphi}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәлли бу һәллин давамыдыр. Онда $x_i = \bar{\varphi}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәллинин тә'јин олундуғу $(\bar{a}, \bar{b})$ интервалы (a, b) интервалыны дахилиндә сахлајыр вә $t \in (a, b)$ үчүн $\Phi_i(t) = \bar{\varphi}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ олур. Ајдындыр ки, $x_i = \bar{\varphi}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ функсијаларына системин (60) шәртләрини өдәјән һәлли кими баха биләрик.

Она көрә $\bar{a} \in R_1$ вә $\bar{b} \in R_2$ олур. Бурадан a вә b әдәдләринин тә'јининә әсасән алырыг ки, $a = \bar{a}$, $b = \bar{b}$ олмалыдыр. Демәли, $x_i = \Phi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ вә $x^i = \bar{\varphi}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ һәлләри тамамилә үст-үстә дүшүр.

Беләликлә, (83) функсијалары системин (60) шәртләрини өдәјән вә даваметдирилмәјән јеканә һәлли олур.

Чалышмалар.

1. Исбат етмәли ки, $g(s)$ функсијасы $[0, +\infty)$ јарымохунда кәсилмәз олдугда

$$x_2^2 + 2\int_0^{x_1} g(s)\,ds = c_1$$

мүнасибәти

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) \end{cases}$$

системинин биринчи интегралыдыр.

2. Системин үмуми вә мәхсуси һәлләрини тапын:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{x_1}{t} + \sqrt[3]{t^2 x_1}, \\ \dot{x}_2 = x_2 + \sqrt[3]{t x_1^2} - \dfrac{2}{3} t^2. \end{cases}$$

Чаваб: $x_1 = t\left(c_1 + \dfrac{2}{3} t\right)^{3/2}$, $x_2 = c_2 e^t - c_1(1 + t)$, $\quad x_1 = 0$, $x_2 = ce^t + \dfrac{2}{3}(t^2 + 2t + 2)$.

3. Ашағыдакы тәнликләр системинин үмуми интегралларыны тапын:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \dfrac{x_2}{t}, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_1}{t} + x_2. \end{cases}$ *Чаваб:* $t(x_1 - x_2)e^{-t} = c_1$, $\dfrac{1}{t}(x_1 + x_2)e^{-t} = c_2$.

б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2. \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 + x_2 = c_1$, $(x_2 - x_1)\,e^{2(x_1 + x_2)t} = c_2$.

в) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{t - x_2}{x_2 - x_1}, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_1 - t}{x_2 - x_1}. \end{cases}$ *Чаваб:* $t + x_1 + x_2 = c_1$, $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + c_1 t = c_2$.

г) $\dfrac{dx_1}{2x_1^2 + t^2} = \dfrac{dx_2}{2x_1 x_2} = \dfrac{dt}{x_1 t}$. *Чаваб:* $\dfrac{x_1^2 + t^2}{t^4} = c_1$, $\dfrac{x_2}{t^2} = c_2$.

4. Ашағыдакы системләри јүксәк тәртибли тәнлијә кәтирмәклә верилмиш башланғыч шәртләри өдәјән һәлләрини тапын:

а) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_2^3}{x_1^2}. \end{cases}$ $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$. *Чаваб:* $x_1 = e^{4t}$, $x_2 = 2e^{4t}$.

б) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_2}{t}(2x_1 - 1). \end{cases}$ $x_1(1) = 2$, $x_2(1) = 4$

Чаваб: $x_1 = \dfrac{2}{1 - 2\ln t}$, $x_2 = \dfrac{4}{t(1 - 2\ln t)^2}$.

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + t x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + 6 \end{cases}$

системинин $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәллинә $x_1^1(t)$, $x_2^1(t)$, $x_1^2(t)$, $x_2^2(t)$ јахынлашмаларыны гурун.

6. $x + c_1 t + c_2 t x = 0$ аиләсинин диференсиал тәнлијини гурмалы:

Чаваб: $t x \ddot{x} - 2t\dot{x}^2 + 2x\dot{x} = 0$.

7. Тәртиби азалтмагла ашағыдакы тәнликләри һәлл един:

а) $\ddot{x} - 6t\sqrt[3]{\ddot{x}^2} = 0$. *Чаваб:* 1. $x = c_1 t + c_2$,

2. $x = \dfrac{t^8}{56} + \dfrac{c_1}{10} t^6 + \dfrac{c_1^2}{4} t^4 + \dfrac{c_1^3}{2} t^2 + c_2 t + c_3$.

б) $\dddot{x}^2 + \ddot{x}^2 - 1 = 0$. *Чаваб:* $x = \sin(\pm t + c_1) + c_2 t + c_3$

в) $t\dddot{x} - \ddot{x} + t\dot{x} - x = 0$. *Чаваб:* $x = c_1 t + c_2 \cos t + c_3 \sin t$

г) $t^2 \ddot{x}^2 - 5t\dot{x}\ddot{x} + 6\dot{x}^2 = 0$. *Чабаб:* $x = c_1 t^4 + c_2$; $x = c_1 t^3 + c_2$.

8. Сәрбәст дәјишән ашкар дахил олмајан тәнликләри һәлл един:

а) $x\ddot{x} = \dot{x}^2 - 4.$ *Ҹаваб:* 1. $x = \pm 2t + c_1,$
2. $\ln\left(\sqrt{c_1}x + \sqrt{c_1x^2 + 4}\right) = c_2 \pm \sqrt{c_1}\,t,$
3. $c_1x = 2\sin(\pm c_1t + c_2).$

б) $\ddot{x} = x^3,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$ *Ҹаваб:* $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - t}.$

9. Ашағыдакы бирҹинс вә үмумиләшмиш бирҹинс тәнликләри һәлл един:

а) $tx\ddot{x} - 2t\dot{x}^2 - x\dot{x} = 0.$ *Ҹаваб:* $x(t^2 + c_1) = c_2.$

б) $t^3\ddot{x} + (t\dot{x} - x)^2 = 0.$ *Ҹаваб:* $x = t\ln\left(1 - \frac{c_2}{t}\right) + c_1t.$

10. Ашағыдакы там диференсиаллы тәнлиjи һәлл един:

$x\ddot{x} - \dot{x}^2 + x^2(x + t\dot{x}) = 0.$ *Ҹаваб:* $x\left(c_2c_1^2\, e^{c_1t} - c_1t - 1\right) = c_1^2.$

V ФӘСИЛ

ХӘТТИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИ

§ 1. ҮМУМИ АНЛАЈЫШЛАР

а) Хәтти систем анлаjышы. Бу фәсилдә нормал системин хүсуси һалы олан

$$\dot{x}_i = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \cdots + a_{in}(t)x_n + f_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

хәтти системи өjрәнилир. Белә системин һәлләри бир чох хассәләрә маликдир. Бу хассәләрә әсасән системин үмуми һәллинин гурулушуну өjрәнмәк вә бә'зи хүсуси һалларда ону тапмаг мүмкүн олур. Үмуми һәллин гурулушуну билмәк исә өз нөвбәсиндә хәтти тәнликләр нәзәриjjәсинин бир чох мәсәләләрини (һәллин даjаныглығы, рәгси вә с.) өjрәнмәкдә мүһүм рол оjнаjыр.

Вектор вә матрис анлаjышларындан истифадә олунмасы, хәтти диференсиал тәнликләр нәзәриjjәсинин бир чох мәсәләләринин шәрһини садәләшдирмәjә имкан верир. Одур ки, әввәлҹә векторлар вә матрисләр нәзәриjjәсинин бә'зи анлаjышларыны верәк.

б) Векторлар нәзәриjjәсинин бә'зи анлаjышлары. Елементләри n саjда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ әдәдләриндән ибарәт олан бир сүтунлу

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

матрисинә *n-өлчүлү сүтун вектор*, бир сәтирли $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *матрисинә n-өлчүлү сәтир вектор*, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *әдәдләринә исә x векторунун компонентләри* деjилир.

Истәнилән λ әдәди үчүн λx *һасили дедикдә компонентләри $\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n$ олан вектор баша дүшүлүр. Верилмиш x вә y векторларынын $x + y$ ҹәми, компонентләри $x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n$ олан вектора деjилир.*

Ики x вә y векторларынын скалjар һасили

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

бәрабәрлиjи илә тә'jин олунур.

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

әдәдинә x векторунун узунлуғу вә jа нормасы деjилир. Бу нормаjа, адәтән, Евклид нормасы* деjилир. Норма анлаjышындан истифадә едәрәк x вә y векторлары арасындакы мәсафәни

$$\| x - y \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

дүстуру илә вермәк олар.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, истәнилән x, y векторлары вә λ әдәди үчүн $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ (үчбучаг бәрабәрсизлиjи), $\| \lambda x \| = |\lambda|\, \| x \|$ мүнасибәтләри доғрудур.

Тутаг ки, $\{x^m\}$ векторлар ардычыллығы вә a вектору үчүн

$$\lim_{m \to \infty} \| x^m - a \| = 0$$

мүнасибәти өдәнир. Онда деjирләр ки, $\{x^m\}$ векторлар ардычыл

* Бә'зән x векторун нормасы олараг $\| x \| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ вә jа $\| x \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ көтүрүлүр.

лығы a векторуна јығылыр. $\sum_{k=1}^{\infty} x_{1k}, \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k}, \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk}$ *әдәди сыралары уіғун олараг $a_1, a_2, \ldots, a_n$ әдәдләринә јығылырларса, дејирләр ки,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} x_{1k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} x_{nk} \end{pmatrix}$$

векторлар сырасы, компонентләри $a_1, a_2, \ldots, a_n$ олан a векторуна јығылыр.

Мә'лумдур ки, n-өлчүлү векторлар чохлуғу n-өлчүлү хәтти фәза тәшкил едир вә бу фәзанын һәр бир векторуну n сајда хәтти асылы олмајан векторлар үзрә јеканә гајда илә ајырмаг олар. Бу фәзаны R_n илә ишарә едәҹәјик. Тутаг ки, $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ функсијалары (α, β) интервалында тә'јин олунмушлар. Компонентләри $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ олан $x(t)$ векторуна (α, β) интервалында тә'јин олунмуш *вектор-функсија* дејилир. Бу вектор-функсијанын *интегралы* $\int_\alpha^\beta x(t)dt$ дедикдә, *компонентләри* $\int_\alpha^\beta x_1(t)dt, \ldots, \int_\alpha^\beta x_n(t)dt$ *олан вектор*, $\dot{x}(t)$ *төрәмәси дедикдә исә, компонентләри* $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t), \ldots, \dot{x}_n(t)$ *олан вектор баша дүшүлүр.* Көстәрәк ки

$$\left\| \int_\alpha^\beta x(t)dt \right\| \leqslant \int_\alpha^\beta \| x(t) \| dt \quad (\alpha < \beta) \tag{2}$$

бәрабәрсизлији доғрудур. Бунун үчүн $\Delta = \frac{\beta - \alpha}{m}$ ишарә едиб, $[\alpha, \beta]$ парчасыны $t_0 = \alpha$, $t_1 = \alpha + \Delta$, $t_2 = \alpha + 2\Delta, \ldots, t_m = \alpha + m\Delta = \beta$ нөгтәләри илә узунлуглары Δ олан m сајда һиссәләрә бөләк.

Интегралын тә'рифинә көрә

$$\int_\alpha^\beta x(t)dt = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x(t_k)\Delta$$

олдуғундан, үчбучаг бәрабәрсизлијинә әсасән

$$\left\| \int_\alpha^\beta x(t)dt \right\| = \left\| \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x(t_k)\Delta \right\| \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \| x(t_k) \| \Delta = \int_\alpha^\beta \| x(t) \| dt.$$

Бу исә (2) бәрабәрсизлијинин доғрулуғуну көстәрир.

в) *Матрисләр нәзәријјәсинин елементләри.* Тутаг ки, n-тәртибли (вә ја $n \times n$ өлчүлү)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

квадрат матриси верилмишдир. Садәлик үчүн бу матриси $A = (a_{ij})$ илә ишарә едәк.

Ики $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ *матрисләринин ҹәми* $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ *матрисинә, һасили исә* $AB = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \right)$ *матрисинә* дејилир. Үмумијјәтлә, матрисләр үчүн $AB \neq BA$. Әкәр $AB = BA$ *оларса, A вә B матрисләринә коммутатив матрисләр* дејилир. Истәнилән λ әдәди үчүн λA *һасили дедикдә елементләри λa_{ij} олан (λa_{ij}) матриси баша дүшүлүр.*

Верилән $A = (a_{ij})$ матрисинин баш диагонал елементләринин ҹәминә онун изи дејилир вә $\mathrm{Sp}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ишарә олунур.

Тәртиби n олан A квадрат матриси илә n-өлчүлү x сүтун векторунун һасили Ax, компонентләри $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j$ олан вектордур. Векторун Евклид нормасына уіғун олараг $A = (a_{ij})$ матрисинин нормасы

$$\| A \| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

дүстуру илә тә'јин олунур. Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\| A + B \| \leqslant \| A \| + \| B \|, \quad \| \lambda A \| = | \lambda | \, \| A \|,$$

$$\| AB \| \leqslant \| A \| \, \| B \|, \quad \| Ax \| \leqslant \| A \| \, \| x \|.$$

A матрисинин елементләри мүәјјән (α, β) интервалында тә'јин олунмуш $a_{ij}(t)$ функсијалары оларса, она матрис-функсија дејилир вә $A(t) = (a_{ij}(t))$ ишарә олунур. Елемент-

ләри ејни бир интервалда кәсилмәз олан матрис-функсија һәмин интервалда кәсилмәз матрис-функсија адланыр.

Верилмиш $A(t)$ матрис-функсијасынын интегралы, елементләри $\int a_{ij}(t)\,dt$ олан $\int A(t)\,dt = \left(\int a_{ij}(t)\,dt\right)$ матрисинә, төрәмәси исә елементләри $\frac{d}{dt}a_{ij}(t)$ олан $\frac{dA(t)}{dt} = \left(\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right)$ матрисинә дејилир.

Исбат етмәк олар ки, $A(t)$, $B(t)$ матрис-функсијаларынын төрәмәләри варса,

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \frac{dA(t)}{dt}B(t) + A(t)\frac{dB(t)}{dt} \qquad (3)$$

дүстуру доғрудур.

Тутаг ки, $A(t)$ матрис-функсијасы (α, β) интервалында дифференсиалланандыр вә бу интервалда тәрси вар. Онда $A(t)A^{-1}(t) = E$ (E—ваһид матрисдир) ејнилијиндән (3) дүстуруна әсасән аларыг ки,

$$\frac{dA(t)}{dt}A^{-1}(t) + A(t)\frac{dA^{-1}(t)}{dt} = 0.$$

Бурадан

$$\frac{dA^{-1}(t)}{dt} = -A^{-1}(t)\frac{dA(t)}{dt}A^{-1}(t) \qquad (4)$$

дүстуру алыныр.

Тутаг ки, ејни тәртибли $\{A^{(m)}\}$ квадрат матрисләр ардычыллығы вә A матриси верилмишдир. Бурада $A^{(m)} = (a_{ij}^{(m)})$, $A = (a_{ij})$. *Әкәр* $\lim\limits_{m\to\infty} a_{ij}^{(m)} = a_{ij}$ *оларса, дејирләр ки,* $\{A^{(m)}\}$ *матрисләр ардычыллығы* A *матрисинә јығылыр.*

Тутаг ки, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{ij}^{(m)}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ әдәди сыралары ујғун олараг b_{ij} әдәдләринә јығылырлар. Онда дејирләр ки, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} A^{(m)}$ матрисләр сырасы $B = (b_{ij})$ матрисинә јығылыр.

Мә'лумдур ки, ихтијари a әдәди үчүн

$$1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{a^mt^m}{m!} + \cdots \qquad (5)$$

гүввәт сырасы јығыландыр вә чәми e^{at}-јә бәрабәрдир.

Көстәрәк ки, истәнилән A квадрат матриси үчүн

$$E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \cdots + \frac{A^mt^m}{m!} + \cdots \qquad (6)$$

матрисләр сырасы да јығыландыр. бурада E—ваһид матрисдир.

$$A^2 = AA, \quad A^3 = A^2A, \ldots, \quad A^m = A^{m-1}A.$$

Доғрудан да, A^m матрисинин елементләрини $a_{ij}^{(m)}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $m = 1, 2, \ldots$ илә ишарә етсәк, норманын тә'рифинә әсасән $|a_{ij}^{(m)}| \leqslant \|A^m\| \leqslant \|A\|^m$. Одур ки, (5) сырасында $a = \|A\|$ көтүрүб мүгајисә теоремини тәтбиг етсәк, аларыг ки, (6) матрис сырасынын тә'јин етдији

$$\delta_{ij} + a_{ij}^{(1)}t + \frac{a_{ij}^{(2)}t^2}{2!} + \cdots + \frac{a_{ij}^{(m)}t^m}{m!} + \cdots; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

гүввәт сыралары јығылыр. Бурадан алыныр ки, (6) матрис сырасы јығылыр. Бу сыранын чәмини e^{At} илә ишарә едәк. *Бу гајда илә тә'јин олунан* e^{A} *матрисинә* A *матрисинин експоненти* дејилир.

Хүсуси һалда, A матриси баш диагонал елементләри $a_1, a_2, \ldots, a_n$ олан диагонал матрис олдугда, e^{At} матриси баш диагонал елементләри $e^{a_1t}, e^{a_2t}, \ldots, e^{a_nt}$ олан диагонал матрис олур.

Јухарыда тә'јин етдијимиз A^m матрисинә A матрисинин m-чи дәрәчәси (гүввәти) дејилир. Мүәјјән дәрәчәси сыфыр (сыфыр матрис) олан *матрисә нилпотент матрис дејилир.*

Көстәрәк ки,

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} \qquad (7)$$

бәрабәрлијинин өдәнмәси үчүн A вә B матрисләринин коммутатив матрисләр олмасы зәрури вә кафидир.

Доғрудан да ихтијари A вә B матрисләри үчүн тә'рифә көрә

$$e^{(A+B)t} = E + (A+B)t + \frac{(A+B)^2t^2}{2!} + \frac{(A+B)^3t^3}{3!} + \cdots =$$

$$= E + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + AB + BA + B^2)t^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!}(A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3)t^3 + \ldots,$$

$$e^{At}e^{Bt} = \left(E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots\right)\left(E + Bt + \frac{B^2t^2}{2!} + \right.$$

$$\left. + \frac{B^3t^3}{3!} + \cdots\right) = E + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A^2 + 2AB + B^2)t^2 +$$

$$+\frac{1}{3!}(A^3+3A^2+3AB^2+B^3)t^3+\cdots$$

олдуғундан

$$e^{(A+B)t}-e^{At}e^{Bt}=(BA-AB)\frac{t^2}{2!}+[A(BA-AB)+$$

$$+(BA-AB)B+(BA^2-A^2B+B^2A-AB^2)]\frac{t^3}{3!}+\cdots \qquad (8)$$

бәрабәрлијини аларыг.

Бурадан ајдындыр ки, әкәр истәнилән t үчүн (7) шәрти өдәнирсә, $AB=BA$.

Тутаг ки, $AB=BA$. Онда истәнилән m вә k үчүн $A^mB^k=B^kA^m$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (8) бәрабәрлијиндә сағ тәрәф сыфыр олар, јә'ни (7) бәрабәрлијинин доғрулуғу алынар.

(7) бәрабәрлијиндән истифадә едәрәк

$$J(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}=\lambda E+Z$$

матриси үчүн $e^{J(\lambda)t}$ матрисини һесаблајаг.

Ваһид матрис истәнилән матрислә коммутатив олдуғундан, (7) бәрабәрлијинә әсасән $e^{J(\lambda)t}=e^{\lambda Et}e^{Zt}=e^{\lambda t}e^{Zt}$. Асанлыгла јохламаг олар ки,

$$Z^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix},\ldots,Z^{n-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}, Z^n=0,$$

јә'ни Z нилпотент матрисдир. Онда

$$e^{Zt}=E+Zt+\frac{Z^2t^2}{2!}+\cdots+\frac{Z^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$e^{J(\lambda)t}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2!}\cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\\ 0 & 1 & t\cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0\cdots & 1\end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Верилмиш A вә B матрисләри үчүн $B=P^{-1}AP$ мүнасибәтини өдәјән гејри-мәхсуси P матриси варса, A, B матрисләринә охшар матрисләр дејилир.

Тутаг ки, A матриси верилмишдир. Ајдындыр ки, мүхтәлиф P матрисләри сечмәклә A илә охшар олан мүхтәлиф матрисләр алмаг олар.

Матрисләр нәзәријјәсиндән мә'лумдур ки, һәр бир n-тәртибли A квадрат матриси үчүн елә P матриси вар ки,

$$J=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_l}(\lambda_l)\end{pmatrix}$$

олур, бурада

$$J_{m_i}(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i\end{pmatrix},\quad i=1,2,\ldots,l$$

шәклиндә $m_i\geqslant 1$ тәртибли квадрат матрисдир; $m_1+m_2+\cdots+m_l=n$, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_l$ исә A матрисинин характеристик әдәдләридир вә үмумијјәтлә, мүхтәлиф олмаја биләрләр.

Бу гајда илә гурулан J *матрисинә A матрисинин каноник Жордан формасы*, $J_{m_i}(\lambda_i)$-*јә исә Жордан һүчрәси дејилир*. Хүсуси һалда, $m_{i_0}=1$ исә, $J_{m_{i_0}}(\lambda_{i_0})$ јеканә λ_{i_0} елементи олан бирелементли һүчрәдир.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$e^{Jt}=\begin{pmatrix}e^{J_{m_1}(\lambda_1)t} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{J_{m_2}(\lambda_2)t} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_{m_l}(\lambda_l)t}\end{pmatrix}$$

вә $e^{J_{m_i}(\lambda_i)t}$, $i=1,2,\ldots,l$ матрисләри (9) дүстурунун көмәјилә гурулур.

г) *Системин вектор-матрис шәкли.* Јухарыда верилән анлајышлардан истифадә едәрәк (1) системини

$$\dot{x}=A(t)x+f(t) \qquad (1')$$

шәклиндә јазмаг олар; бурада x—компонентләри $x_1, x_2, \ldots, x_n$ олан сүтун вектор, $\dot{x}$ онун төрәмәси, $f(t)$—компонентләри $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ олан сүтун вектор, $A(t) = (a_{ij}(t))$ исә (1) системинин $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ әмсалларындан дүзәлмиш матрисдир.

Фәрз едәчәјик ки, $f(t)$ вектор-функсијасы вә $A(t)$ матрис-функсијасы мүәјјән (α, β) интервалында кәсилмәздирләр. Мә'лумдур ки, бу заман ихтијари $t_0 \in (\alpha, \beta)$ әдәди вә x° вектору үчүн (1′) системинин

$$x(t_0) = x^\circ$$

шәртини өдәјән вә (α, β) интервалында тә'јин олунан јеканә һәлли вар (бах: IV фәсил, § 7).

§ 2. ХӘТТИ БИРЧИНС СИСТЕМЛӘР

Тутаг ки, n-тәртибли

$$\dot{x} = A(t)x \tag{10}$$

хәтти бирчинс системи верилмишдир. Бурада $A(t)$ верилмиш (α, β) интервалында кәсилмәз олан n-тәртибли квадрат матрис-функсија, x исә n-өлчүлү сүтун вектордур.

Ајдындыр ки, $x(t) \equiv 0$ вектор-функсијасы (10) системинин һәллидир вә һәр һансы $y(t)$ вектор-функсијасы (10) системинин $y(t_0) = 0$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ шәртини өдәјән һәлли исә, һәллин јеканәлијинә әсасән $y(t) \equiv 0$ олур. *Системин $x(t) \equiv 0$ һәллинә тривиал һәлл дејилир.*

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $x^1(t)$ вектор-функсијасы (10) системинин һәлли олдугда ихтијари a әдәди үчүн $ax^1(t)$ дә һәллдир вә $x^1(t)$, $x^2(t)$ ики ихтијари һәлл исә, $x^1(t) + x^2(t)$ чәми дә һәллдир.

Демәли, (10) системинин һәлләри чохлуғу хәтти фәза тәшкил едир.

Тутаг ки, (α, β) интервалында тә'јин олунмуш $y^1(t)$, $y^2(t)$, $\ldots$, $y^k(t)$ вектор-функсијалары верилмишдир.

$$a_1y^1(t) + a_2y^2(t) + \cdots + a_ky^k(t) = 0 \tag{11}$$

мүнасибәти, ихтијари $t \in (\alpha, \beta)$ үчүн анчаг $a_1, a_2, \ldots, a_k$ әдәдләри сыфыр олдугда өдәнәрсә, дејирләр ки, һәмин вектор-функсијалар (α, β) интервалында хәтти асылы олмајандырлар. Әкс һалда, јә'ни (11) мүнасибәти ихтијари $t \in (\alpha, \beta)$ үчүн $a_1, a_2, \ldots, a_k$, әдәдләриндән һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олдугда өдәнәрсә, дејирләр ки, һәмин вектор функсијалар (α, β) интервалында хәтти асылыдырлар.

Көстәрәк ки, (10) системинин n сајда хәтти асылы олмајан һәлли вар. Бунун үчүн R_n фәзасындан n сајда хәтти асылы олмајан

$$p^1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{n1} \end{pmatrix}, \; p^2 = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, p^n = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{nn} \end{pmatrix}$$

векторларыны көтүрәк вә (10) системинин $x(t_0) = p^1$ шәртини өдәјән һәллини $\varphi^1(t)$, $x(t_0) = p^2$ шәртини өдәјән һәллини $\varphi^2(t)$ илә вә с. $x(t_0) = p^n$ шәртини өдәјән һәллини исә $\varphi^n(t)$ илә ишарә едәк. Бу һалда илә гурулмуш $\varphi^1(t)$, $\varphi^2(t), \ldots, \varphi^n(t)$ һәлләр системи хәтти асылы олмајандыр. Доғрудан да, бу һәлләр хәтти асылы олсалар, һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан $a_1, a_2, \ldots, a_n$ әдәдләри тапмаг олар ки,

$$a_1\varphi^1(t) + a_2\varphi^2(t) + \cdots + a_n\varphi^n(t) = 0, \quad t \in (\alpha, \beta)$$

мүнасибәти өдәнәр. Бурада $t = t_0$ көтүрсәк,

$$a_1p^1 + a_2p^2 + \cdots + a_np^n = 0$$

мүнасибәтини аларыг. Бу исә $p^1, p^2, \ldots, p^n$ векторларынын хәтти асылы олмамасы шәртинә зиддир. Демәли, $\varphi^1(t)$, $\varphi^2(t), \ldots$, $\varphi^n(t)$ һәлләри хәтти асылы олмајандыр. Системин ихтијари $x(t)$ һәллини көтүрүб $x(t_0) = c$ ишарә едәк. Мә'лумдур ки, c векторуну $p^1, p^2, \ldots, p^n$ векторлары үзрә јеканә һалда илә

$$c = c_1p^1 + c_2p^2 + \cdots + c_np^n$$

шәклиндә көстәрмәк олар.

Ајдындыр ки,

$$y(t) = c_1\varphi^1(t) + c_2\varphi^2(t) + \cdots + c_n\varphi^n(t)$$

вектор-функсијасы (10) системинин

$$y(t_0) = c_1p^1 + c_2p^2 + \cdots + c_np^n = c$$

башланғыч шәртини өдәјән һәллидир. Һәллин јеканәлијинә әсасән аларыг ки, $y(t) \equiv x(t)$, јә'ни

$$x(t) = c_1\varphi^1(t) + c_2\varphi^2(t) + \cdots + c_n\varphi^n(t). \tag{12}$$

Демәли, (10) системинин n сајда хәтти асылы олмајан һәлли вар вә һәр бир һәлли бу һәлләрин хәтти комбинасијасы шәклиндә көстәрмәк олар. Беләликлә, ашағыдакы теореми исбат етмиш олуруг:

Теорем 1. *Тутаг ки, $A(t)$ матрис-функсијасы (α, β) интервалында кәсилмәздир. Онда (10) системинин һәлләри чохлуғу бу интервалда n-өлчүлү хәтти фәза тәшкил едир.*

Теоремин исбатындан ајдындыр ки, хәтти асылы олмајан $p^1, p^2, \ldots, p^n$ векторларыны мүхтәлиф шәкилдә сечмәклә (10) системинин мүхтәлиф хәтти асылы олмајан һәлләр системини гурмаг олар.

Хәтти бирҹинс (*10*) *системинин хәтти асылы олмајан* $\varphi^1(t), \varphi^2(t), \ldots, \varphi^n(t)$ *һәлләринә һәмин системин базиси вә ја фундаментал һәлләр системи* дејилир.

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ әдәдләринә ихтијари сабитләр кими бахсаг, (12) дүстуру (10) системинин үмуми һәллини верир.

Тутаг ки, $x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)$ вектор-функсијалары (10) системинин (α, β) интервалында һәлләридир. Сүтунлары бу һәлләрдән ибарәт олан

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad (13)$$

матрисини дүзәлдәк; бурада $x_{1i}(t), x_{2i}(t), \ldots, x_{ni}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ илә $x^i(t)$ һәллинин компонентләри ишарә олунмушдур. *$X(t)$ матрисинин детерминантына $x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)$ һәлләриндән дүзәлдилмиш Вронски детерминанты дејилир вә $W(t) = W(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ илә ишарә олунур.* Ајдындыр ки, $X(t)$ матриси

$$\dot X = A(t) X \quad (14)$$

матрис-системинин һәллидир.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $X(t)$ матрис-функсијасы (14) матрис-системинин һәлли исә, онун сүтунларындан ибарәт олан вектор-функсијалар (10) системинин һәлләридир.

Сүтунлары (10) системинин һәр һансы $\varphi^1(t), \varphi^2(t), \ldots, \varphi^n(t)$ фундаментал һәлләриндән ибарәт олан $\Phi(t)$ матрисинә һәмин системин *фундаментал матриси* дејилир. Фундаментал матрисин көмәји илә (10) системинин үмуми һәллини

$$x = \Phi(t) c \quad (12')$$

шәклиндә јазмаг олар; бурада c—ихтијари сүтун вектордур.

Теорем 2 (Лиувилл теореми). *Тутаг ки, $X(t)$ матриси (14) матрис-системинин һәллидир. Онда $W(t) = \det X(t)$ функсијасы*

$$\dot z = \operatorname{Sp} A(t) z \quad (15)$$

тәнлијинин һәллидир, бурада $\operatorname{Sp} A(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$.

Исбаты. Шәртә көрә $X(t) = (x_{ij}(t))$ матриси (14) матрис-системинин һәлли олдуғундан, (α, β) интервалында

$$\dot x_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) x_{kj}(t), \; i, j = 1, 2, \ldots, n \quad (16)$$

ејниликләри өдәнир.

Мә'лумдур ки, n-тәртибли детерминантын төрәмәси n сајда детерминантын ҹәминә бәрабәрдир.

Бу ҹәмин 1-ҹи топлананы верилмиш детерминантын 1-ҹи сәтир елементләрини онларын төрәмәләри илә, 2-ҹи топлананы верилмиш детерминантын 2-ҹи сәтир елементләрини онларын төрәмәләри илә вә с. n-ҹи топлананы исә верилмиш детерминантын n-ҹи сәтир елементләрини онларын төрәмәләри илә әвәз етмәклә алыныр.

Бу гајданы вә (16) ејниликләрини нәзәрә алсаг,

$$\dot W(t) = \begin{vmatrix} \dot x_{11}(t) & \dot x_{12}(t) & \cdots & \dot x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dot x_{n1}(t) & \dot x_{n2}(t) & \cdots & \dot x_{nn}(t) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma a_{1k}(t) x_{k1}(t) & \Sigma a_{1k}(t) x_{k2}(t) & \cdots & \Sigma a_{1k}(t) x_{kn}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+ \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma a_{nk}(t) x_{k1}(t) & \Sigma a_{nk}(t) x_{k2}(t) & \cdots & \Sigma a_{nk}(t) x_{kn}(t) \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантларын биринҹисиндә 2-ҹи сәтри $a_{12}(t)$-јә, 3-ҹү сәтри $a_{13}(t)$-јә вә с. n-ҹи сәтри $a_{1n}(t)$-јә вуруб һамысыны биринҹи сәтир елементләриндән чыхсаг,

$$\begin{vmatrix} a_{11}(t) x_{11}(t) & a_{11}(t) x_{12}(t) & \cdots & a_{11}(t) x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} = a_{11}(t) W(t)$$

детерминантыны аларыг. Дикәр детерминантлар үзәриндә дә охшар чевирмәләр апарсаг, нәтиҹәдә

$$\dot W(t) = SpA(t) W(t)$$

ејнилијини аларыг. Теорем исбат олунду.

Мә'лумдур ки, (15) тәнлијинин һәлләри $z(t) = z(t_0) \times \exp\left(\int_{t_0}^{t} SpA(\tau) d\tau\right)$ шәклиндәдир. Одур ки, теоремә әсасән

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} SpA(\tau)\,d\tau\right),\quad t_0,\ t\in(\alpha,\beta) \qquad (17)$$

дүстуру алыныр. Бу дүстура *Остроградски—Лиувилл—Јакоби дүстуру* дејилир. Бу дүстурдан ајдындыр ки, мүәјјән $t_0\in(\alpha,\beta)$ үчүн $W(t_0)\neq 0$ исә, истәнилән $t\in(\alpha,\beta)$ үчүн $W(t)\neq 0$.

Теорем 3. *Тутаг ки, $X(t)$ матриси (14) матрис-системинин һәр һансы һәллидир. Бу матрисин (10) системинин фундаментал матриси олмасы үчүн $\det X(t)\neq 0$, $t\in(\alpha,\beta)$ олмасы зәрури вә кафидир.*

Кафилијин исбаты. Тутаг ки, $X(t)$ матриси (14) матрис-системинин һәллидир вә $\det X(t)\neq 0$, $t\in(\alpha,\beta)$. Бу матрисин (14) матрис-системинин һәлли олмасындан алыныр ки, онун сүтунларындан дүзәлдилмиш $x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)$ вектор-функсијалары (α,β) интервалында (10) системинин һәлләридир вә $\det X(t)\neq 0$, $t\in(\alpha,\beta)$ олдуғундан, бу вектор-функсијалар хәтти асылы дејилләр. Демәли, $x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)$ вектор-функсијалары (10) системинин фундаментал һәлләри, $X(t)$ исә онун фундаментал матрисидир.

Зәрурилијин исбаты. Тутаг ки, $X(t)$ матриси (10) системинин (α,β) интервалында фундаментал матрисидир вә $x(t)$ вектор-функсијасы һәмин системин $x(t_0)=x^0$ шәртини өдәјән һәллидир; бурада $t_0\in(\alpha,\beta)$ вә x^0 верилмиш сүтун вектордур. 1-чи теоремә әсасән, јеканә гајда илә сечилмиш елә $c_1, c_2, \ldots, c_n$ әдәдләри вар ки,

$$x(t) = c_1x^1(t) + c_2x^2(t) + \cdots + c_nx^n(t).$$

Бурадан алырыг ки, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ әдәдләри

$$c_1x^1(t_0)+c_2x^2(t_0)+\cdots+c_nx^n(t_0)=x^0$$

чәбри тәнликләр системинин һәллидир. Бу чәбри тәнликләр системинин һәлли јеканә олдуғундан (истәнилән x^0 үчүн), алыныр ки, $W(t_0)=\det X(t_0)\neq 0$. Онда (17) дүстуруна әсасән, $\det X(t)\neq 0$, $t\in(\alpha,\beta)$. Теорем исбат олунду.

Гејд 1. $X(t)$ матрис-функсијасы (14) матрис-системинин һәлли дејилсә, онун сүтунларындан дүзәлдилмиш вектор-функсијалар хәтти асылы олмадыгда белә $\det X(t)\equiv 0$ ола биләр.

Мисал

$$x^1(t)=\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix},\quad x^2(t)=\begin{pmatrix}t\\ t^2\end{pmatrix},\quad -\infty<t<+\infty$$

вектор-функсијаларынын хәтти асылы олмамасына бахмајараг, онларын көмәјилә дүзәлдилмиш $X(t)$ матрисинин детерминанты

$$\det X(t)=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & t^2\end{vmatrix}\equiv 0,\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

Бунун сәбәби ондан ибарәтдир ки, гурулан $X(t)$ матриси (14) шәкилли һеч бир кәсилмәз әмсаллы матрис-системин һәлли ола билмәз.

Теорем 4. *Тутаг ки, $X(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$ (10) системинин фундаментал матриси, C исә ихтијари гејри-мәхсуси сабит матрисдир. Онда $X(t)C$ матриси дә фундаментал матрисдир вә (10) системинин һәр бир $Y(t)$ фундаментал матриси мүәјјән гејри-мәхсуси C матрисинин көмәјилә $Y(t)=X(t)C$ шәклиндә көстәрилә биләр.*

Исбаты. Әввәлчә көстәрәк ки, $X(t)C$ матриси (14) матрис-системинин һәллидир. Доғрудан да, $X(t)$ матриси (14) матрис-системинин һәлли олдуғундан,

$$\frac{d}{dt}(X(t)C)=\dot X(t)C=(A(t)X(t))C=A(t)(X(t)C).$$

Бу көстәрир ки, $X(t)C$ матриси (14) матрис-системинин һәллидир. Дикәр тәрәфдән,

$$\det(X(t)C)=\det X(t)\det C\neq 0$$

олдуғундан, 3-чү теоремә әсасән алырыг ки, $X(t)C$ матриси (10) системинин фундаментал матрисидир.

Тутаг ки, $Y(t)$ матриси (10) системинин башга фундаментал матрисидир вә $Z(t)=X(t)Y(t)$ ишарә едәк. $X(t)$ вә $Y(t)$ матрисләри (14) матрис системинин һәлли олдуғундан, (4) дүстуруну да нәзәрә алмагла јаза биләрик

$$\dot Z(t)=\frac{d}{dt}\left(X^{-1}(t)Y(t)\right)=\frac{dX^{-1}(t)}{dt}Y(t)+X^{-1}(t)\frac{dY(t)}{dt}=$$

$$=-X^{-1}(t)\dot X^{-1}(t)X^{-1}(t)Y(t)+X^{-1}(t)\dot Y(t)=$$

$$=-X^{-1}(t)A(t)X(t)X^{-1}(t)Y(t)+X^{-1}(t)A(t)Y(t)=0;$$

бурада 0—сыфыр матрисдир.

Демәли, $Z(t)$ сабит матрисдир вә $\det Z=\det X^{-1}(t)\det Y(t)\neq 0$. Бурадан алырыг ки, $Y(t)=X(t)C$ вә C гејри-мәхсуси матрисдир. Теорем исбат олунду.

Тутаг ки, $X(t)$ матриси (10) системинин һәр һансы фундаментал матрисидир. Демәли, $X(t)$ матрис-функсијасы (14) матрис-системинин һәллидир. Онда $\dot X(t)=A(t)X(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$ вә $A(t)=\dot X(t)X^{-1}(t)$. Дикәр тәрәфдән, һәр бир $Y(t)$ фундаментал матриси, теоремә әсасән, $Y(t)=X(t)C$ шәклиндә көстәрилә билдијиндән, $\dot Y(t)Y^{-1}(t)=\dot X(t)CC^{-1}X^{-1}(t)=\dot X(t)X^{-1}(t)$ олар.

Беләликлә, верилмиш системин сонсуз сајда фундаментал матрисләри олмасына бахмајараг, һәр һансы фундаментал матрисә көрә систем (јә'ни $A(t)$ матриси) јеканә гајда илә гурулур.

Мисаллар.

1. Асанлыгла јохламаг олар ки,

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1+t^2 \end{pmatrix}$$

вектор-функсијалары

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -tx_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = (1-t^2)x_1 + tx_2 \end{cases}$$

системинин хәтти асылы олмајан һәлләридир. $x^1(t)$, $x^2(t)$ системин фундаментал һәлләр системини тәшкил едир вә

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1+t^2 \end{pmatrix}$$

матриси, һәмин системин фундаментал матриси олур.

2. Фундаментал матриси

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \sin t & -e^t \cos t \\ \cos t & e^t \sin t \end{pmatrix}$$

олан диференсиал тәнликләр системини гураг.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\dot{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -e^t \cos t + e^t \sin t \\ -\sin t & e^t \sin t + e^t \cos t \end{pmatrix},$$

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \end{pmatrix}.$$

Она көрә

$$A(t) = \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t & 1 - \sin t \cos t \\ -1 - \sin t \cos t & \sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Демәли, бир фундаментал матриси $\Phi(t)$ олан систем ашағыдакы шәкилдә олар

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cos^2 t + (1 - \sin t \cos t)\, x_2, \\ \dot{x}_2 = -(1 + \sin t \cos t)\, x_1 + x_2 \sin^2 t. \end{cases}$$

§ 3. ХӘТТИ БИРЧИНС ОЛМАЈАН СИСТЕМЛӘР САБИТЛӘРИН ВАРИАСИЈАСЫ УСУЛУ

Тутаг ки,

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{1'}$$

системи верилмишдир вә $x = x^1(t)$ онун һәр һансы һәллидир. $x = x^1(t) + z$ əвəзләмәси апарсаг, аларыг ки, z вектор-функсијасы

$$\dot{z} = A(t)z$$

хәтти бирчинс системинин һәллидир. Бу көстәрир ки, хәтти бирчинс олмајан системин бир хүсуси һәлли мә'лум оларса, онун үмуми һәллинин гурулмасы мәсәләси, ујғун бирчинс системин үмуми һәллинин гурулмасы мәсәләсинә кәтирилир.

Көстәрәк ки, хәтти бирчинс (10) системинин мүәјјән бир $\Phi(t)$ фундаментал матрисинин көмәји илә (1′) системинин үмуми һәллини гурмаг олар. Бунун үчүн *сабитләрин вариасијасы* адланан үсулдан истифадә едәк.

Мә'лумдур ки, (10) системинин үмуми һәлли

$$x = \Phi(t)c \tag{12'}$$

дүстуру илә верилир. Бурада c ихтијари сабит сүтун вектордур. Бу вектора t дәјишәнинин һәләлик намә'лум олан вектор-функсијасы кими бахыб ону елә сечәк ки,

$$x = \Phi(t)\, c(t) \tag{18}$$

вектор-функсијасы (1′) системинин һәлли олсун. Бу əвəзләмәни (1′) тәнлијиндә јазараг, $\Phi(t)$ матрис-функсијасынын (14) матрис-системинин һәлли олдуғуну нәзәрә алсаг, $c(t)$-јә нәзәрән

$$\Phi(t)\, \dot{c}(t) = f(t)$$

системини аларыг.

Шәртә көрә $\Phi(t)$ фундаментал матрис олдуғундан, $\Phi^{-1}(t)$ вар. Одур ки, сонунчу системи

$$\dot{c}(t) = \Phi^{-1}(t) f(t)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Алынан тәнлији t_0-дан t-јә гәдәр интегралласаг,

$$c(t) = c + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Бурада $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ихтијари нөгтәдир, c исә ихтијари сабит сүтун вектордур. Бу ифадәни (18)-дә јеринә јазсаг,

$$x = \Phi(t)c + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{19}$$

Ајдындыр ки, (19) дүстурунда биринчи топланан (10) бирчинс системинин үмуми һәллидир. Асанлыгла јохламаг олар ки, һәмин дүстурдакы икинчи топланан (1′) системинин $x(t_0)=0$ башланғыч шәртини өдәјән һәллидир. Бундан башга, (1′) системинин $x(t_0)=x_0$ башланғыч шәртини өдәјән һәлли

$$x=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \qquad (20).$$

Бу дүстурда $F(t,\tau)=\Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ ишарә етсәк, ону

$$x=F(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)f(\tau)d\tau \qquad (21)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу гајда илә гурулмуш $F(t,\tau)$ *матрисинә Коши матриси* дејилир.

Мисал. Сабитләрин вариасијасы үсулу илә

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-tx_1+x_2+\dfrac{1}{1+t^2},\\ \dot{x}_2=(1-t^2)x_1+tx_2+\ln t\end{cases}$$

системини һәлл едәк. Бу системә ујғун олан

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-tx_1+x_2,\\ \dot{x}_2=(1-t^2)x_1+tx_2\end{cases}$$

бирчинс системинин фундаментал матриси (бах: § 2, 1-чи мисал)

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}1 & t\\ t & 1+t^2\end{pmatrix}$$

шәклиндәдир вә

$$\Phi^{-1}(t)=\begin{pmatrix}1+t^2 & -t\\ -t & 1\end{pmatrix},\quad f(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+t^2}\\ \ln t\end{pmatrix}.$$

Она көрә дә (19) дүстуруна әсасән, верилмиш системин үмуми һәлли

$$x=\begin{pmatrix}1 & t\\ t & 1+t^2\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}1+\tau^2 & -\tau\\ -\tau & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+\tau^2}\\ \ln\tau\end{pmatrix}d\tau\right\}$$

олар. Бу һәлл координатларла

$$x_1=c_1+(c_2+1)t-0{,}75t^2+0{,}5t^2\ln t-0{,}5t\ln(1+t^2),$$
$$x_2=c_2+(c_1-1)t+(c_2+1)t^2-0{,}75t^3+t(1+0{,}5t^2)\ln t-$$
$$-0{,}5(1+t^2)\ln(1+t^2)$$

шәклиндә јазылыр.

§ 4. ГОШМА СИСТЕМ

Тутаг ки,

$$\dot{x}=A(t)x \qquad (10)$$

системи верилмишдир. Бу системлә јанашы

$$\dot{y}=-A^*(t)y \qquad (22)$$

системинә бахаг; бурада $A^*(t)$ илә $A(t)$ матрисинин транспонирә олунмуш матриси ишарә едилмишдир. ($A^*(t)$-јә һәм дә $A(t)$-нин гошмасы дејилир).

Бу гајда илә гурулан (10) вә (22) системләри гошма системләр адланыр.

Теорем 5. *Тутаг ки, $\Phi(t)$ матриси (10) системинин һәр һансы фундаментал матрисидир. Онда $\Phi^{*-1}(t)$ матриси (22) системинин фундаментал матриси олур.*

Исбаты. $\Phi(t)$ фундаментал матрис олдуғундан, $\dot\Phi(t)=A(t)\Phi(t)$ ејнилији өдәнир. Бурадан $\dot\Phi^*(t)=\Phi^*(t)A^*(t)$. Онда (4) дүстуруна әсасән алырыг ки,

$$\frac{d}{dt}\Phi^{*-1}(t)=-\Phi^{*-1}(t)\frac{d\Phi^*(t)}{dt}\Phi^{*-1}(t)=$$
$$=-\Phi^{*-1}(t)\Phi^*(t)A^*(t)\Phi^{*-1}=-A^*(t)\Phi^{*-1}(t).$$

Демәли, гошма системләрдән биринин фундаментал матриси мә'лум олдугда дикәринин дә фундаментал матрисини тапмаг олар.

Теорем 6. *Тутаг ки, $\Phi(t)$ матриси (10) системинин, $\Psi(t)$ матриси исә (22) системинин фундаментал матрисидир. Онда*

$$\Psi^*(t)\,\Phi(t)=C$$

олур. Бурада C гејри-мәхсуси сабит матрисдир.

Исбаты. $\Psi(t)$ матриси (22) системинин фундаментал матриси олдуғундан, $\dot\Psi(t)=-A^*(t)\Psi(t)$ ејнилији өдәнир. Бурадан $\dot\Psi^*(t)=-\Psi^*(t)A(t)$. Онда $\dot\Phi(t)=A(t)\Phi(t)$ ејнилијини дә нәзәрә алсаг,

$$\frac{d}{dt}(\Psi^*(t)\Phi(t))=\dot\Psi^*(t)\Phi(t)+\Psi^*(t)\dot\Phi(t)=0.$$

Демәли, $\Psi^*(t)\Phi(t)=C$ вә $\det C=\det\Psi^*(t)\det\Phi(t)\neq0$ олур ки, бу да теоремин доғрулуғуну көстәрир.

Әкәр $A(t)=-A^*(t)$ оларса, (10) системинә *өзү-өзүнә гошма систем* дејилир.

Ахырынчы теоремдән ајдындыр ки, өзү-өзүнә гошма систем үчүн $\Phi(t)$ матриси илә бирликдә $\Phi^{*-1}(t)$ матриси дә фун-

даментал матрис олур. Онда 4-чү теоремә әсасән алырыг ки, өзү-өзүнә гошма систем үчүн

$$\Phi^*(t)\,\Phi(t)=C.$$

Бурада C ғеjри-мәхсуси сабит матрисдир.

Тутаг ки, $\Psi(t)$ матриси (22) системинин фундаментал матрисидир. Онда 6-чы теоремә әсасән аjдындыр ки, $\Psi^{*-1}(t)$ матриси (10) системинин фундаментал матриси олар. Одур ки, (20) дүстуруну

$$x=\Psi^{*-1}(t)\,\Psi^*(t_0)\,x_0+\int_{t_0}^{t}\Psi^{*-1}(t)\,\Psi^*(\tau)f(\tau)\,d\tau \qquad (23)$$

шәклиндә јазмаг олар.

§ 5. САБИТ ӘМСАЛЛЫ БИРЧИНС СИСТЕМ

Хәтти бирчинс (10) системиндә $A(t)$ матриси сабит оларса, белә системә *сабит әмсаллы систем* деjилир вә

$$\dot{x}=Ax \qquad (24)$$

шәклиндә јазылыр.

Теорем 7. *Сабит әмсаллы (24) системи үчүн*

$$\Phi(t)=e^{At} \qquad (25)$$

матриси фундаментал матрис олур.

Исбаты. Матрисин експонентинин тә'рифинә әсасән

$$e^{At}=E+At+\frac{A^2}{2!}t^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!} \qquad (26)$$

матрис сырасы мүнтәзәм јығылыр вә ону һәдбәһәд диференсиалламаг олар. Одур ки,

$$\frac{d}{dt}e^{At}=A+\frac{A^2}{1!}t+\frac{A^3}{2!}t^2+\cdots=$$

$$=A\left(E+At+\frac{A^2}{2!}t^2+\cdots\right)=Ae^{At}.$$

Демәли, $\Phi(t)=e^{At}$ матрис-функсиjасы

$$\dot{X}=AX \qquad (27)$$

сабит әмсаллы матрис-системинин $X(0)=E$ шәртини өдәјән һәллидир. Онда (17) дүстурундан ($t_0=0$ көтүрмәклә) алырыг ки,

$$\det e^{At}=e^{\int_0^t \mathrm{Sp}\,A\,d\tau}=e^{t\,\mathrm{Sp}\,A}>0.$$

Бу көстәрир ки, $\Phi(t)=e^{At}$ матриси (27) системинин ғеjри-мәхсуси матрис һәллидир. Бурадан 3-чү теоремә әсасән алырыг ки, бу матрис (24) системинин фундаментал матрисидир. Теорем исбат олунду.

Теоремә әсасән алырыг ки, (24) системинин үмуми һәлли

$$x=e^{At}c \qquad (28)$$

шәклиндә олар, бурада c ихтиjари сабит сүтун вектордур.

Истәнилән t вә s үчүн (7) дүстуруна әсасән

$$e^{A(t+s)}=e^{At}\,e^{As}\ \text{вә ја}\ \Phi(t+s)=\Phi(t)\,\Phi(s)$$

бәрабәрлиjи доғрудур.

Јухарыда исбат олунмуш 7-чи теоремә вә (20) дүстуруна әсасән алырыг ки, бирчинс олмаjан сабит әмсаллы

$$\dot{x}=Ax+f(t) \qquad (29)$$

системинин $x(t_0)=x^0$ шәртини өдәјән һәлли

$$x=e^{A(t-t_0)}x^0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau \qquad (30)$$

вә ја

$$x=\Phi(t-t_0)\,x^0+\int_{t_0}^{t}\Phi(t-\tau)f(\tau)\,d\tau \qquad (31)$$

дүстуру илә тә'јин олунур.

Аjдындыр ки, сабит әмсаллы хәтти бирчинс системин һәлләринин t дәјишәниндән асылылығыны билмәк үчүн, $\Phi(t)=e^{At}$ матрисинин гурулушуну билмәк лазымдыр. Бу исә өз нөвбәсиндә бир чох мәсәләләрин һәлли заманы мүһүм рол оjнаjыр.

Тутаг ки, J матриси A матрисинин каноник Жордан формасыдыр, jә'ни елә ғеjри-мәхсуси P матриси вар ки, $A=PJP^{-1}$ олур. Бурадан

$$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}$$

бәрабәрлиjини аларыг. Јухарыда e^{Jt} матриси һесабланмышдыр. Һәмин матриси ахырынчы бәрабәрликдә јазыб e^{At} матрисини һесабламаг олар.

Беләликлә, A матрисинин J каноник Жордан формасы мә'лум оларса, $\Phi(t)=e^{At}$ фундаментал матрисинин елементләринин t дәјишәниндән асылылығыны билмәк олар. Ғеjд едәк ки, A матрисинин J каноник Жордан формасы мә'лум олдугда (24) системи әвәзләмә васитәсилә даһа асан һәлл олунан системә кәтирилир.

Доғрудан да, тутаг ки, $A=PJP^{-1}$ вә (24) системиндә

$$x=Py$$

әвәзләмәси апараг. Онда y-ә нәзәрән $P\dot{y} = APy$ системи вә ја һәр тәрәфини P^{-1}-ә солдан вуруб $J = P^{-1}AP$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\dot{y} = Jy \tag{32}$$

системи алыныр. Бу системи координатларла јазаг:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + y_2, \\ \dot{y}_2 = \lambda_1 y_2 + y_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}_{m_1} = \lambda_1 y_{m_1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dot{y}_n = \lambda_l y_n. \end{cases} \tag{32'}$$

Бурада биринчи m_1 тәнлик J матрисинин $J_{m_1}(\lambda_1)$ Жордан һүчрәсинә, сонракы m_2 тәнлик $J_{m_2}(\lambda_2)$ Жордан һүчрәсинә вә с. ујғун алынмышдыр.

Алынмыш системин һәр һүчрәјә ујғун олан һиссәсини ашағыдан јухарыја ардычыл интеграллямагла онун үмуми һәллини гурмаг олар.

Мисаллар.

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 = 3x_1 - x_2 - x_3 \end{cases}$

системинин фундаментал матрисини вә үмуми һәллини гурмалы.

Һәлли. Системин әмсалларындан дүзәлмиш матрис

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

вә

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = A^5 = \cdots = 0$$

олдуғундан,

$$e^{\lambda t} = E + At + \frac{A^2}{2}t^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^2 & -t - \frac{1}{2}t^2 \\ t + \frac{1}{2}t^2 & 1 - t + \frac{1}{2}t^2 & -\frac{1}{2}t^2 \\ 3t + t^2 & -t + t^2 & 1 - t - t^2 \end{pmatrix}.$$

Онда, системин үмуми һәлли координатларла ашағыдакы шәкилдә олар:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + (2c_1 - c_3)t + \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - c_3)t^2, \\ x_2 = c_2 + (c_1 - c_2)t + \frac{1}{2}(c_1 + c_2 - c_3)t^2, \\ x_3 = c_3 + (3c_1 - c_2 - c_3)t + (c_1 + c_2 - c_3)t^2. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$$

системинин фундаментал матрисини гурмалы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

олдуғундан (јә'ни A диагонал матрислә нилпотент матрисин чәми шәклиндәдир),

$$e^{At} = e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} t} = e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} t} e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Демәли,

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

матриси бахылан системин фундаментал матрисидир.

§ 6. САБИТ ӘМСАЛЛЫ БИРЧИНС СИСТЕМИН ҮМУМИ ҺӘЛЛИНИН ГУРУЛМАСЫ

Јухарыда A матрисинин J каноник Жордан формасы мә'лум олдугда сабит әмсалы (24) системинин үмуми һәллинин тапылмасы даһа асан һәлл олунан (32) системинә кәтирилди. Лакин A матрисинин Жордан формасыны тапмаг әмәлијјаты мүрәккәб олдуғундан, бу параграфда (24) системинин һәлли башга үсулла тапылыр. Бу мәгсәдлә (24) системинин тривиал олмајан һәлләрини

$$x = e^{\lambda t}c \tag{33}$$

шәклиндә ахтарырыг, бурада λ һәләлик намә'лум олан, үмумијјәтлә, комплекс әдәд, c исә n өлчүлү намә'лум вә сыфыр

260—12

олмаjан сабит сүтун вектордур. (24) системиндә $x = e^{\lambda t}c$ jазыб $e^{\lambda t}$-jә ихтисар етдикдән сонра c векторуна нәзәрән

$$(\lambda E - A)c = 0 \qquad (34)$$

чәбри тәнликләр системини вә jа компонентләрлә

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11})c_1 - a_{12}c_2 - \cdots - a_{1n}c_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -a_{n1}c_1 - a_{n2}c_2 - \cdots + (\lambda - a_{nn})c_n = 0 \end{cases} \qquad (34')$$

системини аларыг.

Беләликлә, (33) вектор-функсиjасынын (24) системинин тривиал олмаjан һәлли олмасы үчүн c сүтун вектору (34) тривиал олмаjан хәтти-бирҹинс чәбри тәнликләр системинин тривиал олмаjан һәлли олмалыдыр.

Чәбрдән мә'лумдур ки, (34) системинин тривиал олмаjан һәллинин варлығы үчүн, λ әдәди A матрисинин

$$\det(\lambda E - A) = 0 \qquad (35)$$

характеристик тәнлиjинин көкү олмалыдыр. Бу тәнлиjин сол тәрәфиндәки $f(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ ифадәси λ дәjишәнинә нәзәрән n-дәрәчәли чохһәдлидир вә *она A матрисинин характеристик чохһәдлиси, көкләринә A матрисинин характеристик әдәдләри, (34) системинин характеристик әдәдләрә уjғун тривиал олмаjан һәлләринә исә A матрисинин мәхсуси векторлары деjилир.*

Аjдындыр ки, A матрисинин елементләри һәгиги әдәдләр олдуғундан, $f(\lambda)$ чохһәдлиси n дәрәчәли һәгиги әмсаллы чохһәдлидир. Чәбрин әсас теореминә көрә $f(\lambda)$ чохһәдлисинин комплекс әдәдләр меjданында n көкү (көкләрин тәкрарланма дәрәчәси дә нәзәрә алынмагла) вардыр.

Ашағыдакы һаллара бахаг:

а) *Характеристик тәнлиjин көкләри һәгиги вә мүхтәлифдир.* Характеристик әдәдләри $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ илә ишарә едәк. Көстәрәк ки, бу һалда $\lambda_j E - A \ (j = 1, 2, \dots, n)$ матрисинин рангы $(n-1)$-ә бәрабәрдир. Доғрудан да, $f(\lambda_j) = 0$ вә

$$f'(\lambda_j) = \frac{d}{d\lambda}\det(\lambda E - A)\Big|_{\lambda=\lambda_j} = M_{11} + M_{22} + \cdots + M_{nn} \neq 0$$

олдуғундан алырыг ки, $n-1$ тәртибли M_{kk} детерминантларындан һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир, бурада M_{kk} илә $\lambda_j - a_{kk}$ елементинин чәбри тамамлаjычысы ишарә едилмишдир. Демәли, $\lambda_j E - A$ матрисинин рангы $(n-1)$-ә бәрабәрдир вә буна көрә дә, (34) системинин, λ_j характеристик әдәдинә уjғун, сабит вуруг дәгиглиjи илә jеканә тривиал олмаjан һәлли вар. Бу һәлли $c^j \ (j = 1, 2, \dots, n)$ илә, компонентләрини исә $c_1^j, c_2^j, \dots, c_n^j$ илә ишарә едәк.

Беләликлә, (24) системинин n саjда

$$e^{\lambda_1 t}c^1, e^{\lambda_2 t}c^2, \dots, e^{\lambda_n t}c^n \qquad (36)$$

һәлләрини гурмуш олуруг. Көстәрәк ки, бу һәлләр (24) системинин фундаментал һәлләр системини тәшкил едир.

Тутаг ки, $a_1, a_2, \dots, a_n$ әдәдләри үчүн

$$a_1 e^{\lambda_1 t}c^1 + a_2 e^{\lambda_2 t}c^2 + \cdots + a_n e^{\lambda_n t}c^n = 0, \quad t \in (-\infty, +\infty) \qquad (37)$$

еjнилиjи өдәнир. Бу еjниликдән ардычыл олараг $n-1$ дәфә төрәмә алмагла

$$\begin{cases} \lambda_1 e^{\lambda_1 t}a_1c^1 + \lambda_2 e^{\lambda_2 t}a_2c^2 + \cdots + \lambda_n e^{\lambda_n t}a_nc^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 t}a_1c^1 + \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 t}a_2c^2 + \cdots + \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n t}a_nc^n = 0 \end{cases} \qquad (38)$$

еjниликләрини аларыг.

Аjдындыр ки, (37), (38) еjниликләринин һәр бири n саjда бәрабәрликдән ибарәтдир. Онларын һәр биринин $к$-чы бәрабәрлиjини көтүрәк:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t}a_1c_k^1 + e^{\lambda_2 t}a_2c_k^2 + \cdots + e^{\lambda_n t}a_nc_k^n = 0, \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t}a_1c_k^1 + \lambda_2 e^{\lambda_2 t}a_2c_k^2 + \cdots + \lambda_n e^{\lambda_n t}a_nc_k^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 t}a_1c_k^1 + \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 t}a_2c_k^2 + \cdots + \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n t}a_nc_k^n = 0. \end{cases} \qquad (39)$$

Гејд олунмуш һәр бир $t \in (-\infty, +\infty)$ үчүн бу бәрабәрликләрә $a_1c_k^1, a_2c_k^2, \dots, a_nc_k^n$ мәчһулларына нәзәрән чәбри тәнликләр системи кими бахаг. Системин баш детерминанты

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1}e^{\lambda_2 t} & \dots & \lambda_n^{n-1}e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t}.$$

Сағ тәрәфдә алынмыш детерминант Вандермонд детерминантыдыр вә мә'лумдур ки, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ әдәдләри мүхтәлиф олдугда сыфырдан фәрглидир. Дикәр тәрәфдән $e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)t} \neq 0$ олдуғундан алырыг ки, системин детерминанты сыфырдан фәрглидир. Бурадан алынар ки, (39) системинин истәнилән $к = 1, 2, \dots, n$ үчүн jеканә тривиал $a_1c_k^1 = 0, a_2c_k^2 = 0, \dots, a_nc_k^n = 0$ һәлли вар. Лакин $c^1, c^2, \dots c^n$ векторларынын һәр биринин һеч олмаса бир компоненти сыфырдан фәргли олдуғундан, алырыг ки, $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$ олмалыр. Бу көстәрир ки, (36) һәлләри хәтти асылы деjилләр.

б) *Характеристик тәнлијин көкләри мүхтәлифдир, лакин онлар ичәрисиндә комплекс әдәд оланы вар.* Бу һалы арашдырмаг үчүн әввәлчә белә бир лемма исбат едәк.

Лемма. *Тутаг ки, $u(t)$, $v(t)$ һәгиги вектор-функсијалары үчүн, $x = u(t) + iv(t)$ комплекс вектор-функсијасы (24) системинин һәллидир. Онда $u(t)$ вә $v(t)$ вектор-функсијаларынын һәр бири һәмин системин һәллидир.*

Исбаты. Шәртә көрә

$$\dot u(t) + i\dot v(t) = Au(t) + i\,Av(t), \quad t\in(-\infty, +\infty)$$

ејнилији өдәнир. Бу ејниликдән, ики комплекс әдәдин бәрабәрлијинә әсасән

$$\dot u(t) = Au(t), \quad \dot v(t) = Av(t)$$

ејниликләрини алырыг. Лемма исбат олунду.

Тутаг ки, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $(\beta \ne 0)$ характеристик әдәддир, онда $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ әдәди дә характеристик әдәддир. Әкәр $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ характеристик әдәдинә ујғун олан мәхсуси вектору $c^1 = p + iq$ илә ишарә етсәк, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ характеристик әдәдинә ујғун олан мәхсуси вектору $c^2 = p - iq$ шәклиндә көтүрмәк олар; бурада p вә q һәгиги сүтун векторлардыр. Бу мәхсуси векторлара ујғун олан һәлләр

$$x^1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(p+iq), \quad x^2(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}(p-iq)$$

олар. Бурадан Ејлер дүстуруна әсасән

$$x^1(t) = e^{\alpha t}(p\cos\beta t - q\sin\beta t) + ie^{\alpha t}(p\sin\beta t + q\cos\beta t),$$

$$x^2(t) = e^{\alpha t}(p\cos\beta t - q\sin\beta t) - ie^{\alpha t}(p\sin\beta t + q\cos\beta t).$$

Леммаја әсасән бурадан аларыг ки, (24) системинин $x^1(t)$, $x^2(t)$ гошма комплекс һәлләринә ујғун, ики

$$\tilde x^1(t) = e^{\alpha t}(p\cos\beta t - q\sin\beta t), \quad \tilde x^2(t) = e^{\alpha t}(p\sin\beta t + q\cos\beta t)$$

һәгиги һәлләри вардыр.

Башга гошма комплекс характеристик әдәдләрә ујғун олан һаллары да белә арашдырмаг олар.

Характеристик әдәдләр мүхтәлиф олдуғундан, бу һалда да $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристик әдәдләринә ујғун гурулан һәгиги һәлләрин фундаментал систем тәшкил етмәси а) һалында олдуғу гајда илә көстәрилир.

в) *Характеристик әдәдләрдән тәкрарлананы олан һал.* Тутаг ки, λ_1 характеристик әдәди m дәфә тәкрарланыр. Онда,

$$f(\lambda_1) = f'(\lambda_1) = \dots = f^{(m-1)}(\lambda_1) = 0, \; f^{(m)}(\lambda_1) \ne 0$$

олдуғундан, а) һалында олдуғу гајда илә көстәрмәк олар ки, бу һалда $\lambda_1 E - A$ матрисинин $n - m$ тәртибли минорларындан һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир, јә'ни һәмин матрисин рангы $r \geqslant n - m$. Демәли, (34) системинин λ_1 характе-

ристик әдәдинә ујғун $n - r$ сајда хәтти асылы олмајан $c^1, c^2, \dots, c^{n-r}$ һәлләри вар. Онда (24) системинин λ_1 әдәдинә ујғун,

$$x^1 = e^{\lambda_1 t}c^1, \; x^2 = e^{\lambda_1 t}c^2, \dots, x^{n-r} = e^{\lambda_1 t}c^{n-r}$$

хәтти асылы олмајан һәлләри алыныр.

Хүсуси һалда, $r = n - m$ олдугда, јә'ни $\lambda_1 E - A$ матрисинин рангы минимум олдугда алырыг ки, (24) системинин λ_1 характеристик әдәдинә ујғун олан хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы онун тәкрарланма дәрәчәсинә бәрабәрдир. Башга тәкрарланан характеристик әдәдләр варса вә онлар үчүн дә $\lambda_j E - A$ матрисләринин рангы минимум исә, јухарыдакы гајда илә белә характеристик әдәдләрин тәкрарланма дәрәчәләри гәдәр хәтти асылы олмајан һәлләр гура биләрик.

Садә характеристик әдәдләрә ујғун олан һәлләри дә көтүрмәклә, гурулмуш бүтүн һәлләрин фундаментал систем тәшкил етдијини көстәрмәк олар.

$\lambda_1 E - A$ матрисинин рангы $r > n - m$ оларса, λ_1 характеристик әдәдинә ујғун гурулмуш хәтти асылы олмајан һәлләрин сајы m-дән аз олур. Бу һалда λ_1 характеристик әдәдинә ујғун олан һәлләр

$$x = e^{\lambda_1 t}(c^1 + c^2 t + \dots + c^m t^{m-1}) \quad (40)$$

шәклиндә ахтарылыр вә $c^1, c^2, \dots, c^m$ векторларыны тапмаг үчүн, (40) ифадәсини (24) системиндә јазыб, $e^{\lambda_1 t}$-јә ихтисар етдикдән сонра, алынмыш чохһәдлиләрин әмсалларыны бәрабәрләшдирмәк лазымдыр. Бу заман $c^1, c^2, \dots, c^m$ векторларына нәзәрән

$$(\lambda_1 E - A)c^m = 0,$$
$$(\lambda_1 E - A)c^{m-1} = (1-m)c^m,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(\lambda_1 E - A)c^1 = -c^2$$

системләрини аларыг. Бу системләри јухарыдан ашағыја һәлл едиб, системин (40) шәклиндә һәллини тапырыг.

Гејд едәк ки, һәр һансы характеристик әдәд тәкрарланан комплекс әдәд исә, әввәлчә онун тәкрарланма дәрәчәси гәдәр хәтти асылы олмајан комплекс һәлләри гуруб, сонра јухарыдакы гајда илә һәмин һәлләрдән ујғун һәгиги һәлләри ајырмаг лазымдыр.

Мисаллар.

1. $\begin{cases} \dot x_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot x_2 = x_1 + 3x_2 - x_3, \\ \dot x_3 = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{cases}$

системини һәлл едәк. Бу систем үчүн

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-3 & 1\\ 1 & -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^3-8\lambda^2+22\lambda-20$$

чохһәдлисинин көкләри $\lambda_1=2,\ \lambda_2=3+i,\ \lambda_3=3-i.$

Ајдындыр ки, $\lambda_1=2$ характеристик әдәдинә ујғун $(\lambda_1 E-A)c=0$ системи

$$\begin{cases}c_2=0,\\ c_1+c_2-c_3=0,\\ -c_1+2c_2+c_3=0\end{cases}$$

шәклиндәдир вә $c_1=1,\ c_2=0,\ c_3=1$ онун һәллидир. Характеристик чохһәдлинин $\lambda_2=3+i$ көкүнә ујғун олан c мәхсуси векторуну, компонентләри $a_1+ib_1,\ a_2+ib_2,\ a_3+ib_3$ олан сүтун вектор кими ахтарсаг

$$\begin{cases}(1+i)(a_1+ib_1)-a_2-ib_2=0,\\ -a_1-ib_1+ia_2-b_2+a_3+ib_3=0,\\ a_1+ib_1-2a_2-2ib_2+ia_3-b_3=0\end{cases}$$

системи алынар. Бу системин $a_1=0,\ b_1=1,\ a_2=-1,\ b_2=1,$ $a_3=1,\ b_3=2$ һәллини көтүрәк.

Онда бахылан диференсиал тәнликләр системинин $\lambda_1=2,$ $\lambda_2=3+i$ характеристик әдәдләринә ујғун олан һәлләри

$$x^1(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad x^2(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}-\sin t+i\cos t\\ -\cos t-\sin t+i(\cos t-\sin t)\\ \cos t-2\sin t+i(2\cos t+\sin t)\end{pmatrix}$$

Ајдындыр ки, $\lambda_3=3-i$ характеристик әдәдинә ујғун олан $x^3(t)$ һәллини $x^2(t)$ һәллинин гошмасы кими көтүрмәк олар вә леммаја әсасән алырыг ки, бахылан системин

$$x^1(t)=e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \tilde{x}^2(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}-\sin t\\ -\cos t-\sin t\\ \cos t-2\sin t\end{pmatrix}.$$

$$\tilde{x}^3(t)=e^{3t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t-\sin t\\ 2\cos t+\sin t\end{pmatrix}$$

шәклиндә хәтти асылы олмајан һәгиги һәлләри вар. Она көрә бахылан системин үмуми һәлли

$$x=c_1x^1(t)+c_2\tilde{x}^2(t)+c_3\tilde{x}^3(t).$$

Бурада $c_1,\ c_2,\ c_3$ ихтијари һәгиги сабитләрдир.

2. $$\begin{cases}\dot{x}_1=2x_1-x_2-x_3,\\ \dot{x}_2=3x_1-2x_2-3x_3,\\ \dot{x}_3=-x_1+x_2+2x_3\end{cases}$$

системи үчүн $f(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$ характеристик чохһәдлисинин көкләри $\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=1$ олур. $\lambda_1=0$ характеристик әдәдинә ујғун олан $(\lambda_1E-A)c=0$ системи

$$\begin{cases}2c_1-c_2-c_3=0,\\ 3c_1-2c_2-3c_3=0,\\ -c_1+c_2+2c_3=0\end{cases}$$

шәклиндәдир вә $c_1=1,\ c_2=3,\ c_3=-1$ онун һәллидир. Ајдындыр ки, $\lambda_2=\lambda_3=1$ характеристик әдәди ики дәфә тәкрарланандыр.

$$\lambda_2E-A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -3 & 3 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

матрисинин рангы $r=1$-дир. Һәм дә $n-m=1$ олдуғундан алырыг ки, λ_2E-A матрисинин рангы минимумдур.

$(\lambda_2E-A)c=0$ системини ачыг шәкилдә јазаг:

$$\begin{cases}c_1-c_2-c_3=0,\\ 3c_1-3c_2-3c_3=0,\\ c_1-c_2-c_3=0.\end{cases}$$

Бу системин хәтти асылы олмајан ики $c_1=1,$ $c_2=0,\ c_3=1$ вә $c_1=1,\ c_2=1,\ c_3=0$ һәлләри вар.

Бахылан системин характеристик әдәдләрә ујғун һәлләри

$$x^1(t)=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},\quad x^2(t)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^t,\quad x^3(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^t$$

шәклиндәдирләр вә онун үмуми һәлли

$$x=c_1x^1(t)+c_2x^2(t)+c_3x^3(t)$$

олар; бурада $c_1,\ c_2,\ c_3$ ихтијари сабитләрдир.

3. Характеристик әдәдләри тәкрарланан вә $\lambda E-A$ матрисинин рангы минимум олмајан һала мисал олараг

$$\begin{cases}\dot{x}_1=4x_1-x_2,\\ \dot{x}_2=3x_1+x_2-x_3,\\ \dot{x}_3=x_1+x_3\end{cases}$$

системини көстәрмәк олар. Бу системин характеристик әдәдләри $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ вә

$$2E-A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

матрисинин рангы $r = 2$-дир. Демәли, $r > n - m = 0$. Она көрә дә системин һәллини

$$x = e^{2t}\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} t^2\right\}$$

шәклиндә ахтараг. Бу заман

$$\begin{cases} 2c_1 - c_2 = 0, \\ 3c_1 - c_2 - c_3 = 0, \\ c_1 - c_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2b_1 - b_2 = 2c_1, \\ 3b_1 - b_2 - b_3 = 2c_2, \\ b_1 - b_3 = 2c_3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2a_1 - a_2 = b_1, \\ 3a_1 - a_2 - a_3 = b_2, \\ a_1 - a_3 = b_3 \end{cases}$$

системләрин аларыг. Бу системләрин уjғун олараг c_1, $c_2 = 2c_1$, $c_3 = c_1$; b_1, $b_2 = 2b_1 - 2c_1$, $b_3 = b_1 - 2c_1$ вә a_1, $a_2 = 2a_1 - b_1$, $a_3 = a_1 - b_1 + 2c_1$ һәлләринә бахаг; бурада a_1, b_1, c_1 ихтијари сабитләрдир. Онда бахылан системин үмуми һәлли

$$x_1 = (a_1 + b_1 t + c_1 t^2)\, e^{2t},$$
$$x_2 = [2a_1 - b_1 + (2b_1 - 2c_1)t + 2c_1 t^2]\, e^{2t},$$
$$x_3 = [a_1 - b_1 + 2c_1 + (b_1 - 2c_1)t + c_1 t^2]\, e^{2t}$$

олар.

4. Мәсәлә. Ваһид мигдарда олан A маддәси кимјәви реаксија нәтичәсиндә B вә C маддәләринә парчаланыр. Парчаланмадан алынан һәр маддәнин әмәлә кәлмә сүр'әти верилмиш маддәнин бахылан андакы мигдары илә мүтәнасибдир.

Реаксија башланандан бир саат сонра B маддәсиндән $\frac{1}{8}$ гәдәр, C маддәсиндән исә $\frac{3}{8}$ гәдәр алындығыны биләрәк онларын замандан асылы дәјишмәсини тапмалы.

Һәлли. B маддәсинин t анындакы мигдарыны $x(t)$ илә, C маддәсинин мигдарыны исә $y(t)$ илә ишарә едәк. Онда бу маддәләрин әмәлә кәлмә сүр'әти $\dot{x}(t)$ вә $\dot{y}(t)$ олар.

t анында A маддәсиндән $1 - (x + y)$ гәдәр галдығындан, мәсәләнин шәртинә көрә

$$\begin{cases} \dot{x} = \kappa_1 [1 - (x + y)], \\ \dot{y} = \kappa_2 [1 - (x + y)] \end{cases}$$

хәтти бирчинс олмајан тәнликләр системини аларыг. Бурада κ_1, κ_2 мүтәнасиблик әмсалларыдыр. $x = 0$, $y = 1$ бу системин бир һәлли, $x = c_1 + c_2 e^{-(\kappa_1+\kappa_2)t}$, $y = -c_1 + c_2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} e^{-(\kappa_1+\kappa_2)t}$ исә ујғун бирчинс системин үмуми һәлли олдуғундан,

$$x = c_1 + c_2 e^{-(\kappa_1+\kappa_2)t}, \quad y = 1 - c_1 + c_2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} e^{-(\kappa_1+\kappa_2)t}$$

бахылан системин үмуми һәлли олур.

Реаксијанын әввәлиндә (јә'ни $t = 0$ олдугда) $x = 0$, $y = 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $c_1 = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}$, $c_2 = -\frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}$ олар. Демәли,

$$x = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}\left[\quad e^{-(\kappa_1+\kappa_2)t}\right], \quad y = \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}\left[1 - e^{-(\kappa_1+\kappa_2)t}\right].$$

Шәртә көрә бир саатдан сонра $x = \frac{1}{8}$, $y = \frac{3}{8}$. Буну нәзәрә алсаг, $\kappa_2 = 3\kappa_1$ вә $e^{-4\kappa_1} = 2^{-1}$ олар.

Беләликлә, B вә C маддәләринин әмәлә кәлмә гануну

$$x = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right), \quad y = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{2^t}\right).$$

§ 7. КВАДРАТУРА ИЛӘ ҺӘЛЛ ОЛУНАН ДӘЈИШӘН ӘМСАЛЛЫ СИСТЕМЛӘР ҺАГГЫНДА

Сабит әмсаллы системләрдән фәргли олараг тәртиби $n \geqslant 2$ олан дәјишән әмсаллы системләри һәлл етмәк һәмишә мүмкүн олмур.

Бу параграфда квадратура илә һәлл олунан бә'зи дәјишән әмсаллы системләрә бахылыр.

а) Тутаг ки,

$$\dot{x} = A(t)\, x \qquad (10)$$

системи верилмишдир вә $A(t)$ матриси өзүнүн интегралы илә коммутативдир, јә'ни

$$A(t) \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau\; A(t), \quad t_0,\ t \in (\alpha, \beta). \qquad (41)$$

Көстәрәк ки, бу һалда

$$\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau} \qquad (*)$$

матриси (10) системинин фундаментал матрисидир.

Доғрудан да, експонентин тә'рифинә көрә

$$e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau} = E + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2!}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau\right)^3 + \cdots$$

олдуғундан

$$\frac{d}{dt} e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau) d\tau} = A(t) + \frac{1}{2!}\left(A(t) \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau\; A(t)\right) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left\{A(t)\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^2+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\left(A(t)\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\ A(t)\right)\right\}+\cdots$$

Бурадан (41) шәртинә әсасән

$$\frac{d}{dt}e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}=A(t)\left\{E+\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau+\frac{1}{2!}\left(\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right)^2+\cdots\right\}=$$

$$=A(t)e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}.$$

Демәли, (*) матриси (10) системинә ујғун олан (14) матрис-системинин һәллидир. Дикәр тәрәфдән, (17) дүстуруна әсасән

$$\det e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}=\exp\int_{t_0}^{t}Sp\ A(\tau)d\tau>0$$

олдуғундан алырыг ки, (*) матриси (10) системинин фундаментал матрисидир.

Гејд едәк ки, (41) шәрти, $A(t)$ матриси диагонал матрис вә сабит матрис олдугда өдәнир.

Ајдындыр ки, $A(t)$ матриси елементләри $a_{11}(t)$, $a_{22}(t)$, ..., $a_{nn}(t)$ олан диагонал матрис исә, $e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}$ матриси, елементләри $\exp\int_{t_0}^{t}a_{11}(\tau)d\tau$, $\exp\int_{t_0}^{t}a_{22}(\tau)d\tau,\ldots,\exp\int_{t_0}^{t}a_{nn}(\tau)d\tau$ олан диагонал матрисдир.

б) Тутаг ки, (10) системиндә $A(t)$ матриси

$$A(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t) & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & 0 & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & a_{n3}(t), & \ldots, & a_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

шәклиндә үчбучаг матрисдир. Бу һалда (10) системини компонентләрлә јазсаг,

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}(t)x_1,\\ \dot{x}_2=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dot{x}_n=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n\end{cases}$$

системини аларыг. Бу системи, биринчи тәнлијиндән башлајараг ардычыл интегралламагла онун үмуми һәллини гура биләрик.

$A(t)$ матриси баш диагоналдан ашағыда сыфырлар дуран үчбучаг матрис оларса, бу әмәлијјаты системин сонунчу тәнлијиндән башлајараг апармаг лазымдыр.

§ 8. ЈҮКСӘК ТӘРТИБЛИ ХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР

а) Үмуми анлајышлар. Тутаг ки,

$$L(y)\equiv y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)y=0 \tag{42}$$

тәнлији верилмишдир; бурада $a_1(t),\ldots,a_n(t)$ әмсаллары мүәјјән (α,β) интервалында кәсилмәз функсијалардыр. Бу тәнлијә n тәртибли хәтти бирчинс тәнлик, $L(y)=y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)y$ ифадәсинә исә хәтти дифференсиал оператор дејилир.

IV фәсилдә үмуми шәкилдә верилмиш n тәртибли тәнлијин n сајда биртәртибли тәнликләр системинә кәтирилмәси үсулу верилмишдир. Һәмин үсулун көмәјилә (42) тәнлијини ($y=x_1$, $y'=x_2,\ldots,y^{(n-1)}=x_n$ гәбул етмәклә)

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=x_3\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \dot{x}_{n-1}=x_n,\\ \dot{x}_n=-a_n(t)x_1-a_{n-1}(t)x_2-\cdots-a_1(t)x_n\end{cases} \tag{43}$$

шәклиндә хәтти бирчинс тәнликләр системинә кәтирмәк олар. Ајдындыр ки, (43) системи әввәлки параграфларда арашдырдығымыз (10) хәтти системинин хүсуси һалыдыр. (43) системини

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{pmatrix},\quad A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t)\end{pmatrix} \tag{44}$$

вектор-матрис ишарәләринин көмәјилә

$$\dot{x}=A(t)x \tag{43'}$$

шәклиндә јазмаг олар.

Алынан (43′) системи (10) системинин хүсуси шәкли олдуғундан, јухарыда (10) системи үчүн исбат олунан фактлар; һәм дә (42) тәнлији үчүн доғрудур.

IV фәсилдәки мүһакимәләрин көмәјилә алырыг ки, компонентләри $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ олан $x(t)$ сүтун вектор-функсијасы (43) системинин һәлли исә, $y=x_1(t)$ функсијасы (42) тәнлијинин һәллидир вә тәрсинә, $y=y(t)$ функсијасы (42) тәнлијинин һәлли исә, компонентләри $y(t), \dot y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ олан $x(t)$ сүтун вектор-функсијасы (43) системинин һәллидир.

Бурадан ајдындыр ки, $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ функсијалары (42) тәнлијинин һәлләри исә, (43) системинин онлара ујғун олан һәлләри васитәсилә дүзәлдилмиш Вронски детерминанты

$$W(t)=\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ \dot y_1(t) & \dot y_2(t) & \dots & \dot y_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \qquad (45)$$

шәклиндәдир.

(45) детерминантына (42) тәнлијинин һәлләриндән дүзәлдилмиш Вронски детерминанты дејилир.

Ајдындыр ки, (43′) системиндәки $A(t)$ матрисинин изи $Sp\,A(t)=-a_1(t)$. Она көрә дә бу систем үчүн (јә'ни (42) тәнлији үчүн) Остроградски—Лиувилл—Јакоби дүстуру

$$W(t)=W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)\,d\tau\right),\ t_0,\ t\in(\alpha,\beta) \qquad (46)$$

шәклинә дүшүр. Бурадан алынып ки, $a_1(t)$ функсијасы (α,β) интервалында кәсилмәздирсә вә (45) детерминанты мүәјјән $t=t_0$ нөгтәсиндә сыфырдан фәргли исә, һәмин детерминант истәнилән $t\in(\alpha,\beta)$ үчүн сыфырдан фәрглидир.

(42) тәнлијинин (α,β) интервалында *хәтти асылы олмајан* $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ *һәлләринә онун фундаментал һәлләр системи* дејилир.

Теорем 8. *Тутаг ки,* $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ *функсијалары* (α,β) *интервалында (42) тәнлијинин һәлләридир. Бу һәлләрин фундаментал һәлләр системи олмасы үчүн, онлардан дүзәлдилмиш Вронски детерминантынын һәмин интервалда сыфырдан фәргли олмасы зәрури вә кафидир.*

Зәрурилијин исбаты. Тутаг ки, $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ һәлләри хәтти асылы олмајандыр, лакин онлардан дүзәлдилмиш Вронски детерминанты һәр һансы t_0 нөгтәсиндә ($t_0\in(\alpha,\beta)$) сыфра чеврилир, јә'ни $W(t_0)=0$. Онда

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)+\dots+c_ny_n(t_0)=0, \\ c_1\dot y_1(t_0)+c_2\dot y_2(t_0)+\dots+c_n\dot y_n(t_0)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1y_1^{(n-1)}(t_0)+c_2y_2^{(n-1)}(t_0)+\dots+c_ny_n^{(n-1)}(t_0)=0 \end{cases}$$

системинин $c_1, c_2, \dots, c_n$ мәчһулларына нәзәрән сыфырдан фәргли һәлләри вар ($c_1, c_2, \dots, c_n$ мәчһулларынын әмсалларындан дүзәлмиш детерминант $W(t_0)=0$ олдуғундан). Һәмин һәлләрдән бирини $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$ илә ишарә едиб

$$\tilde y(t)=c_1^0y_1(t)+c_2^0y_2(t)+\dots+c_n^0y_n(t)$$

функсијасыны дүзәлдәк. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, (көстәрмәли!) $\tilde y(t)$ функсијасы (42) тәнлијинин

$$\tilde y(t_0)=0,\ \dot{\tilde y}(t_0)=0,\ \dots,\ \tilde y^{(n-1)}(t_0)=0$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллидир.

Дикәр тәрәфдән $y(t)\equiv0$ функсијасы да (42) тәнлијинин һәмин башланғыч шәртләри өдәјән һәлли олдуғундан, Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлијинә әсасән алырыг ки, $\tilde y(t)\equiv0$, јә'ни

$$c_1^0y_1(t)+c_2^0y_2(t)+\dots+c_n^0y_n(t)=0,\ t\in(\alpha,\beta).$$

$c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$ әдәдләринин һамысы бирдән сыфыр олмадығындан, бурадан алырыг ки, $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ функсијалары (α,β) интервалында хәтти асылыдырлар. Бу исә теоремин шәртинә зиддир. Демәли, $W(t_0)\neq0$. Бурадан (46) дүстуруна әсасән алырыг ки, $W(t)\neq0$, $t\in(\alpha,\beta)$.

Кафилијин исбаты. Тутаг ки, (42) тәнлијинин $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ һәлләриндән дүзәлдилмиш $W(t)$ детерминанты (α,β) интервалында сыфырдан фәрглидир, лакин бу һәлләр хәтти асылыдырлар, јә'ни һамысы бирдән сыфыр олмајан $l_1, l_2, \dots, l_n$ әдәдләри вар ки,

$$l_1y_1(t)+l_2y_2(t)+\dots+l_ny_n(t)=0,\ t\in(\alpha,\beta) \qquad (47_1)$$

ејнилији өдәнир.

Бу ејнилији ардычыл олараг $n-1$ дәфә дифференсиалламагла

$$\begin{cases} l_1y_1(t)+l_2y_2(t)+\dots+l_ny_n(t)=0, \\ l_1\dot y_1(t)+l_2\dot y_2(t)+\dots+l_n\dot y_n(t)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_1y_1^{(n-1)}(t)+l_2y_2^{(n-1)}(t)+\dots+l_ny_n^{(n-1)}(t)=0 \end{cases} \qquad (47_2)$$

ејниликләрини алырыг.

Фәрзијјәјә көрә $l_1, l_2, \dots, l_n$ әдәдләринин һамысы бирдән сыфыр олмадығындан, (47_1), (47_2)-дән алырыг ки, $W(t)$ детерминантынын сүтунлары арасында хәтти асылылыг вардыр. Она көрә $W(t)=0$ олмалыдыр. Бу исә $W(t)\neq0$ шәртинә зиддир. Теорем исбат олунду.

Теорем 9. *Тутаг ки,* $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ *функсијалары (42) тәнлијинин фундаментал һәлләр системидир. Онда бу тәнлијин үмуми һәлли*

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \dots + c_ny_n(t) \qquad (48)$$

дүстуру илә верилир; бурада $c_1, c_2, \dots, c_n$ ихтијари сабитләрдир.

Исбаты. Көстәрәк ки, ихтијари $y_0, y_0^{1}, \dots, y_0^{n-1}$ әдәдләри үчүн (42) тәнлијинин

$$y(t_0)=y_0,\ y'(t_0)=y_0^{1}, \dots, y^{(n-1)}(t_0)=y_0^{n-1} \qquad (49)$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини (48) аиләсиндән c_1, $c_2, \dots, c_n$ сабитләрини сечмәклә алмаг олар.

Ајдындыр ки, (48) һәллинин (49) башланғыч шәртләрини өдәмәси үчүн $c_1, c_2, \dots, c_n$ сабитләри

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)+\dots+c_ny_n(t_0)=y_0, \\ c_1y_1'(t_0)+c_2y_2'(t_0)+\dots+c_ny_n'(t_0)=y_0^{1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1y_1^{(n-1)}(t_0)+c_2y_2^{(n-1)}(t_0)+\dots+c_ny_n^{(n-1)}(t_0)=y_0^{n-1} \end{cases}$$

ҹәбри тәнликләр системинин һәлли кими тапылмалыдыр. 8-ҹи теоремә әсасән, мәчһулларын әмсалындан дүзәлмиш детерминант $W(t_0)\neq 0$ олдуғундан, бу системин јеганә $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$ һәлли вардыр. Онда

$$y(t)=c_1^0y_1(t)+c_2^0y_2(t)+\dots+c_n^0y_n(t)$$

функсијасы (42) тәнлијинин (49) башланғыч шәртләрини өдәјән һәлли олар. Теорем исбат олунду.

(42) тәнлијинин фундаментал һәлләр системини гурмаг үчүн һәр һансы гејри-мәхсуси $A=(a_{ij})$ матриси көтүрүб, тәнлијин

$$y(t_0)=a_{1i},\ y'(t_0)=a_{2i},\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0)=a_{ni}\ (i=1, 2, \dots, n)$$

шәртләрини өдәјән һәллини $y_i(t)$ илә ишарә едәк. Бу һалда илә гурулан $y_1(t)$, $y_2(t), \dots, y_n(t)$ һәлләриндән дүзәлдилмиш Вронски детерминантынын t_0 нөгтәсиндәки гијмәти $W(t_0)=\det A\neq 0$ олдуғундан, һәмин һәлләр фундаментал систем тәшкил едир.

Бурадан ајдындыр ки, $A=(a_{ij})$ матрисини мүхтәлиф һалларда сечмәклә мүхтәлиф фундаментал һәлләр системи гурмаг олар.

Әкәр (42) тәнлијинин ики $y_1(t)$, $y_2(t), \dots, y_n(t)$ вә $z_1(t)$, $z_2(t), \dots, z_n(t)$ фундаментал һәлләри системи мә'лумдурса, 4-чү вә 9-чу теоремләрә әсасән, елә гејри-мәхсуси $B=(b_{ij})$ матриси вардыр ки,

$$z_i(t)=b_{i1}y_1(t)+b_{i2}y_2(t)+\dots+b_{in}y_n(t),\quad i=1,\ 2, \dots, n.$$

Тутаг ки, (α, β) интервалында n тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри олан $y_1(t)$, $y_2(t), \dots, y_n(t)$ функсијалары верил-

мишди вә онлардан дүзәлдилмиш $W(t)$ Вронски детерминанты сыфырдан фәргли дир. Онда, әмсаллары јеганә һалда илә тә'јин олунан (42) шәкилли елә тәнлик вардыр ки, $y_1(t)$, $y_2(t), \dots, y_n(t)$ функсијалары онун фундаментал һәлләр системини тәшкил едир. Бу тәнлик

$$\frac{1}{W(t)}\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) & y \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)}(t) & y_2^{(n)}(t) & \dots & y_n^{(n)}(t) & y^{(n)} \end{vmatrix}=0 \qquad (50)$$

шәклиндә гурулур.

Доғрудан да, (50) тәнлијиндә $y=y_k(t)$, $k=1, 2, \dots, n$ көтүрсәк, детерминантын ики сүтуну ејни олдуғундан, о, ејнилик кими сыфра чевриләр. Јә'ни $y=y_k(t)$ һәллдир.

Гурулан (50) тәнлијинин јеганә олмасы исә үмуми һалда систем үчүн верилән исбатдан алыныр.

б) *Тәртибин азалдылмасы.* Ајдындыр ки, (42) тәнлији ахтарылан функсија вә онун төрәмәләринә нәзәрән бирҹинс тәнликдир. Одур ки, IV фәсилдә верилән үмуми үсула әсасән (IV фәсил, § 4) (42) тәнлијиндә

$$y=\exp\left(\int z(t)\,dt\right)$$

әвәзләмәси апармагла, јени ахтарылан $z(t)$ функсијасына нәзәрән $n-1$ тәртибли тәнлик алмаг олар. Лакин алынан тәнлик гејри-хәтти тәнлик олар.

Тутаг ки, $y=y_1(t)$ функсијасы (42) тәнлијинин бир хүсуси һәллидир. Тәнликдә $y=y_1(t)z$ әвәзләмәси апараг. Онда ахтарылан z функсијасына нәзәрән

$$y_1(t)z^{(n)}+\left(ny_1'(t)+a_1(t)y_1(t)\right)z^{(n-1)}+\dots+L[y_1(t)]z=0$$

тәнлији алынар. Бурадан, $L[y_1(t)]=0$ олдуғундан, ($y_1(t)\neq 0$ олан интервалларда)

$$z^{(n)}+b_1(t)z^{(n-1)}+\dots+b_{n-1}(t)z'=0.$$

Бурада, $z'=u$ әвәзләмәси апарараг, u-ја нәзәрән $n-1$ тәртибли хәтти бирҹинс

$$u^{(n-1)}+b_1(t)u^{(n-2)}+\dots+b_{n-1}(t)u=0 \qquad (51)$$

тәнлијини аларыг. Бу тәнликдәки $b_1(t), \dots, b_{n-1}(t)$ әмсаллары $a_1(t), \dots, a_n(t)$ әмсаллары вә $y_1(t)$ һәлли васитәсилә ифадә олунур.

Беләликлә, (42) тәнлијинин $y=y_1(t)$ хүсуси һәлли мә'лум олдугда, һәмин тәнликдә

$$y = y_1(t)\int u(t)\,dt$$

әвәзләмәси апармагла, онун тәртибини бир ваһид азалды (51) хәтти тәнлијини алмаг олар.

Әвәзләмәдән ајдындыр ки, (42) тәнлијинин хәтти асылы олмајан ики $y_1(t)$, $y_2(t)$ хүсуси һәлләри мә'лум оларса, $u_1(t) = \left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)'$ функсијасы (51) тәнлијинин хүсуси һәлли олар вә демәли, јухарыдакы гајда илә онун да тәртибини бир ваһид азалтмаг олар. Јәни (42) тәнлијинин тәртибини ики ваһид азалтмаг олар.

Бу гајда илә алырыг ки, (42) тәнлијинин k сајда хәтти асылы олмајан хүсуси һәлләри мә'лум оларса, онун тәртибини k ваһид азалтмаг олар. Онда $n-k$ тәртибли хәтти тәнлик алынар.

Хүсуси һалда, (42) тәнлији

$$\ddot y + a_1(t)\dot y + a_2(t)y = 0 \qquad (52)$$

шәкилли ики тәртибли хәтти тәнлик исә, јухарыдакы гајдаја әсасән, бу тәнлијин бир $y = y_1(t)$ хүсуси һәлли мә'лум олдугда ону квадратура илә һәлл етмәк олар.

Доғрудан да, бу һалда јухарыда апарылан әвәзләмә нәтичәсиндә бир тәртибли хәтти тәнлик алыныр. Лакин Остроградски-Лиувилл-Јакоби дүстурундан истифадә едәрәк (52) тәнлијинин үмуми һәллини ашағыдакы гајда илә тапмаг олар. Остроградски-Лиувилл-Јакоби дүстуруна әсасән

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ \dot y_1 & \dot y \end{vmatrix} = c_1 \exp\left(-\int a_1(t)\,dt\right).$$

Бурадан

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = \frac{c_1}{y_1^2(t)}\exp\left(-\int a_1(t)\,dt\right)$$

вә интегралласаг, аларыг

$$y = y_1(t)\left\{c_1\int\frac{1}{y_1^2(t)}\exp\left(-\int a_1(t)\,dt\right)dt + c_2\right\}.$$

Мисаллар.

1. $(2t-1)\dddot y - 4t\ddot y - (2t-3)\dot y + (4t+2)y = 0$ тәнлијинин $y_1 = e^{-t}$, $y_2 = e^{2t}$ хүсуси һәлләри верилмишдир. Тәртиби азалтма үсулу илә ону һәлл едәк. Бунун үчүн тәнликдә

$$y = e^{-t}\int u\,dt$$

әвәзләмәси апараг. Бурадан $\dot y$, $\ddot y$, $\dddot y$ төрәмәләрини дә тапыб тәнликдә јазсаг, u-ја нәзәрән

$$(2t-1)\ddot u - (10t-3)\dot u + 12tu = 0$$

тәнлијини аларыг. Бахылан тәнлик үчүн $y_2 = e^{2t}$ функсијасы да хүсуси һәлл олдуғундан, әвәзләмәјә әсасән алырыг ки, $u_1 = 3e^{3t}$ функсијасы сонунчу тәнлијин хүсуси һәлли олур. Одур ки, ахырынчы тәнликдә

$$u = e^{3t}\int z\,dt$$

әвәзләмәси апарсаг, z-ә нәзәрән

$$(2t-1)\dot z + (2t-3)z = 0$$

тәнлијини аларыг. Алынмыш тәнлик дәјишәнләринә ајрылан тәнликдир вә онун һәлли

$$z = c_1(2t-1)e^{-t}.$$

Онда $u = e^{3t}\int z\,dt$ әвәзләмәсинә әсасән

$$u = c_1(2t+1)e^{2t} + c_2e^{3t}$$

олар вә буну $y = e^{-t}\int u\,dt$ әвәзләмәсиндә нәзәрә алсаг, бахылан тәнлијин үмуми һәллини

$$y = c_1te^{t} + c_2e^{2t} + c_3e^{-t}$$

шәклиндә тапарыг.

2. Остроградски—Лиувилл дүстурунун көмәјилә $y = \cos t$ хүсуси һәллинә көрә

$$\ddot y - 2\dot y\,\mathrm{ctg}\,t - y = 0$$

тәнлијинин үмуми һәллини тапаг.

Дүстура әсасән

$$y = \cos t\left\{c_1\int\frac{e^{2\int \mathrm{ctg}\,t\,dt}}{\cos^2 t}\,dt + c_2\right\} = \cos t\left\{c_1\int\frac{e^{2\ln|\sin t|}}{\cos^2 t}\,dt + c_2\right\} = \cos t\left\{c_1\int \mathrm{tg}^2 t\,dt + c_2\right\}.$$

Бурадан бахылан тәнлијин

$$y = c_1(\sin t - t\cos t) + c_2\cos t$$

үмуми һәллини алырыг.

в) *Гошма тәнлик.* Јүксәк тәртибли хәтти бирчинс (42) тәнлији (43') системинә еквивалент олдуғундан, систем үчүн верилмиш гошма систем анлајышы бу тәнлијә дә аид едилә биләр.

Тә'рифә әсасән (43') системи илә гошма олан систем

$$\dot z = -A^{*}(t)z$$

олур; бурада

$$-A^*(t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n(t)\\ -1 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1}(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & -1 & a_1(t)\end{pmatrix}.$$

Бу систем координатларла

$$\begin{cases} \dot z_1 = a_n(t) z_n,\\ \dot z_2 = -z_1 + a_{n-1}(t)\, z_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dot z_{n-1} = -z_{n-2} + a_2(t) z_n,\\ \dot z_n = -z_{n-1} + a_1(t) z_n \end{cases} \tag{53}$$

шәклиндә јазылар.

Тутаг ки, $a_k(t)$, $k=1, 2, \ldots, n$ әмсалларынын (α, β) интервалында $n-k$ тәртибдән кәсилмәз төрәмәләри вар. Онда $z_n = z$ гәбул едәрәк, (53) системинин ахырынчы тәнлијиндән башлајараг ардычыл диференсиалламагла алырыг ки, һәмин систем

$$M(z) \equiv z^{(n)} - (a_1(t)z)^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n a_n(t) z = 0 \tag{54}$$

шәклиндә тәнлијә еквивалентдир.

(54) тәнлијинә (42) тәнлији илә гошма тәнлик, $M(z)$ операторуна исә $L(y)$ оператору илә гошма оператор дејилир. $n = 2m$ олдугда $L(y) = M(y)$ оларса, $L(y)$ операторуна өзү-өзүнә гошма оператор, $L(y) = 0$ тәнлијинә исә өзү-өзүнә гошма тәнлик дејилир.

Мисаллар. 1. $L(y) = (p(t)y')' + q(t)y$ оператору өзү-өзүнә гошма оператордур.

2. $L(y) = y^{IV} + a_1(t)\dddot y + a_2(t)\ddot y + a_3(t)\dot y + a_4(t)y$ операторунун өзү-өзүнә гошма олмасы үчүн $a_1(t) = 0$, $a_3(t) = \dot a_2(t)$ шәртләринин өдәнмәси зәрури вә кафидир. Бу шәртләр өдәндикдә алырыг ки,

$$L(y) \equiv y^{IV} + (a_2(t)y')' + a_4(t)y = 0$$

тәнлији өзү-өзүнә гошмадыр.

г) *Хәтти бирчинс олмајан тәнлик.* ***Сабитләрин вариасијасы үсулу.*** Тутаг ки, n-тәртибли хәтти бирчинс олмајан

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = f_0(t) \tag{55}$$

тәнлији верилмишдир, бурада $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)$ әмсаллары вә $f_0(t)$ функсијасы мүәјјән (α, β) интервалында кәсилмәз функсијалардыр.

Ајдындыр ки, (55) тәнлијинә ујғун олан систем

$$\dot x = A(t)x + f(t) \tag{56}$$

шәклиндә олар, бурада x вектору вә $A(t)$ матриси (44) дүстурлары илә тә'јин олунурлар, $f(t)$ исә компонентләри $0, 0, \ldots, f_0(t)$ олан сүтун вектордур.

Бурадан 3-чү параграфдакы мүһакимәләрә әсасән ајдындыр ки, (55) тәнлијинин бир хүсуси һәлли мә'лум олдугда, онун үмуми һәллинин гурулмасы мәсәләси ујғун бирчинс тәнлијин үмуми һәллинин гурулмасы мәсәләсинә кәтирилир.

Бир хүсуси һәлл мә'лум олмадыгда (55) тәнлијинин үмуми һәллини гурмаг үчүн сабитләрин вариасијасы үсулуну тәтбиг едәк. Бу үсулу (56) системинә тәтбиг етмәклә (55) тәнлијинин үмуми һәллини гурмаг олар. Лакин һәмин үсулу билаваситә (55) тәнлијинә тәтбиг етмәк даһа әлверишлидир.

Теорем 10. *Тутаг ки, $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ функсијалары $L(y) = 0$ тәнлијинин (α, β) интервалында фундаментал һәлләр системидир. Онда $L(y) = f_0(t)$ тәнлијинин үмуми һәлли*

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t) + \sum_{k=1}^{n} y_k(t) \int_{t_0}^{t} \frac{W_k(\tau)}{W(\tau)} f_0(\tau)\, d\tau \tag{57}$$

дүстуру илә верилир; бурада $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ихтијари сабитләр, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ихтијари нөгтә, $W_k(t)$ исә $W(t)$ Вронски детерминантынын k-чы сүтунуну $0, 0, \ldots, 1$ илә әвәз етмәклә алынан детерминантдыр.

Исбаты. 9-чу теоремә әсасән, $L(y) = 0$ тәнлијинин үмуми һәлли (48) дүстуру илә верилир. Бу дүстурда $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сабитләрини һамар $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$ функсијалары илә әвәз едәрәк онлары елә сечәк ки,

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t) \tag{58}$$

ифадәси (55) тәнлијинин һәлли олсун. Бунун үчүн n сајда шәрт вермәк лазымдыр. Бу шәртләрдән бири (58) ифадәсинин (55) тәнлијини өдәмәсиндән алыныр. Галан $n-1$ сајда шәрти исә ихтијари гајда илә вермәк олар. Бу шәртләри елә вермәјә чалышаг ки, (58) илә тә'јин олунан $y(t)$ функсијасынын төрәмәләри мүмкүн гәдәр садә олсун. Бу мәгсәдлә (58) функсијасындан төрәмә алаг:

$$\dot y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\dot y_k(t) + \sum_{k=1}^{n} \dot c_k(t) y_k(t),$$

бурада $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$ функсијаларыны елә сечәк ки,

$$\dot c_1(t)y_1(t) + \dot c_2(t)y_2(t) + \cdots + \dot c_n(t)y_n(t) = 0 \tag{59_1}$$

олсун. Онда

$$\dot y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\dot y_k(t) \tag{60_1}$$

13*

олар вә бурадан јенә төрәмә алсаг,

$$y(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\,\dot y_k(t)+\sum_{k=1}^{n}\dot c_k(t)\dot y_k(t).$$

Бурада $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$ функсијаларыны елә сечәк ки

$$\dot c_1(t)\dot y_1(t)+\dot c_2(t)\dot y_2(t)+\cdots+\dot c_n(t)\dot y_n(t)=0, \qquad (59_2)$$

олсун. Онда

$$\ddot y(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\,\ddot y_k(t). \qquad (60_2)$$

Бу гајданы $n-1$ дәфә тәкрар етдикдән сонра

$$\dot c_1(t)y_1^{(n-2)}(t)+\dot c_2(t)\,y_2^{(n-2)}(t)+\cdots+\dot c_n(t)\,y_n^{(n-2)}(t)=0, \qquad (59_{n-1})$$

$$y^{(n-1)}(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\,y_k^{(n-1)}(t). \qquad (60_{n-1})$$

Ахырынчы бәрабәрликдән төрәмә алсаг,

$$y^{(n)}(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\;y_k^{(n)}(t)+\sum_{k=1}^{n}\dot c_k(t)\,y_k^{(n-1)}(t). \qquad (60_n)$$

Инди (58), (60_1), (60_2), ..., (60_n) ифадәләрини (55) тәнлијиндә јазаг вә $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ функсијаларынын $L(y)=0$ тәнлијинин һәлләри олдуғуну нәзәрә алаг. Онда $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$ функсијаларына нәзәрән

$$\dot c_1(t)\,y_1^{(n-1)}(t)+\dot c_2(t)\,y_2^{(n-1)}(t)+\cdots+\dot c(t)\,y_n^{(n-1)}(t)=f_0(t) \qquad (59_n)$$

тәнлији дә алынар.

Беләликлә, $\dot c_1(t), \dot c_2(t), \ldots, \dot c_n(t)$ төрәмәләринә нәзәрән n сајда (59_1), (59_2), ..., (59_n) хәтти бирчинс олмајан тәнликләр системини алырыг. Системдә $\dot c_1(t), \dot c_2(t), \ldots, \dot c_n(t)$ мәчһулларынын әмсалларындан дүзәлмиш детерминант, $L(y)=0$ тәнлијинин $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ фундаментал һәлләр системиндән дүзәлдилмиш Вронски детерминанты олдуғундан, сыфырдан фәрглидир. Одур ки, һәмин системдән јеканә гајда илә

$$\dot c_k(t)=\frac{W_k(t)}{W(t)}f_0(t), \quad k=1, 2, \ldots, n$$

тә'јин едирик. Бурадан да алырыг ки,

$$c_k(t)=c_k+\int_{t_0}^{t}\frac{W_k(\tau)}{W(\tau)}f_0(\tau)\,d\tau, \; k=1, 2, \ldots, n. \qquad (61)$$

Бу ифадәләри (58) дүстурунда јеринә јазсаг, (57) дүстуруну аларыг. Теорем исбат олунду.

Ајдындыр ки, (57) дүстурунда 1-чи топланан $L(y)=0$ бирчинс тәнлијинин үмуми һәллидир. Билаваситә јохламаг олар ки, 2-чи топланан $L(y)=f_0(t)$ тәнлијинин $y(t_0)=0$, $\dot y(t_0)=0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0)=0$ шәртләрини өдәјән хүсуси һәллидир. Бурадан бир даһа алынып ки, бирчинс олмајан $L(y)=f_0(t)$ тәнлијинин үмуми һәлли, ујғун бирчинс тәнлијин үмуми һәлли илә өзүнүн бир хүсуси һәллинин чәминә бәрабәрдир.

Мисал. $\ddot y-2\dot y\operatorname{ctg} t-y=\sin^2 t$ тәнлијини сабитләрин вариасијасы үсулу илә һәлл едәк. Билаваситә јохламаг олар ки, $y_1=\sin t-t\cos t$, $y_2=\cos t$ функсијалары ујғун бирчинс тәнлијин фундаментал һәлләр системини тәшкил едир. Одур ки, бирчинс олмајан тәнлијин һәллини

$$y=c_1(t)(\sin t-t\cos t)+c_2(t)\cos t$$

шәклиндә ахтараг. Бурадан төрәмә алсаг,

$$\dot y=c_1(t)\,t\sin t-c_2(t)\sin t+\dot c_1(t)(\sin t-t\cos t)+\dot c_2(t)\cos t.$$

$c_1(t)$, $c_2(t)$ функсијаларыны елә сечәк ки,

$$\dot c_1(t)(\sin t-t\cos t)+\dot c_2(t)\cos t=0$$

олсун. Онда

$$\dot y=c_1(t)\,t\sin t-c_2(t)\sin t$$

олар вә бурадан

$$\ddot y=c_1(t)(\sin t+t\cos t)-c_2(t)\cos t+\dot c_1(t)\,t\sin t-\dot c_2(t)\sin t.$$

Бу гијмәтләри тәнликдә јазараг, $y_1=\sin t-t\cos t$, $y_2=\cos t$ функсијаларынын бирчинс тәнлијин һәлләри олдуғуну нәзәрә алсаг, $\dot c_1(t)$, $\dot c_2(t)$ төрәмәләринә нәзәрән

$$\dot c_1(t)\,t\sin t-\dot c_2(t)\sin t=\sin^2 t$$

тәнлијини дә аларыг. Демәли, $\dot c_1(t)$, $\dot c_2(t)$ төрәмәләри

$$\begin{cases}\dot c_1(t)(\sin t-t\cos t)+\dot c_2(t)\cos t=0,\\ \dot c_1(t)\,t\sin t-\dot c_2(t)\sin t=\sin^2 t\end{cases}$$

системиндән тә'јин олунур. Бурадан

$$\dot c_1(t)=\cos t, \quad \dot c_2(t)=t\cos t-\sin t.$$

Бу тәнликләри интегралламагла алынан

$$c_1(t)=c_1+\sin t, \quad c_2(t)=c_2+2\cos t+t\sin t$$

ифадәләрини јухарыда јеринә јазсаг, бахылан тәнлијин үмуми һәлли

$$y=c_1(\sin t-t\cos t)+c_2\cos t+\cos^2 t+1$$

олар.

§ 9. ЈҮКСӘК ТӘРТИБЛИ САБИТ ӘМСАЛЛЫ ХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР

а) Сабит әмсаллы хәтти бирҹинс тәнлијин һәлли. Тутаг ки, n-тәртибли сабит әмсаллы

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \tag{62}$$

хәтти бирҹинс тәнлији верилмишдир; бурада $a_1, a_2, \ldots, a_n$ верилмиш әдәдләрдир.

Гејд едәк ки, (62) тәнлијинә еквивалент олан сабит әмсаллы бирҹинс тәнликләр системинә кечәрәк, үмуми нәзәријјәјә әсасән, онун фундаментал һәлләр системини гурмаг олар. Лакин сабит әмсаллы (62) шәкилли тәнликләр үчүн буна еһтијач јохдур вә онун фундаментал һәлләр системини билаваситә гурмаг олар. (62) тәнлијинин һәлли олан $y = y(t)$ функсијасынын өзү илә төрәмәләри ејни шәкилли (охшар) олмалыдырлар ки, тәнликдә јазыб груплашдырдыгдан сонра сол тәрәф сыфра чеврилсин. Анализ курсундан мә'лумдур ки, $e^{\lambda t}$ функсијасы белә функсијадыр; бурада λ сабит әдәддир. Одур ки, (62) тәнлијинин һәллини $y = e^{\lambda t}$ шәклиндә ахтараг. Бу функсијанын $y, \dot{y}, \ldots, y^{(n)}$ төрәмәләрини дә һесаблајыб $L(y)$ ифадәсиндә јазсаг,

$$L(e^{\lambda t}) = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n)e^{\lambda t} \tag{63}$$

мүнасибәтини аларыг.

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n \tag{64}$$

ишарә едәк. Онда

$$L(e^{\lambda t}) = f(\lambda)\, e^{\lambda t}. \tag{65}$$

$f(\lambda)$ чохһәдлисинә (62) тәнлијинин ***характеристик чохһәдлиси***, онун көкләринә исә һәмин тәнлијин ***характеристик әдәдләри*** дејилир.

(65) дүстурундан ајдындыр ки, $y = e^{\lambda t}$ функсијасынын (62) тәнлијинин һәлли олмасы үчүн λ әдәдинин

$$f(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{66}$$

тәнлијинин көкү олмасы зәрури вә кафидир.

(66) тәнлијинә (62) тәнлијинин ***характеристик тәнлији*** дејилир.

Характеристик тәнлијин көкләриндән асылы олараг (62) тәнлијинин һәлләринин гурулушуну өјрәнәк.

I. *Характеристик тәнлијин көкләри һәгиги вә мүхтәлиф олан һал.* Тутаг ки, (66) тәнлијинин n сајда $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ көкләри вар, бу көкләр һәгиги вә мүхтәлифдир. Бу һалда

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}, \; y_2 = e^{\lambda_2 t}, \; \ldots, \; y_n(t) = e^{\lambda_n t}$$

һәлләри (62) тәнлијинин фундаментал һәлләр системини тәшкил едир вә онун үмуми һәлли

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} \tag{67}$$

дүстуру илә верилир; бурада $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ихтијари сабитләрдир.

II. *Характеристик тәнлијин көкләри мүхтәлифдир, лакин онлардан комплекс оланлары вар.* Тутаг ки, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ һәгиги характеристик әдәдләр, $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+k}$ комплекс характеристик әдәдләрдир вә $\bar{\lambda}_{r+1}, \ldots, \bar{\lambda}_{r+k}$ исә онларын гошма характеристик әдәдләрдир. Ајдындыр ки, $r + 2k = n$ вә биринҹи $r + k$ характеристик әдәдләри $\lambda_l = \alpha_l + i\beta_l$, $l = 1, 2, \ldots, r + k$ шәклиндә көтүрмәк олар, белә ки, $l = 1, 2, \ldots, r$ олдугда $\beta_l = 0$, $l = r + 1, \ldots, r + k$ олдугда исә $\beta_l \neq 0$. Онда $\bar{\lambda}_l = \alpha_l - i\beta_l$, $l = r+1, \ldots, r+k$.

Һәгиги характеристик әдәдләрә ујғун олан һәлләр

$$e^{\alpha_1 t}, \; e^{\alpha_2 t}, \; \ldots, \; e^{\alpha_r t},$$

λ_{r+l}, $\bar{\lambda}_{r+l}$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ характеристик әдәдләринә ујғун олан һәлләр исә

$$y_{r+l} = e^{(\alpha_{r+l} + i\beta_{r+l})t}, \quad \bar{y}_{r+l} = e^{(\alpha_{r+l} - i\beta_{r+l})t}$$

олар. Ејлер дүстуруна әсасән

$$y_{r+l} = e^{\alpha_{r+l}t}\cos\beta_{r+l}t + ie^{\alpha_{r+l}t}\sin\beta_{r+l}t,$$

$$\bar{y}_{r+l} = e^{\alpha_{r+l}t}\cos\beta_{r+l}t - ie^{\alpha_{r+l}t}\sin\beta_{r+l}t.$$

Бурадан аларыг (бах: § 6, лемма) ки, $y_{r+l}(t)$, $\bar{y}_{r+l}(t)$ гошма комплекс һәлләринә (62) тәнлијинин ики

$$e^{\alpha_{r+l}t}\cos\beta_{r+l}t, \; e^{\alpha_{r+l}t}\sin\beta_{r+l}t$$

һәгиги һәлләри ујғундур. Онда (62) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y = \sum_{l=1}^{r} e^{\alpha_l t} b_l + \sum_{l=1}^{k} e^{\alpha_{r+l}t}\left(b_{r+l}\cos\beta_{r+l}t + c_{r+l}\sin\beta_{r+l}t\right)$$

шәклиндә олар, бурада $b_1, b_2, \ldots, b_{r+k}, c_{r+1}, \ldots, c_{r+k}$ ихтијари сабитләрдир. Бу дүстуру да һәгиги характеристик әдәдләрә, хәјали һиссәсинин әмсалы сыфыр олан комплекс әдәд кими бахараг,

$$y = \sum_{l=1}^{r+k} e^{\alpha_l t}(b_l\cos\beta_l t + c_l\sin\beta_l t) \tag{68}$$

шәклиндә јазмаг олар.

III. *Характеристик әдәдләр һәгиги олмагла, онлар ичәрисиндә тәкрарлананы олан һал.* Тутаг ки, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ әдәдләри характеристик тәнлијин ујғун олараг $m_1, m_2, \dots, m_r$ дәфә тәкрарланан көкләридир (садә характеристик әдәдин тәкрарланма дәрәчәси ваһиддир) вә

$$m_1+m_2+\dots+m_r=n.$$

Көстәрәк ки, λ_l $(l=1, 2, \dots, r)$ характеристик тәнлијин m_l дәфә тәкрарланан көкү исә (62) тәнлијинин она ујғун

$$e^{\lambda_l t},\ te^{\lambda_l t},\ \dots,\ t^{m_l-1}e^{\lambda_l t},\quad l=1, 2, \dots, r \tag{69}$$

һәлләри вар.

Доғрудан да, (65) дүстуруна вә Лејбнис гајдасына әсасән алырыг ки,

$$L(t^\kappa e^{\lambda t}) = L\left(\frac{\partial^\kappa}{\partial\lambda^\kappa}e^{\lambda t}\right)=\frac{\partial^\kappa}{\partial\lambda^\kappa}L(e^{\lambda t}) = \frac{\partial^\kappa}{\partial\lambda^\kappa}\left[f(\lambda)e^{\lambda t}\right] =$$

$$=\left\{f^{(\kappa)}(\lambda)+\kappa f^{(\kappa-1)}(\lambda)\,t+\frac{\kappa(\kappa-1)}{2!}f^{(\kappa-2)}(\lambda)t^2+\dots+f(\lambda)t^\kappa\right\}e^{\lambda t}. \tag{70}$$

λ_l характеристик әдәди m_l дәфә тәкрарландығындан

$$f(\lambda_l)=0,\ f'(\lambda_l)=0, \dots,\ f^{(m_l-1)}(\lambda_l)=0,\ f^{(m_l)}(\lambda_l)\neq 0.$$

Онда (70) дүстурундан ајдындыр ки, $L(e^{\lambda_l t})=0,\ L(te^{\lambda_l t})=0, \dots, L(t^{m_l-1}e^{\lambda_l t})=0$, јә'ни (69) функсијалары (62) тәнлијинин һәлләридир.

Бу һалда (62) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y=\sum_{l=1}^{r} P_l(t)e^{\lambda_l t} \tag{71}$$

шәклиндә олур; бурада $P_l(t)$ — дәрәчәси (m_l-1)-дән чох олмајан ихтијари һәгиги әмсаллы чохһәдлидир.

IV. *Үмуми һал.* Тутаг ки, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ујғун олараг, $m_1, m_2, \dots, m_p$ дәфә тәкрарланан һәгиги характеристик әдәдләр, $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q}$ ујғун олараг, $m_{p+1}, \dots, m_{p+q}$ дәфә тәкрарланан комплекс характеристик әдәдләр, $\bar\lambda_{p+1}, \dots, \bar\lambda_{p+q}$ исә онлара гошма олан характеристик әдәдләрдир. Ајдындыр ки,

$$m_1+m_2+\dots+m_p+2(m_{p+1}+\dots+m_{p+q})=n.$$

Онда $\lambda_r=\alpha_r+i\beta_r$, $\beta_r=0$, $r=1, 2, \dots, p$ һәгиги характеристик әдәдләринә ујғун олан һәлләр

$$e^{\alpha_r t},\ te^{\alpha_r t},\ \dots,\ t^{m_r-1}e^{\alpha_r t},\quad r=1, 2, \dots, p \tag{72}$$

шәклиндә, $\lambda_r=\alpha_r+i\beta_r$, $\bar\lambda_r=\alpha_r-i\beta_r$, $r=p+1, \dots, p+q$ гошма комплекс характеристик әдәдләринә ујғун олан һәгиги һәлләр исә

$$\begin{aligned}&e^{\alpha_r t}\cos\beta_r t,\ te^{\alpha_r t}\cos\beta_r t, \dots,\ t^{m_r-1}e^{\alpha_r t}\cos\beta_r t,\\ &e^{\alpha_r t}\sin\beta_r t,\ te^{\alpha_r t}\sin\beta_r t, \dots,\ t^{m_r-1}e^{\alpha_r t}\sin\beta_r t,\\ &\qquad r=p+1, \dots, p+q\end{aligned} \tag{73}$$

шәклиндәдир. Ајдындыр ки, (72), (73) шәклиндә тә'јин олунан һәлләрин сајы n-ә бәрабәрдир.

Көстәрәк ки, бу һалда (62) тәнлијинин үмуми һәлли

$$y=\sum_{r=1}^{p+q} e^{\alpha_r t}\left(P_r(t)\cos\beta_r t+Q_r(t)\sin\beta_r t\right) \tag{74}$$

олур; бурада $P_r(t)$, $Q_r(t)$ — дәрәчәләри (m_r-1)-дән чох олмајан ихтијари һәгиги әмсаллы чохһәдлиләрдир. Буну исбат етмәк үчүн (72), (73) һәлләр системинин хәтти асылы олмадығыны көстәрмәк лазымдыр.

Әксини фәрз едәк, тутаг ки, һамысы бирдән сыфыр олмајан елә $A_0^r, A_1^r, \dots, A_{m_r-1}^r$ $(r=1, 2, \dots, p)$, $B_0^r, B_1^r, \dots, B_{m_r-1}^r$, $C_0^r, C_1^r, \dots, C_{m_r-1}^r$ $(r=p+1, \dots, p+q)$ әдәдләри вар ки, $t\in(-\infty, +\infty)$ үчүн

$$\sum_{r=1}^{p}\left(A_0^r+A_1^r t+\dots+A_{m_r-1}^r t^{m_r-1}\right)e^{\alpha_r t}+$$

$$+\sum_{r=p+1}^{p+q}\left[\left(B_0^r+B_1^r t+\dots+B_{m_r-1}^r t^{m_r-1}\right)\cos\beta_r t+\right.$$

$$\left.+\left(C_0^r+C_1^r t+\dots+C_{m_r-1}^r t^{m_r-1}\right)\sin\beta_r t\right]e^{\alpha_r t}=0$$

ејнилији өдәнир. Бу ејниликдә

$$P_r^0(t)=A_0^r+A_1^r t+\dots+A_{m_r-1}^r t^{m_r-1},$$

$$P_r^1(t)=B_0^r+B_1^r t+\dots+B_{m_r-1}^r t^{m_r-1},$$

$$P_r^2(t)=C_0^r+C_1^r t+\dots+C_{m_r-1}^r t^{m_r-1}$$

ишарәләри гәбул едәрәк, ону

$$\sum_{r=1}^{p}P_r^0(t)e^{\alpha_r t}+\sum_{r=p+1}^{p+q}\left[P_r^1(t)\cos\beta_r t+P_r^2(t)\sin\beta_r t\right]e^{\alpha_r t}=0$$

шәклиндә јазаг.

Ејлер дүстуруна әсасән

$$\cos\beta_r t=\frac{e^{i\beta_r t}+e^{-i\beta_r t}}{2},\quad \sin\beta_r t=\frac{e^{i\beta_r t}-e^{-i\beta_r t}}{2i}$$

олдуғундан, садә чевирмәләрдән сонра сонунчу ејнилији

$$\sum_{r=1}^{p} P_r^0(t)\, e^{\lambda_r t} + \sum_{r=p+1}^{p+q} \left(Q_r^1(t) e^{\lambda_r t} + Q_r^2(t) e^{\bar{\lambda}_r t}\right) = 0 \tag{75}$$

шәклиндә јазмаг олар; бурада

$$Q_r^1(t) = \frac{1}{2}\left[P_r^1(t) - iP_r^2(t)\right], \quad Q_r^2(t) = \frac{1}{2}\left[P_r^1(t) + iP_r^2(t)\right].$$

Үмумилији позмадан, (75) ејнилијиндә $Q_{p+q}^2(t)$ чохһәдлисинин әмсалларындан һеч олмаса бирисинин сыфырдан фәргли олдуғуну гәбул етмәк олар. Онда (75) ејнилијини $e^{\lambda_1 t}$-јә бөләрәк алынмыш

$$P_1^0(t) + \sum_{r=2}^{p} P_r^0(t)\, e^{(\lambda_r - \lambda_1)t} + \sum_{r=p+1}^{p+q} \left(Q_r^1(t) e^{(\lambda_r-\lambda_1)t} + Q_r^2(t) e^{(\bar{\lambda}_r - \lambda_1)t}\right) = 0$$

ејнилијини m_1 дәфә диференсиалласаг,

$$\sum_{r=2}^{p} \bar{P}_r^0(t)\, e^{(\lambda_r-\lambda_1)t} + \sum_{r=p+1}^{p+q} \left(\bar{Q}_r^1(t)\; e^{(\lambda_r-\lambda_1)t} + \bar{Q}_r^2(t)\, e^{(\bar{\lambda}_r - \lambda_1)t}\right) = 0 \tag{76}$$

ејнилији алынар; бурада $\bar{P}_r^0(t)$, $\bar{Q}_r^1(t)$, $\bar{Q}_r^2(t)$ —дәрәчәләри уј-ғун олараг $P_r^0(t)$, $Q_r^1(t)$, $Q_r^2(t)$ чохһәдлиләринин дәрәчәләринә бәрабәр олан чохһәдлиләрдир вә $\bar{Q}_{p+q}^2(t)$ чохһәдлисинин һеч олмаса бир әмсалы сыфырдан фәрглидир.

Бу гајданы давам етдирмәклә нәтичәдә

$$R_{p+q}(t)\, e^{(\bar{\lambda}_{p+q} - \bar{\lambda}_{p+q-1})t} = 0 \tag{77}$$

ејнилијини аларыг, белә ки, $R_{p+q}(t)$,—дәрәчәси $Q_{p+q}^2(t)$ чох-һәдлисинин дәрәчәсинә бәрабәр олан чохһәдлидир вә әмсалларындан һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир. Лакин $e^{(\bar{\lambda}_{p+q} - \bar{\lambda}_{p+q-1})t} \neq 0$ олдуғундан, бу (77) ејнилијинә зиддир.

Беләликлә, (72), (73) һәлләр системи хәтти асылы дејил.

б) *Сабит әмсаллы хәтти бирчинс олмајан тәнлијин бир хүсуси һәллинин гурулмасы.* Тутаг ки,

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f_0(t) \tag{78}$$

тәнлији верилмишдир; бурада $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сабит әдәдләр, $f_0(t)$ исә мүәјјән интервалда кәсилмәз функсијадыр. Белә тәнлијә сабит әмсаллы *бирчинс олмајан тәнлик* дејилир.

Сабит әмсаллы хәтти бирчинс тәнлијин фундаментал һәлләр системини һәмишә гурмаг мүмкүн олдуғундан, белә нәтичәјә кәлирик ки, сабит әмсаллы хәтти бирчинс олмајан тәнлијин үмуми һәллини сабитләрин вариасијасы үсулу илә һәмишә тапмаг мүмкүндүр. Лакин бә'зи хүсуси һалларда буна еһтијач галмыр вә хәтти бирчинс олмајан тәнлијин бир хүсуси һәллини $f_0(t)$ функсијасынын шәклинә әсасән тапмаг олур.

Әввәлчә гејд едәк ки, әкәр $y_1(t)$, $y_2(t), \ldots, y_k(t)$ функсијалары ујғун олараг

$$L(y) = f_1(t), \;\; L(y) = f_2(t), \ldots, \; L(y) = f_k(t)$$

тәнликләринин хүсуси һәлләри исә $y = y_1(t) + y_2(t) + \cdots + y_k(t)$ функсијасы

$$L(y) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_k(t)$$

тәнлијинин хүсуси һәллидир.

Тутаг ки, (78) тәнлијиндә

$$f_0(t) = P_m(t)\, e^{\alpha t}$$

шәклиндәдир. Бурада

$$P_m(t) = p_0 t^m + p_1 t^{m-1} + \cdots + p_m, \; p_0 \neq 0,$$

α исә һәгиги әдәддир. Хүсуси һалда $\alpha = 0$ оларса, $f_0(t)$ функсијасы m-дәрәчәли чохһәдлидир.

Тутаг ки, α әдәди характеристик тәнлијин $r \geqslant 0$ дәфә тәкрарланан көкүдүр, јә'ни

$$f(\alpha) = 0, \; f'(\alpha) = 0, \ldots, f^{(r-1)}(\alpha) = 0, \;\; f^{(r)}(\alpha) \neq 0$$

($r = 0$ о демәкдир ки, α характеристик тәнлијин көкү дејил).

Бу заман (78) тәнлијинин хүсуси һәллини

$$y = t^r Q_m(t)\, e^{\alpha t} \tag{79}$$

шәклиндә ахтармаг лазымдыр, бурада

$$Q_m(t) = q_0 t^m + q_1 t^{m-1} + \cdots + q_m$$

әмсаллары намә'лум олан m-дәрәчәли чохһәдлидир.

Демәли, (78) тәнлијинин бир хүсуси һәллини (79) шәклиндә тапмаг үчүн $Q_m(t)$ чохһәдлисинин әмсалларыны тә'јин етмәк лазымдыр. Бу мәгсәдлә (79) ифадәсини (78) тәнлијиндә јазараг, $e^{\alpha t}$-јә ихтисар етдикдән сонра t-нин ејни дәрәчәләринин әмсалларыны бәрабәрләшдирәк. Бу заман $q_0, q_1, \ldots, q_m$ әмсалларына нәзәрән

$$\begin{aligned}
&C_{r+m}^r f^{(r)}(\alpha)\, q_0 = p_0, \\
&C_{r+m}^{r+1} f^{(r+1)}(\alpha)\, q_0 + C_{r+m-1}^r f^{(r)}(\alpha)\, q_1 = p_1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&f^{(r+m)}(\alpha)\, q_0 + f^{(r+m-1)}(\alpha)\, q_1 + \cdots + f^{(r)}(\alpha)\, q_m = p_m
\end{aligned}$$

рекурент дүстурлары алыныр. Бурада $C_k^l = \dfrac{k!}{l!(k-l)!}$. Шәртә кәрә $f^{(r)}(\alpha) \neq 0$ олдуғундан, бу системдән $q_0, q_1, \ldots, q_m$ әмсаллары ардычыл олараг јеканә гајда илә тә'јин олунур.

Тутаг ки, (78) тәнлијинин сағ тәрәфи

$$f_0(t) = \left(P_m^1(t)\;\cos\beta t + P_l^2(t) \sin\beta t\right) e^{\alpha t} \tag{80}$$

шәклиндәдир. Бурада $P^1_m(t)$ вә $P^2_l(t)$, ујғун олараг, дәрәчәләри m вә l олан чохһәдлиләрдир. Бу һалы бахдығымыз һала кәтирмәк олар. Бунун үчүн

$$\cos\beta t = \frac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2},\quad \sin\beta t = \frac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i}$$

дүстурларындан истифадә едәрәк

$$f_0(t) = \tilde P^1_\kappa(t)\, e^{(\alpha+i\beta)t} + \tilde P^2_\kappa(t)\, e^{(\alpha-i\beta)t},\quad \kappa=\max(m,\ l) \qquad (81)$$

шәклиндә јазаг; бурада $\tilde P^1_\kappa(t)$, $\tilde P^2_\kappa(t)$ илә κ-дәрәчәли комплекс әмсаллы чохһәдлиләр ишарә едилмишдир.

Јухарыдакы гејдә әсасән алырыг ки, сағ тәрәфи (81) шәклиндә олан тәнлијин хүсуси һәллини тапмаг үчүн сағ тәрәфләри

$$\tilde P^1_\kappa(t)\, e^{(\alpha+i\beta)t},\quad \tilde P^2_\kappa(t)\, e^{(\alpha-i\beta)t}$$

олан тәнликләрин хүсуси һәлләрини тапмаг кифајәтдир. Сағ тәрәфи белә олан тәнлијин хүсуси һәлләри јухарыда верилән гајда илә тапылыр. Һәмин хүсуси һәлләри тапыб топламагла, сағ тәрәфи (80) шәклиндә олан тәнлијин хүсуси һәллини тапмаг олар. Беләликлә, $\alpha+i\beta$ характеристик тәнлијин r дәфә тәкрарланан көкү исә, сағ тәрәфи (80) шәклиндә олан тәнлијин хүсуси һәлли

$$y = t^r\{Q^1_\kappa(t)\cos\beta t + Q^2_\kappa\sin\beta t\}\, e^{\alpha t} \qquad (82)$$

шәклиндәдир, бурада $Q^1_\kappa(t)$, $Q^2_\kappa(t)$—дәрәчәләри κ-дан бөјүк олмајан чохһәдлиләрдир.

Демәли, (78) тәнлијинин сағ тәрәфи (80) шәклиндә исә вә $\alpha+i\beta$ характеристик тәнлијин $r\geqslant 0$ дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, онун хүсуси һәллини (82) шәклиндә ахтармаг лазымдыр. Бир хүсуси һәлли бу гајда илә тапмаг үсулуна *гејри-муәјјән әмсаллар үсулу* дејилир.

Мисаллар.

1. Чәкиси 1,96 *кГ* олан P јүкү бир учу бәркидилмиш јајдан асылмышдыр. Јүкә периодик олараг $f(t)=0{,}676\sin t$ *кГ* харичи гүввәси тә'сир едир. Мә'лумдур ки, 1 *кГ* гүввәнин тә'сири алтында јај 20 *см* узаныр вә мүгавимәт гүввәси јүкүн сүр'әтинә мүтәнасиб олуб, сүр'әт 1 $\frac{см}{сан}$ олдугда 0,02 *кГ*-а бәрабәрдир.

Башланғыч анда јүкүн сүр'әтинин сыфыр олдуғуну вә јајын тәразлыг вәзијјәтиндән 5 *см* узаглашдығыны биләрәк онун һәрәкәт ганунуну тапмалы.

Һәлли. Ox охуну шагули олараг ашағы јөнәлдәк. Тутаг ки, јајын тәбии узунлуғу l-дир вә әлавә гүввә тә'сир етмәдикдә асылы вәзијјәтдә λ_c гәдәр узаныр. Тәразлыг вәзијјәтиндә ја-

јын уч нөгтәсини O илә ишарә едәк. Бахылан анда јајын узанмасыны λ илә ишарә едәк (шәкил 14). Шәклә әсасән $x=\lambda-\lambda_c$ олур.

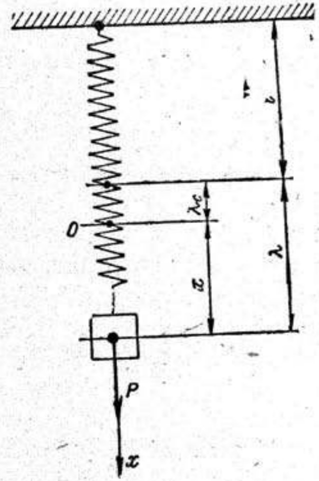
Һук ганунуна көрә јајын кәрилмә гүввәси онун узанмасы илә мүтәнасиб, јә'ни $c\lambda$ олур; бурада c әдәди јајын сәртлијини көстәрир. Демәли, јаја P ағырлыг гүввәси, $-c\lambda$ кәрилмә гүввәси, $-\kappa\dot x$ мүгавимәт гүввәси вә 0,676 $\sin t$ харичи гүввәси тә'сир едир. Онда Нјутонун 2-чи ганунуна көрә јүкүн һәрәкәт тәнлији

$$m\ddot x + \kappa\dot x = P - c\lambda + 0{,}676\sin t.$$

Јајын кәрилмә гүввәси јүклә таразлашдығындан, $P=c\lambda_c$ олмалыдыр. Одур ки, $P-c\lambda=-c(\lambda-\lambda_c)=-cx$ олур. Демәли, јүкүн һәрәкәт тәнлији

$$m\ddot x+\kappa\dot x+cx=0{,}676\sin t$$

шәклиндә олар.



Шәкил 14.

Мәсәләнин шәртләринә көрә m, κ вә c әдәдләрини тә'јин едәк. $P=mg$ олдуғундан $m=\frac{1{,}96\ кГ}{9{,}8\ \frac{м}{сан^2}}=0{,}002\ \frac{кГ\ сан^2}{см}$, $\kappa\cdot 1\ \frac{см}{сан}=0{,}02\ кГ$ олдуғундан, $\kappa=0{,}02\ кГ\cdot\frac{сан}{см}$ олар. $c\cdot 20\ см=1\ кГ$ олдуғундан, $c=0{,}05\ \frac{кГ}{см}$. Мәсәләнин дикәр шәртләринә көрә $x(0)=5$, $\dot x(0)=0$ башланғыч шәртләрини алырыг.

Беләликлә, мәсәлә

$$\ddot x+10\dot x+25x=338\sin t$$

тәнлијинин

$$x(0)=5,\ \dot x(0)=0$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Ујғун бирчинс тәнлијин үмуми һәлли

$$x=e^{-5t}(c_1+c_2t)$$

шәклиндәдир. Бурада $P^1_m(t)$ вә $P^2_l(t)$ ујғун олараг, дәрәчәләри m вә l олан чохһәдлиләрдир. Бу һалы бахдығымыз һала кәтирмәк олар. Бунун үчүн

$$\cos\beta t=\frac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2},\quad \sin\beta t=\frac{e^{i\beta t}-e^{-i\beta t}}{2i}$$

дүстурларындан истифадә едәрәк

$$f_0(t)=\overline{P}^1_\kappa(t)\,e^{(\alpha+i\beta)t}+\overline{P}^2_\kappa(t)\,e^{(\alpha-i\beta)t},\quad \kappa=\max(m,\ l) \qquad (81)$$

шәклиндә јазаг; бурада $\overline{P}^1_\kappa(t)$, $\overline{P}^2_\kappa(t)$ илә κ-дәрәчәли комплекс әмсаллы чохһәдлиләр ишарә едилмишдир.

Јухарыдакы гејдә әсасән алырыг ки, сағ тәрәфи (81) шәклиндә олан тәнлијин хүсуси һәллини тапмаг үчүн сағ тәрәфләри

$$\overline{P}^1_\kappa(t)\,e^{(\alpha+i\beta)t},\quad \overline{P}^2_\kappa(t)\,e^{(\alpha-i\beta)t}$$

олан тәнликләрин хүсуси һәлләрини тапмаг кифајәтдир. Сағ тәрәфи белә олан тәнлијин хүсуси һәлләри јухарыда верилән гајда илә тапылыр. Һәмин хүсуси һәлләри тапыб топламагла, сағ тәрәфи (80) шәклиндә олан тәнлијин хүсуси һәллини тапмаг олар. Беләликлә, $\alpha+i\beta$ характеристик тәнлијин r дәфә тәкрарланан көкү исә, сағ тәрәфи (80) шәклиндә олан тәнлијин хүсуси һәлли

$$y=t^r\{Q^1_\kappa(t)\cos\beta t+Q^2_\kappa\sin\beta t\}e^{\alpha t} \qquad (82)$$

шәклиндәдир, бурада $Q^1_\kappa(t)$, $Q^2_\kappa(t)$—дәрәчәләри κ-дан бөјүк олмајан чохһәдлиләрдир.

Демәли, (78) тәнлијинин сағ тәрәфи (80) шәклиндә исә вә $\alpha+i\beta$ характеристик тәнлијин $r\geqslant 0$ дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, онун хүсуси һәллини (82) шәклиндә ахтармаг лазымдыр. Бир хүсуси һәлли бу гајда илә тапмаг үсулуна *гејри-муәјјән әмсаллар үсулу* дејилир.

Мисаллар.

1. Чәкиси 1,96 *кГ* олан P јүкү бир учу бәркидилмиш јајдан асылмышдыр. Јүкә периодик олараг $f(t)=0{,}676\sin t$ *кГ* харичи гүввәси тә'сир едир. Мә'лумдур ки, 1 *кГ* гүввәнин тә'сири алтында јај 20 *см* узаныр вә мүгавимәт гүввәси јүкүн сүр'әтинә мүтәнасиб олуб, сүр'әт 1 $\frac{\text{см}}{\text{сан}}$ олдугда 0,02 *кГ*-а бәрабәрдир.

Башланғыч анда јүкүн сүр'әтинин сыфыр олдуғуну вә јајын таразлыг вәзијјәтиндән 5 *см* узаглашдығыны биләрәк онун һәрәкәт ганунуну тапмалы.

Һәлли. Ox охуну шагули олараг ашағы јөнәлдәк. Тутаг ки, јајын тәбии узунлуғу l-дир вә әлавә гүввә тә'сир етмәдикдә асылы вәзијјәтдә λ_c гәдәр узаныр. Таразлыг вәзијјәтиндә ја-

јын уч нөгтәсини O илә ишарә едәк. Бахылан анда јајын узанмасыны λ илә ишарә едәк (шәкил 14). Шәклә әсасән $x=\lambda-\lambda_c$ олур.

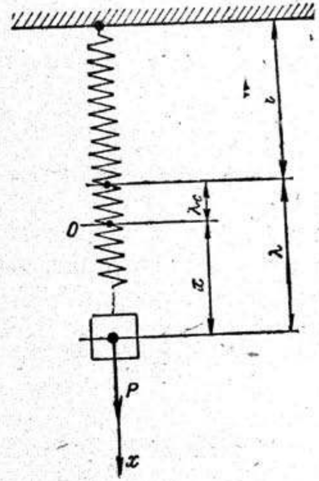
Һук ганунуна көрә јајын кәрилмә гүввәси онун узанмасы илә мүтәнасиб, јә'ни $c\lambda$ олур; бурада c әдәди јајын сәртлијини көстәрир. Демәли, јаја P ағырлыг гүввәси, $-c\lambda$ кәрилмә гүввәси, $-\kappa\dot x$ мүгавимәт гүввәси вә 0,676 $\sin t$ харичи гүввәси тә'сир едир. Онда Нјутонун 2-чи ганунуна көрә јүкүн һәрәкәт тәнлији

$$m\ddot x+\kappa\dot x=P-c\lambda+0{,}676\sin t.$$

Јајын кәрилмә гүввәси јүклә таразлашдығындан, $P=c\lambda_c$ олмалыдыр. Одур ки, $P-c\lambda=-c(\lambda-\lambda_c)=-cx$ олур. Демәли, јүкүн һәрәкәт тәнлији

$$m\ddot x+\kappa\dot x+cx=0{,}676\sin t$$

шәклиндә олар.



Шәкил 14.

Мәсәләнин шәртләринә көрә m, κ вә c әдәдләрини тә'јин едәк. $P=mg$ олдуғундан $m=\frac{1{,}96\ \kappa\Gamma}{9{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{сан}^2}}=0{,}002\ \frac{\kappa\Gamma\ \text{сан}^2}{\text{см}}$, $\kappa\cdot 1\ \frac{\text{см}}{\text{сан}}=0{,}02\ \kappa\Gamma$ олдуғундан, $\kappa=0{,}02\ \kappa\Gamma\cdot\frac{\text{сан}}{\text{см}}$ олар. $c\cdot 20\ \text{см}=1\ \kappa\Gamma$ олдуғундан, $c=0{,}05\ \frac{\kappa\Gamma}{\text{см}}$. Мәсәләнин дикәр шәртләринә көрә $x(0)=5$, $\dot x(0)=0$ башланғыч шәртләрини алырыг.

Беләликлә, мәсәлә

$$\ddot x+10\dot x+25x=338\sin t$$

тәнлијинин

$$x(0)=5,\ \dot x(0)=0$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Ујғун бирчинс тәнлијин үмуми һәлли

$$x=e^{-5t}(c_1+c_2t)$$

шәклиндәдир. Бирчинс олмаjан тәнлиjин хүсуси һәллини $x_1 = a\sin t + b\cos t$ шәклиндә ахтармаг лазымдыр. Бу ифадәни тәнликдә јазыб $\sin t$ вә $\cos t$-нин әмсалларыны тутушдурсаг, $a = 12$, $b = -5$ олар. Одур ки, бахылан тәнлиjин үмуми һәлли

$$x = e^{-5t}(c_1 + c_2 t) + 12\sin t - 5\cos t$$

олар. Бурада $x(0) = 5$, $\dot{x}(0) = 0$ башланғыч шәртләринә әсасән аларыг ки, јүкүн һәрәкәт гануну

$$x = e^{-5t}(10 + 38t) + 12\sin t - 5\cos t$$

шәклиндәдир.

2.
$$\ddot{y} - 10\dot{y} + 21y = t^2 e^{2t}$$

тәнлиjинин үмуми һәллини гураг. Бунун үчүн әввәлчә хәтти бирчинс

$$\ddot{y} - 10\dot{y} + 21y = 0$$

тәнлиjини һәлл едәк. Аjдындыр ки,

$$\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$$

характеристик тәнлиjинин көкләри $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 7$. Она көрә дә бирчинс тәнлиjин үмуми һәлли

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{7t}.$$

Дикәр тәрәфдән, $\alpha = 2$ әдәди характеристик тәнлиjин көкү олмадығындан, бирчинс олмаjан тәнлиjин хүсуси һәллини

$$y = (q_0 t^2 + q_1 t + q_2)e^{2t}$$

шәклиндә ахтармаг лазымдыр. Бу ифадәни тәнликдә јазыб e^{2t}-јә бөлдүкдән сонра t-нин еjни дәрәчәләринин әмсалларыны тутушдурсаг,

$$5q_0 = 1, \; -12q_0 + 5q_1 = 0, \; 2q_0 - 6q_1 + 5q_2 = 0$$

тәнликләрини аларыг. Бурадан $q_0 = 0{,}2$, $q_1 = 0{,}48$, $q_2 = 0{,}496$. Демәли, бахылан тәнлиjин бир хүсуси һәлли

$$y = (0{,}2t^2 + 0{,}48t + 0{,}496)e^{2t},$$

үмуми һәлли исә

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{7t} + (0{,}2t^2 + 0{,}48t + 0{,}496)e^{2t}.$$

3. $\dddot{y} - 4\ddot{y} + 5\dot{y} - 2y = e^t \sin 2t$ тәнлиjини һәлл етмәк үчүн әввәлчә уjғун бирчинс

$$\dddot{y} - 4\ddot{y} + 5\dot{y} - 2y = 0$$

тәнлиjини һәлл едәк.

Уjғун

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

характеристик тәнлиjинин көкләри $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 2$. Демәли, бирчинс тәнлиjин үмуми һәлли

$$y = (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t}.$$

Бирчинс олмаjан тәнлиjин сағ тәрәфи $f_0(t) = e^t \sin 2t$ олдуғундан вә $\alpha + i\beta = 1 + 2i$ характеристик әдәд олмадығындан, хүсуси һәлли

$$y = (A\cos 2t + B\sin 2t)e^t$$

шәклиндә ахтармаг лазымдыр. Бу ифадәни вә онун төрәмәләрини тәнликдә јазараг e^t-јә ихтисар етдикдән сонра $\cos 2t$ вә $\sin 2t$ функсиjаларынын әмсалларыны бәрабәрләшдирсәк, аларыг ки, $A = 0{,}1$; $B = 0{,}05$.

Беләликлә, бирчинс олмаjан тәнлиjин бир хүсуси һәлли

$$y = (0{,}1\cos 2t + 0{,}05\sin 2t)e^t,$$

үмуми һәлли исә

$$y = (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t} + (0{,}1\cos 2t + 0{,}05\sin 2t)e^t.$$

4. $y^{IV} + 2\ddot{y} + y = \cos t$ тәнлиjини һәлл едәк. Бу тәнлиjә уjғун бирчинс тәнлик

$$y^{IV} + 2\ddot{y} + y = 0$$

вә онун характеристик тәнлиjи

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0.$$

Бурадан аларыг ки, $\lambda_{1,2} = -i$, $\lambda_{3,4} = i$ характеристик әдәдләри ики дәфә тәкрарланан гошма комплекс әдәдләрдир. Одур ки, бирчинс тәнлиjин онлара уjғун олан хәтти асылы олмаjан һәгиги һәлләри

$$\cos t, \quad t\cos t, \quad \sin t, \; t\sin t$$

олар вә демәли, бирчинс тәнлиjин үмуми һәлли

$$y = (c_1 + c_2 t)\cos t + (c_3 + c_4 t)\sin t.$$

Бирчинс олмаjан тәнликдә $f_0(t) = \cos t$ олдуғундан $\alpha = 0$, $\beta = 1$ вә $\alpha + i\beta = i$ характеристик тәнлиjин $r = 2$ дәфә тәкрарланан көкү олур. Она көрә онун хүсуси һәллини

$$y = t^2(A\cos t + B\sin t)$$

шәклиндә ахтармаг лазымдыр. Бу ифадәнин өзүнү вә төрәмәләрини тәнликдә јазыб, $\cos t$ вә $\sin t$ функсиjаларынын әмсалларыны бәрабәрләшдирсәк, аларыг ки, $A = -0{,}125$, $B = 0$. Демәли, тәнлиjин хүсуси һәлли

$$y = -0{,}125t^2\cos t,$$

үмуми һәлли исә

$$y = (c_1 + c_2 t)\cos t + (c_3 + c_4 t)\sin t - 0{,}125t^2\cos t.$$

в) *Ејлер тәнлији.* Бә'зи дәјишән әмсаллы хәтти тәнликләри дәјишәни әвәз етмәклә сабит әмсаллы хәтти тәнлијә кәтирмәк олур. Белә тәнликләрә мисал олараг,

$$(\alpha t+\beta)^n x^{(n)} + a_1(\alpha t+\beta)^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = f(t)$$

шәклиндә олан тәнликләри көстәрмәк олар, бурада α, β, a_1, $a_2, \ldots, a_n$ сабит әдәдләрдир вә $\alpha\neq0$. Бу тәнлијә *Ејлер тәнлији* дејилир. Ејлер тәнлији

$$\alpha t+\beta = e^\tau$$

әвәзләмәси илә сабит әмсаллы тәнлијә кәтирилир. Бу заман

$$\dot x = \frac{dx}{dt} = \alpha e^{-\tau}\frac{dx}{d\tau},\quad \ddot x = \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 e^{-2\tau}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{dx}{d\tau}\right),\ldots,$$

$$x^{(\kappa)} = \frac{d^\kappa x}{dt^\kappa} = \alpha^\kappa e^{-\kappa\tau}\left(\frac{d^\kappa x}{d\tau^\kappa} - \frac{\kappa(\kappa-1)}{2}\frac{d^{\kappa-1}x}{d\tau^{\kappa-1}} + \cdots + (-1)^{\kappa-1}\times (\kappa-1)!\,\frac{dx}{d\tau}\right)\quad (\kappa=1,2,\ldots,n).$$

Бу гијмәтләри тәнликдә јазсаг, сабит әмсаллы

$$\alpha^n\frac{d^nx}{d\tau^n} + \alpha^{n-1}\left(a_1-\alpha\frac{n(n-1)}{2}\right)\frac{d^{n-1}x}{d\tau^{n-1}}+\cdots+a_nx = f\left(\frac{e^\tau-\beta}{\alpha}\right)$$

тәнлији алынар.

Мисал.

$$t^2\ddot x - 4t\dot x + 6x = 0$$

Ејлер тәнлијини һәлл етмәк үчүн $t=e^\tau$ әвәзләмәси апарсаг,

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - 5\frac{dx}{d\tau}+6x=0$$

тәнлији алынар. Бу тәнлијин үмуми һәлли

$$x = c_1e^{2\tau}+c_2e^{3\tau}$$

шәклиндәдир вә демәли, баxылан тәнлијин үмуми һәлли

$$x=c_1t^2+c_2t^3.$$

§ 10. ПЕРИОДИК ӘМСАЛЛЫ ХӘТТИ СИСТЕМЛӘР

Нәзәри вә техники мәсәләләрин бир чохунун һәлли периодик әмсаллы диференсиал тәнликләрә кәтирилир. Буна көрә периодик әмсаллы тәнликләр, диференсиал тәнликләр нәзәријјәсиндә хүсуси јер тутур. Бу параграфда периодик әмсаллы хәтти системләрин һәлләринин бә'зи хассәләри өјрәнилир.

Тутаг ки,

$$\dot x = A(t)x \qquad (10)$$

системиндә $A(t)$ матрис-функсијасы һәгиги охда кәсилмәздир вә мүәјјән $T(T\neq0)$ әдәди үчүн

$$A(t+T)=A(t) \qquad (83)$$

шәрти өдәнир. Онда (10) системинә периодик әмсаллы систем дејилир.

Үмумијјәтлә, периодик әмсаллы хәтти бирчинс системин тривиал олмајан периодик һәлли олмаја да биләр. Буну көстәрмәк үчүн садә

$$\dot x = a(t)x \qquad (84)$$

тәнлијинә бахаг; бурада $a(t)$ һәгиги охда тә'јин олунмуш $T(T\neq0)$ периодлу кәсилмәз функсијадыр. Бу тәнлијин үмуми һәлли

$$x(t)=c\exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right) \qquad (85)$$

шәклиндәдир; бурада c ихтијари сабитдир. Көстәрәк ки (85) дүстуру илә тә'јин олунан функсијалар ($c\neq0$) анчаг $\int_0^T a(s)ds=0$ олдугда T периодлу функсијалар олур. Доғрудан да, (85) дүстуруна әсасән

$$x(t+T) = c\exp\left(\int_0^{t+T} a(\tau)d\tau\right) = c\exp\left(\int_0^T a(\tau)d\tau\right)\exp\left(\int_T^{t+T} a(\tau)d\tau\right).$$

Дикәр тәрәфдән, $a(t)$ функсијасы T периодлу функсија олдуғундан, $\tau=T+s$ әвәзләмәси апармагла аларыг ки,

$$\int_T^{t+T} a(\tau)d\tau = \int_0^t a(s)ds.$$

Демәли,

$$x(t+T)=c\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)\exp\left(\int_0^T a(s)ds\right) = x(t)\exp\left(\int_0^T a(s)ds\right).$$

Бурадан көрүнүр ки, $x(t+T)=x(t)$ олмасы үчүн $\exp\left(\int_0^T a(s)ds\right)=1$, јә'ни $\int_0^T a(s)ds=0$ олмалыдыр.

200—14

Ајдындыр ки, $\int_0^T a(s)ds \neq 0$ олдугда (84) тәнлијинин T периодлу һәлли јохдур.

(84) тәнлији илә јанашы

$$\dot y = \left[a(t) - \frac{1}{T}\int_0^T a(s)\,ds \right] y$$

тәнлијинә бахаг. Бу тәнликдә

$$\int_0^T \left\{ a(t) - \frac{1}{T}\int_0^T a(s)\,ds \right\} dt = 0$$

олдуғундан, онун һәлләри периодик функсијалардыр вә

$$y = c\exp\left\{ \int_0^t \left[a(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T a(s)\,ds \right] d\tau \right\} = c\exp\left(\int_0^t a(\tau)\,d\tau \right)\exp\left(-\frac{t}{T}\int_0^T a(\tau)\,d\tau \right)$$

шәклиндәдир.

(85) дүстуруна әсасән

$$y(t) = x(t)\exp\left(-\frac{t}{T}\int_0^T a(\tau)\,d\tau \right)$$

шәклинә јаза биләрик. Бурадан

$$x(t) = y(t)e^{tR},\quad R = \frac{1}{T}\int_0^T a(\tau)\,d\tau \qquad (86)$$

мүнасибәти алыныр вә ајдындыр ки, e^{Rt} функсијасы

$$\dot z = Rz$$

тәнлијинин $z(0) = 1$ башланғыч шәртини өдәјән һәллидир. Беләликлә, $a(t)$ функсијасы T периодлу олдугда, (84) тәнлијинин һәр бир һәлли һәмин периодлу $y(t)$ функсијасы илә мүәјјән сабит әмсаллы тәнлијин һәллинин һасилинә бәрабәрдир.

Бу тәклиф үмуми шәкилдә верилмиш периодик әмсаллы хәтти бирҹинс системләрә хас олан ән мүһүм хассәләрдән бирдир. Бу хассәни үмуми һалда көстәрмәк үчүн әввәлҹә ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 10. *$A(t)$ матрис-функсијасы T периодлу кәсилмәз матрис-функсија вә $\Phi(t)$ матрис-функсијасы (10) системинин фундаментал матриси исә, $\Phi(t+T)$ дә һәмин системин фундаментал матрисидир. Әлавә олараг $\Phi(0) = E$ оларса,*

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T). \qquad (87)$$

Исбаты. $\Phi(t)$ фундаментал матрис олдуғундан,

$$\dot\Phi(t) = A(t)\Phi(t),\quad -\infty < t < +\infty.$$

Онда (83) шәртинә әсасән алырыг ки,

$$\dot\Phi(t+T) = A(t+T)\,\Phi(t+T) = A(t)\Phi(t+T)$$

ејнилији өдәнир, јә'ни $\Phi(t+T)$ матриси (10) системинә ујғун олан матрис-системин һәллидир.

Дикәр тәрәфдән, $\det\Phi(t+T) \neq 0$ олдуғундан, $\Phi(t+T)$ фундаментал матрисдир (теорем 3). Онда 4-ҹү теоремә әсасән елә гејри-мәхсуси C матриси вар ки,

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C \qquad (88)$$

вә ајдындыр ки, $\Phi(0) = E$ оларса, $C = \Phi(T)$. Теорем исбат олунду.

$$\dot X = A(t)\,X \qquad (14)$$

матрис-системинин $X(0) = E$ шәртини өдәјән $\Phi(t)$ һәллинә (10) системинин матрисанты, $\Phi(T)$-јә онун *монодромија матриси*, $\Phi(T)$ матрисинин характеристик әдәдләринә исә *мултипликаторлары* дејилир.

Мултипликаторларын күллиси (10) системинин *спектри* адланыр.

Теорем 11 (Флоке—Лјапунов). *Периодик әмсаллы (10) системинин һәр бир $\Phi(t)$ фундаментал матрисинә ујғун, үмумијјәтлә комплекс, елә T периодлу гејри-мәхсуси $P(t)$ матрис-функсијасы вә сабит R матриси вар ки,*

$$\Phi(t) = P(t)\,e^{tR}. \qquad (89)$$

Исбаты. Матрисләр нәзәријјәсиндән мә'лумдур ки, һәр бир гејри-мәхсуси B матриси үчүн онунла коммутатив олан вә

$$e^K = B$$

шәртини өдәјән, үмумијјәтлә, комплекс олан K матриси вар Белә K матрисинә *B матрисинин логарифми* дејилир вә белә ишарә олунур:

$$K = \ln B.$$

Бу тә'рифдән истифадә едәрәк (88) мүнасибәтиндә $B = ($ вә $K = TR$ гәбул етсәк, ону

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\,e^{TR} \qquad (88')$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу мүнасибәтә әсасән,

$$P(t) = \Phi(t)\,e^{-tR} \qquad (90)$$

матриси T периодлу матрис олур. Доғрудан да,

$$P(t+T) = \Phi(t+T)\, e^{-(t+T)R} = \Phi(t)\, C e^{-(t+T)R} =$$
$$= \Phi(t)\, e^{TR} e^{-(t+T)R} = \Phi(t)\, e^{-tR} = P(t).$$

Демәли, $P(t)$ матриси T периодлу матрисдир. Дикәр тәрәфдән, e^{-tR} матрис функсиjасы

$$\dot{Z} = -RZ$$

матрис-системинин $Z(0)=E$ шәртини өдәjән һәлли олдуғундан тәрси вар. Она көрә $P(t)$ матрисинин дә тәрси вар.

(90) мүнасибәтиндән (89) мүнасибәтинин доғрулуғу алыныр. Теорем исбат олунду.

Теоремдәки $P(t)$ вә R матрисләри, үмумиjjәтлә, комплекс матрисләр олдуғундан, һәгиги әмсаллы системләр үчүн (89) дүстуру әвәзинә

$$\Phi(t) = P_1(t)\, e^{tR_1} \qquad \textbf{(91)}$$

дүстуруну алмаг олар, бурада $P_1(t)$ матриси $2T$ периодлу гејри-мәхсуси һәгиги матрис, R_1 исә мүәjјән һәгиги сабит матрисдир. Доғрудан да, матрисләр нәзәриjjәсиндән мә'лумдур ки, һәгиги B матриси үчүн

$$e^{K_1} = B^2$$

шәртини өдәjән һәгиги K_1 матриси вар. Онда $B=C$ гәбул етсәк, (88) мүнасибәтинә әсасән

$$\Phi(t+2T) = \Phi(t+T)\, C = \Phi(t)\, C^2 = \Phi(t)\, e^{K_1}$$

олар. $K_1 = 2TR_1$ гәбул едәрәк $P_1(t) = \Phi(t)\, e^{-tR_1}$ матрисинә бахаг. Бу матрис $2T$ периодлу һәгиги матрис олур.

Беләликлә, һәгиги әмсаллы системләр үчүн, **Флоке-Лјапунов теореми ашағыдакы кими ифадә олунур:**

$A(t)$ матриси T периодлу һәгиги матрис исә, (10) системинин һәр бир фундаментал матриси $2T$ периодлу гејри-мәхсуси $P_1(t)$ һәгиги матриси илә, мүәjјән һәгиги сабит R_1 матриси үчүн e^{tR_1} матрисинин һасили шәклиндә көстәрилә биләр.

Теоремин исбатындан аjдындыр ки, R матриси $R = \frac{1}{T}\ln\Phi(T)$ дүстуру илә тә'јин олунур.

R матрисинин характеристик әдәдләринә (10) системинин *характеристик көстәричиләри* дејилир.

Системин характеристик көстәричиләри фундаментал матрисин сечилишиндән асылы дејил. Доғрудан да, $\Phi_1(t)$ системин башга фундаментал матриси оларса, 4-чү теоремә әсасән $\Phi_1(t) = \Phi(t)C$ олдуғундан, (88′) дүстуруна әсасән $\Phi_1(t+T) = \Phi(t)e^{TR}C$ олур. Бурадан $\Phi_1(t+T) = \Phi_1(t)\, C^{-1}e^{TR}C = \Phi_1(t)e^{TR_1}$, бурада $R_1 = C^{-1}RC$. R вә R_1 матрисләри охшар олдуғундан характеристик әдәдләри ејнидир. Одур ки, $\Phi(t)$ олараг һәмишә матрисант көтүрәчәјик.

Тутаг ки, μ_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ әдәди R матрисинин характеристик әдәди, c^j исә бу характеристик әдәдә уjғун мәхсуси вектордур. Онда $(R-\mu_j E)^{\kappa} c^j = 0$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ олдуғундан, $e^{tR}c^j = e^{t[\mu_j E + (R-\mu_j E)]}c^j = e^{t\mu_j E}\, e^{t(R-\mu_j E)}\, c^j = e^{\mu_j t}\, c^j$ вә (10) системинин $x(0)=c^j$ шәртини өдәjән һәллини (89) дүстуруна әсасән

$$\varphi^j(t) = \Phi(t)\, c^j = P(t)\, e^{tR} c^j = e^{\mu_j t}\, P(t)\, c^j$$

шәклиндә јазмаг олар. Садәлик үчүн

$$\psi^j(t) = P(t)\, c^j$$

ишарә едәк. Онда

$$\varphi^j(t) = e^{\mu_j t}\, \psi^j(t) \qquad (92)$$

вә $P(t)$ матриси T периодлу матрис олдуғундан алырыг ки, $\psi^j(t)$ вектор-функсиjасы T периодлу вектор-функсиjадыр.

Асанлыгла јохламаг олар ки, истәнилән t үчүн

$$\varphi^j(t+T) = \rho_j\, \varphi^j(t), \quad \rho_j = e^{\mu_j T} \qquad (93)$$

шәрти өдәнир. Бу шәрти өдәјән вә тривиал олмаjан һәллә (10) системинин *нормал һәлли* дејилир. (93) шәртиндән $t=0$ олдугда алынан $\varphi^j(T) = \rho_j\, \varphi^j(0)$ шәртинә вә $\varphi^j(t) = \Phi(t)\, c^j$ дүстуруна әсасән

$$[\Phi(T) - \rho_j E]\, c^j = 0 \qquad (94)$$

мүнасибәти алынар.

Бурадан аjдындыр ки, ρ_j әдәди $\Phi(T)$ матрисинин характеристик әдәди, c^j исә она уjғун мәхсуси вектордур.

$$\det[\rho E - \Phi(T)] = \rho^n + a_1\rho^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\rho + a_n = 0 \qquad (95)$$

тәнлиjинә (10) системинин *характеристик тәнлиjи*, һәмин тәнлиjин көкләринә исә системин *характеристик әдәдләри вә ја мултипликаторлары* дејилир.

Беләликлә, (10) системинин һәр бир μ_j характеристик көстәричисинә $\rho_j = e^{\mu_j T}$ мултипликатору вә $\varphi^j(t)$ нормал һәлли уjғундур.

Тутаг ки, $x(t)$ вектор-функсиjасы (10) системинин һәр һансы нормал һәллидир, jә'ни елә ρ әдәди вар ки,

$$x(t+T) = \rho\, x(t). \qquad (96)$$

Бурадан, $x(T) = \rho\, x(0)$ вә $x(t) = \Phi(t)\, x(0)$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$[\Phi(T) - \rho E]\, x(0) = 0$$

олар. $x(0) \neq 0$ олдуғундан, бу мүнасибәт көстәрир ки, ρ әдәди $\Phi(T)$ матрисинин характеристик әдәди, $x(0)$ исә она уjғун мәхсуси вектордур.

$\alpha = \frac{1}{T} \ln \rho \; (\ln \rho = \ln |\rho| + i \arg \rho)$ гәбул едиб $\psi(t) = e^{-\alpha t} x(t)$

вектор-функсиjасына бахаг. Онда $\rho = e^{\alpha T}$ вә (96) шәртинә әсасән

$$\psi(t+T) = e^{-\alpha(t+T)} x(t+T) = e^{-\alpha t} e^{-\alpha T} \rho x(t) = e^{-\alpha t} x(t) = \psi(t)$$

олар, jә'ни $\psi(t)$ вектор-функсиjасы T периодлудур. Бурадан алырыг ки,

$$x(t) = e^{\alpha t} \psi(t).$$

Демәли, (10) системинин һәр бир нормал һәллини (92) шәклиндә көстәрмәк олар.

Аjдындыр ки, ρ әдәди $\Phi(T)$ монодромиjа матрисинин характеристик әдәди олдуғундан, $\mu = \frac{1}{T} \ln \rho$ әдәди $\frac{1}{T} \ln \Phi(T)$ илә тә'jин олунан R матрисинин характеристик әдәди олур. Jә'ни һәр бир ρ мултипликаторуна (10) системинин $\mu = \frac{1}{T} \ln \rho$ характеристик көстәричиси уjғундур. Бурадан аjдындыр ки, характеристик көстәричиләр $\frac{2\pi i m}{T}$ (m там әдәддир) топланасына гәдәр дәгигликлә биргиjмәтли тә'jин олунурлар.

Флоке—Лjапунов теореминдән истифадә едәрәк $x = P(t) y$ әвәзләмәси васитәсилә (10) системини сабит әмсаллы

$$\dot{y} = Ry \tag{97}$$

системинә кәтирмәк олар.

Доғрудан да, (89) дүстуруна әсасән $P(t) = \Phi(t) e^{-tR}$ вә $\Phi(t)$-нин фундаментал матрис олдуғуну нәзәрә алыб $x = \Phi(t) e^{-tR} y$ әвәзләмәсини (10) системиндә jазсаг,

$$\Phi(t) e^{-tR} \dot{y} = \Phi(t) R e^{-tR} y$$

системини аларыг. $Re^{-tR} = e^{-tR} R$ олдуғундан, бу системин һәр тәрәфини солдан $P^{-1}(t)$-jә вурсаг, (97) системи алынар.

Һәтти бирчинс олмаjан

$$\dot{x} = A(t) x + f(t) \tag{1'}$$

системинә бахаг.

Теорем 12. *Фәрз едәк ки, $A(t)$ матриси T периодлу кәсилмәз матрис-функсиjа, $f(t)$ исә T периодлу кәсилмәз вектор-функсиjадыр вә (10) системинин T периодлу һәлли jохдур. Онда (1') системинин jеканә T периодлу һәлли вар.*

Исбаты. Тутаг ки, $\Phi(t)$ матриси (10) системинин матрисантыдыр. Онда һәмин системин үмуми һәлли

$$x = \Phi(t) c$$

шәклиндә олар. Шәртә көрә (10) системинин T периодлу һәлли олмадығындан, ихтиjари $c \neq 0$ сүтун вектору үчүн

$$\Phi(t+T) c \neq \Phi(t) c$$

олмалыдыр. Бурадан, (87) дүстуруна әсасән алырыг ки,

$$\Phi(t) \; [\Phi(T) - E] \; c \neq 0.$$

Шәртә көрә c ихтиjари сабит вектор, $\Phi(t)$ фундаментал матрис олдуғундан, бурадан алынар ки, $\Phi(T) - E$ матриси дә гejри-мәхсуси матрисдир.

Бирчинс олмаjан (1') системинин үмуми һәллини $\Phi(t)$ матрисанты васитәсилә ((19) дүстуруна әсасән)

$$x(t) = \Phi(t) \; x(0) + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) \; f(s) ds \tag{19'}$$

шәклиндә jазмаг олар, бурада $x(0)$ ихтиjари вектордур. Онда системин T периодлу һәлли дә (әкәр варса) бу һәлләр ичәрисиндә олмалыдыр.

(19') дүстуруна әсасән

$$x(t+T) = \Phi(t+T) x(0) + \Phi(t+T) \int_0^{t+T} \Phi^{-1}(s) f(s) ds =$$

$$= \Phi(t+T) x(0) + \Phi(t+T) \int_0^{T} \Phi^{-1}(s) f(s) ds +$$

$$+ \Phi(t+T) \int_T^{t+T} \Phi^{-1}(s) f(s) ds.$$

Бурадан, икинчи интегралда $s = T + \tau$ әвәзләмәси апарараг $f(t)$-нин T периодлу вектор-функсиjа олдуғуну вә (87) дүстуруну нәзәрә алсаг,

$$x(t+T) = \Phi(t) \left[\Phi(T) x(0) + \Phi(T) \int_0^T \Phi^{-1}(s) f(s) ds \right] +$$

$$+ \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) f(s) ds = \Phi(t) x(T) + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s) f(s) ds$$

олар. Бурадан вә (19') дүстурундан аjдындыр ки,

$$x(T) = x(0) \tag{98}$$

шәртинин өдәнмәси, $x(t)$ һәллинин (1') системинин T периодлу һәлли олмасы үчүн зәрури вә кафидир.

(19') дүстурундан

$$x(T) = \Phi(T) x(0) + \Phi(T) \int_0^T \Phi^{-1}(s) f(s) ds$$

олдуғундан, (98) шәртинә әсасән, $x(0)$ векторуна нәзәрән

$$(\Phi(T) - E) x(0) = -\Phi(T) \int_0^T \Phi^{-1}(s) f(s) ds \tag{99}$$

чәбри тәнликләр системи алынар. $\Phi(T)-E$ ғејри-мәхсуси матрис олдуғундан, бу системин јеканә һәлли вар.

Беләликлә, (99) системиндән тә'јин олунан $x(0)$ векторуна ујғун олан (19') һәлли T периодлу һәлл олур. Һәллин периодиклији шәртинә әсасән

$$x(t)=x(t+T)=\Phi(t+T)x(0)+\Phi(t+T)\int_0^{t+T}\Phi^{-1}(s)f(s)ds=$$

$$=\Phi(t+T)\left[x(0)+\int_0^t\Phi^{-1}(s)f(s)ds+\right.$$

$$\left.+\int_t^{t+T}\Phi^{-1}(s)f(s)ds\right]=\Phi(t+T)\,\Phi^{-1}(t)\left[\Phi(t)x(0)+\Phi(t)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^t\Phi^{-1}(s)f(s)ds+\Phi(t)\int_t^{t+T}\Phi^{-1}(s)f(s)ds\right]=$$

$$=\Phi(t+T)\,\Phi^{-1}(t)\left[x(t)+\Phi(t)\int_t^{t+T}\Phi^{-1}(s)f(s)ds\right].$$

Демәли, $x(t)$-јә нәзәрән

$$x(t)=\Phi(t+T)\Phi^{-1}(t)x(t)+\Phi(t+T)\int_t^{t+T}\Phi^{-1}(s)f(s)ds \quad (100)$$

тәнлији алынар.

$$G(t,s)=\Phi(t+T)\,\Phi^{-1}(t+s)$$

ишарә едәк. Онда (100) тәнлијини

$$(E-G(t,0))x(t)=\int_t^{t+T}G(t,s-t)\,f(s)ds \qquad (101)$$

шәклиндә јазмаг олар. (87) дүстуруна әсасән

$$G(t,0)=\Phi(t)\Phi(T)\Phi^{-1}(t)$$

олдуғундан, $G(t,0)$ вә $\Phi(T)$ матрисләри охшардырлар, јә'ни $E-G(t,0)$ матрисинин тәрси вар. Онда (101) дүстурундан, $s=t+T-\tau$ әвәзләмәси апарараг, $f(t)$ вектор-функсијасынын периодиклијини дә нәзәрә алсаг,

$$x(t)=(E-G(t,0))^{-1}\int_0^T G(t,T-\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Бу периодик һәллин јеканәлији онун гурулма ғајдасындан ајдындыр. Теорем исбат олунду.

Чалышмалар

1. Фундаментал һәлләр системи

$$x^1(t)=\begin{pmatrix}e^t\\ e^t\end{pmatrix},\quad x^2(t)=\begin{pmatrix}t^2e^{-t}\\ (1+t^2)e^{-t}\end{pmatrix}$$

олан хәтти тәнликләр системини гурун.

Чаваб: $\begin{cases}\dot x_1=(1-2t+2t^2)x_1+(2t-2t^2)x_2,\\ \dot x_2=(2-2t+2t^2)x_1+(-1+2t-2t^2)x_2.\end{cases}$

2. Ардычыл интегралламагла

$$\begin{cases}\dot x_1=x_1\sin t,\\ \dot x_2=x_1e^{\cos t}+\dfrac{2t}{1+t^2}x_2\end{cases}$$

системинин үмуми һәллини тапмалы.

Чаваб: $x_1=c_1e^{-\cos t}$, $x_2=c_1(1+t^2)\operatorname{arctg}t+c_2(1+t^2)$.

3. Ујғун бирчинс системин фундаментал матрисинин

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+t^2} & -t\\ t & 1+t^2\end{pmatrix}$$

олдуғуну биләрәк,

$$\begin{cases}\dot x_1=\dfrac{t^3-t}{(1+t^2)^2}x_1-\dfrac{3t^2+1}{(1+t^2)^3}x_2+2;\\ \dot x_2=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}x_1+\dfrac{t^3+3t}{(1+t^2)^2}x_2\end{cases}$$

системини сабитләрин вариасијасы үсулу илә һәлл етмәли.

Чаваб:

$$x_1=\frac{c_1}{1+t^2}-c_2t+\frac{2t}{1+t^2}+t\ln(1+t^2),$$
$$x_2=c_1t+c_2(1+t^2)+2t^2-(1+t^2)\ln(1+t^2).$$

4. $\begin{cases}\dot x_1=2x_1+4x_2,\\ \dot x_2=-(x_1+2x_2)\end{cases}$

системини, e^{At} матрисини һесабламагла һәлл един.

Чаваб: $x_1=c_1+2(c_1+2c_2)t$, $x_2=c_2-(c_1+2c_2)t$.

5. Ашағыдакы сабит әмсаллы системләри һәлл един:

а) $\begin{cases}\dot x_1=x_1+x_2,\\ \dot x_2=-2x_1+4x_2.\end{cases}$ *Чаваб:* $x_1=c_1e^{2t}+c_2e^{3t}$, $x_2=c_1e^{2t}+2c_2e^{3t}$.

б) $\begin{cases} \dot x_1 = 5x_1 - 3x_2 - x_3, \\ \dot x_2 = 2x_1 - x_3, \\ \dot x_3 = 8x_1 - 8x_2 - x_3, \\ (\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -1). \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + c_3e^{-t}$, $x_2 = c_1e^{2t} + c_3e^{-t}$, $x_3 = 2c_2e^{3t} + 3c_3e^{-t}$.

в) $\begin{cases} \dot x_1 = 2x_1 - x_2 - 2x_3, \\ \dot x_2 = 4x_1 - 3x_2 - 2x_3, \\ \dot x_3 = 5x_1 - x_2 - 5x_3, \\ (\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -3). \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{-3t}$, $x_2 = c_1e^{-t} + 2c_2e^{-2t} + c_3e^{-3t}$, $x_3 = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + 2c_3e^{-3t}$.

г) $\begin{cases} \dot x_1 = 2x_1 - 1{,}5x_2 - 1{,}5x_3, \\ \dot x_2 = 3x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}5x_3, \\ \dot x_3 = 3x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3, \\ (\lambda_1 = -1,\ \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i). \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 = (c_2 \sin 3t + c_3 \cos 3t)e^{2t}$, $x_2 = c_1e^{-t} + (-c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t)e^{2t}$, $x_3 = -c_1e^{-t} + (-c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t)e^{2t}$.

д) $\begin{cases} \dot x = 8x_1 - 10x_2 - 8x_3, \\ \dot x_2 = 2x_1 - 3x_2 - x_3, \\ \dot x_3 = 4x_1 - 5x_2 - 5x_3, \\ (\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = -1 \pm i). \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 = 3c_1e^{2t} + c_2(\cos t - \sin t)e^{-t} + c_3(\cos t + \sin t)e^{-t}$, $x_2 = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}\cos t + c_3e^{-t}\sin t$, $x_3 = c_1e^{2t} - c_2e^{-t}\sin t + c_3e^{-t}\cos t$.

е) $\begin{cases} \dot x_1 = 3x_1 - 2x_3, \\ \dot x_2 = x_1 + x_2 - x_3, \\ \dot x_3 = x_1, \\ (\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 2). \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 = (c_1 + c_2)e^t + 2c_3e^{2t}$, $x_2 = (c_1 + 2c_2)e^t + c_3e^{2t}$, $x_3 = (c_1 + c_2)e^t + c_3e^{2t}$.

ж) $\begin{cases} \dot x_1 = 2x_1 - x_2, \\ \dot x_2 = -x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot x_3 = x_1 - x_2 + x_3, \\ (\lambda_{1,2} = 1,\ \lambda_3 = 2). \end{cases}$ *Чаваб:* $x_1 = (c_1 + tc_2)e^t + c_3e^{2t}$, $x_2 = (c_1 - c_2 + tc_2)e^t$, $x_3 = (c_1 + c_2 + tc_2)e^t + c_3e^{2t}$.

6. Хәтти асылы олмаjан һәлләр системинә көрә хәтти тәнлиjи гурун:

а) $1, \sin t, t\sin t$. *Чаваб:* $(1+\cos^2 t)\dddot y + \sin 2t\,\ddot y + (2+\sin^2 t)\dot y = 0$.

б) $\sin t, \cos t, e^{2t}$. *Чаваб:* $\dddot y - 2\ddot y + \dot y - 2y = 0$.

в) e^{3t}, te^{3t}, e^{-t}. *Чаваб:* $\dddot y - 5\ddot y + 3\dot y + 9y = 0$.

г) t, e^{-t}, e^t. *Чаваб:* $t\dddot y - \ddot y - t\dot y + y = 0$.

7. Остроградски—Лиувилл дүстурундан истифадә едәрәк, верилмиш хүсуси һәллинә көрә тәнлиjи һәлл един:

а) $(1+t^2)^2\ddot y - t(1+t^2)\dot y + (t^2-1)y = 0$, $y_1 = \sqrt{1+t^2}$

Чаваб: $y = \sqrt{1+t^2}\,[c_1 \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + c_2]$.

б) $(1+t)\ddot y - \dot y - ty = 0, y_1 = e^t$ *Чаваб:* $y = c_1(3+2t)e^{-t} + c_2e^t$.

8. Сабитләрин вариасиjасы үсулу илә ашағыдакы тәнликләри һәлл един:

а) $(1+t)\ddot y + t\dot y - y = (1+t)^2e^{-t}$.

Уjғун бирчинс тәнлиjин бир хүсуси һәллинин $y_1 = t$ олдуғу верилир.

Чаваб: $y = c_1t + c_2e^{-t} - (t + 0{,}5t^2)e^{-t}$.

б) $\ddot y - 4\dot y + 5y = e^{2t}\operatorname{ctg} t$,

Чаваб: $y = \left(c_1 \cos t + c_2 \sin t + \sin t \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)e^{2t}$.

9. Намә'лум әмсаллар үсулу илә ашағыдакы тәнликләри һәлл един:

а) $\dddot y - 3\ddot y + 4y = 2e^t$. *Чаваб:* $y = c_1e^{-t} + (c_2 + c_3t)e^{2t} + e^t$.

б) $\dddot y - 3\ddot y + 4y = (6 - 18t)e^{2t}$. *Чаваб:* $y = c_1e^{-t} + (c_2 + c_3t)e^{2t} + t^2(2-t)e^{2t}$

в) $\dddot y - 5\ddot y + 9\dot y - 5y = 8\sin t$. *Чаваб:* $y = c_1e^t + (c_2 \cos t + c_3 \sin t)e^{2t} - \cos t$.

г) $\ddot y - 2\dot y + 10y = 6e^t \cos 3t$. *Чаваб:* $y = (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)e^t + e^t t \sin 3t$.

10. Ашағыдакы Еjлер тәнликләрини һәлл един:

а) $(5t-1)^2\ddot x - 10(5t-1)\dot x + 50x = 0$. *Чаваб:* $x = c_1(5t-1) + c_2(5t-1)^2$.

б) $t^2\ddot x - 2t\dot x + 2x = 6t^2 + 2$. *Чаваб:* $x = c_1t + c_2t^2 + t^4 + 1$.

11. Көстәрин ки, $b^2 - 4c \geqslant 0$ олдугда

$$\ddot x + b\dot x + cx = \sin t$$

тәнлиjинин jеканә периодик һәлли вар вә бу һәлли тапын.

Чаваб:

$$x = \frac{c-1}{(c-1)^2 + b^2}\sin t - \frac{b}{(c-1)^2 + b^2}\cos t.$$

ҺӘЛЛИН ПАРАМЕТРЛӘРДӘН ВӘ БАШЛАНҒЫЧ ГИЈМӘТЛӘРДӘН АСЫЛЫЛЫҒЫ

Адәтән, практики мәсәләләрин һәллини диференсиал тәнлијә кәтирәркән, бахылан мәсәләнин хүсусијјәти илә бағлы олан әдәди параметрләри нәзәрә алмаг лазым кәлир. Она көрә дә диференсиал тәнлијин һәлли, һәмин параметрләрдән асылы олур вә бир чох һалларда параметрләри сечмәклә әлверишли олан һәлл тапылыр. Дикәр тәрәфдән, ајдындыр ки, башланғыч шәртләри дәјишдикдә тәнлијин һәлли дәјишир, јә'ни һәлл һәм дә башланғыч гијмәтләрдән асылы олур.

Бу фәсилдә әввәлчә сағ тәрәфи параметрләрдән асылы олан нормал системин һәллинин параметрләрә нәзәрән кәсилмәзлији вә диференсиалланмасы һаггында теоремләр исбат олунур. Сонра исә бу теоремләрин көмәји илә һәллин башланғыч гијмәтләрдән асылылығы, нормал системин үмуми интегралынын варлығы вә һәллин һәм сәрбәст дәјишәнә, һәм дә параметрә нәзәрән аналитиклији арашдырылыр. Бунлардан әлавә, сингулјар һәјәчанланмыш системләр һаггында гыса мә'лумат верилир.

§ 1. ҺӘЛЛИН ПАРАМЕТРЛӘРӘ НӘЗӘРӘН КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

Тутаг ки, сағ тәрәфи $\mu=(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l)$ әдәди параметрләриндән асылы олан

$$\dot{x}=f(t, x, \mu) \tag{1}$$

нормал диференсиал тәнликләр системи верилмишдир, бурада $f(t, x, \mu)$—компонентләри $f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \ldots, \mu_l)$, $i=1, 2, \ldots, n$ олан вектор-функсијадыр. Бу систем компонентләрлә

$$\dot{x}_i=f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \ldots, \mu_l), \quad i=1, 2, \ldots, n \tag{1'}$$

шәклиндә јазылар. Фәрз едәчәјик ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \ldots, \mu_l)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсијалары $t, x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \ldots \mu_l$, дәјишәнләри фәзасынын G областында тә'јин олунмушдур.

Ајдындыр ки, һәр бир $(t^0, x^0, \mu^0)\in G$ нөгтәси үчүн елә сонлу $a>0$, $b>0$, $\rho>0$ әдәдләри тапмаг олар ки, ганалы, мәһдуд

$$R=\{\,|t-t_0|\leqslant a, \quad \|x-x^0\|\leqslant b, \quad \|\mu-\mu^0\|\leqslant\rho\}$$

областы G областында јерләшсин, бурада

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}, \quad \|\mu\|=\sqrt{\sum_{\kappa=1}^{l}\mu_\kappa^2}.$$

Системин

$$x(t_0)=x^0 \tag{2}$$

башланғыч шәртини өдәјән һәллини $x=\varphi(t, \mu)$ илә ишарә едәк, бурада $\varphi(t, \mu)$—компонентләри $\varphi_1(t, \mu), \ldots, \varphi_n(t, \mu)$ олан вектор-функсијадыр.

Теорем 1 (Локал теорем). *Тутаг ки, $f(t, x, \mu)$ вектор функсијасынын $f_i(t, x, \mu)$, $i=1, 2, \ldots, n$ компонентләри R-дә кәсилмәздирләр вә $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјирләр. Онда $\|\mu-\mu^0\|\leqslant\rho$ шәртини өдәјән һәр бир μ параметри үчүн (1) системинин (2) башланғыч шәртләрини өдәјән вә $[t_0-h, t_0+h]$ парчасында тә'јин олунмуш јеканә $x=\varphi(t, \mu)$ һәлли вар. Бу һәлл гапалы*

$$\Pi=\{\,|t-t_0|\leqslant h, \quad \|\mu-\mu^0\|\leqslant\rho\}$$

областында аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәздир; бурада

$$h=\min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \quad M=\max_{R}\|f(t, x, \mu)\|.$$

Исбаты. Теоремин шәртләриндән ајдындыр ки, елә $K>0$ әдәди вар ки, $(t, x, \mu)\in R$ вә $(t, y, \mu)\in R$ үчүн

$$\|f(t, x, \mu)-f(t, y, \mu)\|\leqslant K\|x-y\| \tag{3}$$

шәрти өдәнир.

Теореми исбат етмәк үчүн μ параметринин $\|\mu-\mu^0\|\leqslant\rho$ шәртини өдәјән һәр һансы гијмәтини көтүрүб, (1) системинин (2) башланғыч шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә ардычыл јахынлашма үсулуну тәтбиг едәк.

Сыфырынчы јахынлашма олараг $\varphi^0(t, \mu)=x^0$ гәбул едәрәк

$$\varphi^m(t, \mu)=x^0+\int_{t_0}^{t}f\left(s, \varphi^{m-1}(s, \mu), \mu\right)ds, \quad m=1, 2, \ldots$$

јахынлашмаларыны гураг. Ајдындыр ки, $\varphi^m(t_0, \mu)=x^0$, $m=0, 1, 2, \ldots$

IV фәслин 7-чи параграфында верилән гајда илә көстәрмәк олар ки, $\{\varphi^m(t, \mu)\}$ ардычыллығынын елементләри Π-дә кәсилмәздир вә графикләри R-дә јерләшир.

Көстәрәк ки, $\{\varphi^m(t, \mu)\}$ вектор-функсијалар ардычыллығы Π-дә мүнтәзәм јығылыр. Бунун үчүн

$$\varphi^0(t, \mu) + [\varphi^1(t, \mu) - \varphi^0(t, \mu)] + \cdots +$$
$$+ [\varphi^m(t, \mu) - \varphi^{m-1}(t, \mu)] + \cdots \qquad (4)$$

вектор-сырасы дүзәлдәк вә онун һәдләрини гиј̆мәтләндирәк.

Тутаг ки, гапалы Π областында $\|\varphi^0(t, \mu)\| \leqslant L$ вә $\|\varphi^1(t, \mu) - \varphi^0(t, \mu)\| \leqslant L$. Онда (3) шәртинә әсасән асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\|\varphi^m(t, \mu) - \varphi^{m-1}(t, \mu)\| \leqslant L \frac{(Kh)^{m-1}}{(m-1)!}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

бәрабәрсизликләри өдәнир. Үмуми һәдди $L \frac{(Kh)^{m-1}}{(m-1)!}$ олан әдәди сыра јығылдығындан, Вејерштрасс әламәтинә көрә, (4) вектор-сырасы Π-дә мүнтәзәм јығылыр вә демәли, $\{\varphi^m(t, \mu)\}$ вектор-функсијалар ардычыллығы да мүнтәзәм јығылыр. Ардычыллығын елементләри кәсилмәз олдуғундан, $\varphi(t, \mu)$ лимит вектор-функсијасы да Π-дә кәсилмәз олар.

IV фәслин 7-чи параграфындакы мүһакимәләри тәкрар етмәклә көстәрмәк олар ки, $x = \varphi(t, \mu)$ вектор-функсијасы (1) системинин (2) башланғыч шәртини өдәјән јеканә һәллидир. Теорем исбат олунду.

Лемма 1. *Тутаг ки, $g(y, u)$ функсијасы гапалы, мәһдуд $Q = \{|y| \leqslant a, |u| \leqslant b\}$ дүзбучаглысында кәсилмәздир. Онда ихтијари $(y, u) \in Q$, $(y, v) \in Q$ үчүн*

$$|g(y, u) - g(y, v)| \leqslant \omega(|u - v|)$$

бәрабәрсизлијини өдәјән мүсбәт, монотон артан вә z сыфра јахынлашдыгда сыфра јахынлашан $\omega(z)$ функсијасы вардыр.

Исбаты. $g(y, u)$ функсијасы гапалы, мәһдуд Q дүзбучаглысында кәсилмәз олдуғундан, мүнтәзәм кәсилмәздир.

$$\sup_{|\mu-\eta| \leqslant |u-v|} \sup_{|y| \leqslant a} |g(y, \mu) - g(y, \eta)| = \omega(|u - v|)$$

ишарә едәк. Ајдындыр ки, $\omega(z)$ монотон артан функсијадыр вә $\lim\limits_{z \to +0} \omega(z) = 0$. Дикәр тәрәфдән

$$|g(y, u) - g(y, v)| \leqslant \sup_{|\mu-\eta| \leqslant |u-v|} \sup_{|y| \leqslant a} |g(y, \mu) - g(y, \eta)|$$

олдуғундан, лемма исбат олунду.

Теорем 2 (Гејри-локал теорем). *Тутаг ки, $f(t, x, \mu)$ вектор-функсијасынын $f_i(t, x, \mu)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ компонентләри G областында кәсилмәздирләр вә $x_1, \ldots, x_n$ аргументләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјирләр. Әкәр $x = \varphi(t, \mu^0)$ вектор-функсијасы (1), (2) мәсәләсинин $[\alpha, \beta]$ парчасында тә'јин олунмуш һәлли исә, елә $\rho > 0$ әдәди вар ки, $\|\mu - \mu^0\| \leqslant \rho$ шәртини өдәјән μ параметрләри үчүн $x = \varphi(t, \mu)$ һәлләри дә $[\alpha, \beta]$ парчасында тә'јин олунублар. Бу һәлләр гапалы $Q = \{\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \|\mu - \mu^0\| \leqslant \rho\}$ областында кәсилмәздирләр.*

Исбаты. $x = \varphi(t, \mu^0)$ һәлли $[\alpha, \beta]$ парчасында тә'јин олундуғундан, $t \in [\alpha, \beta]$ үчүн $(t, \varphi(t, \mu^0), \mu^0) \in G$. Она көрә елә мүсбәт p, q әдәдләри тапмаг олар ки, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\|x - \varphi(t, \mu^0)\| \leqslant p$, $\|\mu - \mu^0\| \leqslant q$ шәртләрини өдәјән (t, x, μ) нөгтәләри чохлуғу тамамилә G областынын дахилиндә јерләшәр. Белә (t, x, μ) нөгтәләринин чохлуғуну R_1 илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, R_1 мәһдуд вә гапалы областдыр. Шәртә көрә $f(t, x, \mu)$ вектор-функсијасы R_1-дә мүнтәзәм кәсилмәз олдуғундан, леммаја әсасән, $(t, x, \mu) \in R_1$, $(t, x, \mu^0) \in R_1$ үчүн

$$\|f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu^0)\| \leqslant \omega(\|\mu - \mu^0\|) \qquad (5)$$

бәрабәрсизлији өдәнир, бурада $\omega(z)$ монотон артан вә z сыфра јахынлашдыгда сыфра јахынлашан функсијадыр.

$\|\mu - \mu^0\| \leqslant q$ шәртини өдәјән μ көтүрәрәк (1), (2) мәсәләсинин она ујғун олан вә мүәјјән $[\alpha_1, \beta_1]$ парчасында тә'јин олунмуш һәллини $x = \varphi(t, \mu)$ илә ишарә едәк. Тутаг ки, $\alpha \leqslant \alpha_1 < t_0 < \beta_1 \leqslant \beta$ вә $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ үчүн $(t, \varphi(t, \mu), \mu) \in R_1$.

Шәртә көрә $x = \varphi(t, \mu)$, $x = \varphi(t, \mu^0)$ вектор-функсијалары (1), (2) мәсәләсинин μ вә μ^0-а ујғун һәлләри олдуғундан, $t \in [\alpha_1, \beta_1]$ үчүн

$$\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^0) = \int_{t_0}^{t} [f(s, \varphi(s, \mu), \mu) - f(s, \varphi(s, \mu^0), \mu^0)]\, ds.$$

Бу ејниликдән $t \in [t_0, \beta_1]$ үчүн (3) вә (5) шәртләринә әсасән

$$\|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^0)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} [K \|\varphi(s, \mu) - \varphi(s, \mu^0)\| +$$
$$+ \omega(\|\mu - \mu^0\|)]\, ds, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \beta_1 \qquad (6)$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Бурада

$$u(t) = \|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^0)\|$$

ишарә етсәк, алынан бәрабәрсизлији

$$u(t) \leqslant \omega(\|\mu - \mu^0\|)(t - t_0) + K \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds, \ t_0 \leqslant t \leqslant \beta_1$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу бәрабәрсизлијә Гроноулл леммасыны тәтбиг етсәк,

$$u(t) \leqslant c\omega(\|\mu - \mu^0\|), \ c = \frac{1}{K}\left(e^{K(\beta_1 - \alpha_1)} - 1\right)$$

бәрабәрсизлијини, јә'ни $t_0 \leqslant t \leqslant \beta_1$ олдугда

$$\|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\mu^0)\| \leqslant c\omega(\|\mu-\mu^0\|) \qquad (7)$$

бәрабәрсизлијини аларыг.

Ујғун гајда илә (7) бәрабәрсизлијинин $[\alpha_1, t_0]$ парчасында да доғрулуғуну көстәрмәк олар.

Тутаг ки, ρ әдәди

$$\rho \leqslant q, \quad c\omega(\rho) < p$$

бәрабәрсизликләрини өдәјән мүсбәт әдәддир, μ^1 исә μ параметринин

$$\|\mu^1-\mu^0\|\leqslant\rho \qquad (8)$$

шәртини өдәјән гејд олунмуш гијмәтидир.

Көстәрәк ки, (1), (2) мәсәләсинин $\mu=\mu^1$ гијмәтинә ујғун олан $x=\varphi(t,\mu^1)$ һәлли $[\alpha,\beta]$ парчасында тә'јин олунуб вә $t\in[\alpha,\beta]$ үчүн $(t, \varphi(t,\mu^1), \mu^1)\in R_1$.

Әксини фәрз едәк, тутаг ки, $x=\varphi(t,\mu^1)$ һәллини, графики R_1-дә јерләшмәклә ән чоху (δ,γ) интервалына давам етдирмәк олар, белә ки, $\alpha\leqslant\delta$, $\gamma\leqslant\beta$ бәрабәрсизликләриндән һеч олмаса бири өдәнир. Көстәрәк ки, $\gamma>\beta$ олмалыдыр. (Ујғун гајда илә $\delta<\alpha$ бәрабәрсизлијинин өдәндијини көстәрмәк олар.)

$$E=\{\alpha\leqslant t\leqslant\beta;\ \|x-\varphi(t,\mu^0)\|\leqslant p;\ \mu=\mu^1\}$$

чохлуғуна бахаг. Ајдындыр ки, E чохлуғу гапалы мәһдуд чохлугдур вә $E\subseteq R_1$.

Тутаг ки, $\gamma\leqslant\beta$. Онда һәллин давамы һаггында теоремә әсасән (II фәсил § 4), t аргументи γ-ја јахынлашдыгда $(t, \varphi(t,\mu^1), \mu^1)$, нөгтәси E чохлуғундан кәнара чыхар. Бу исә t аргументи γ-ја јахынлашаркән

$$\|\varphi(t,\mu^1)-\varphi(t,\mu^0)\|\leqslant p \qquad (9)$$

бәрабәрсизлији позулдугда мүмкүндүр. Бу бәрабәрсизлијин позулмасы о демәкдир ки, елә $\beta'<\beta$ әдәди вар ки, $t_0<t<\beta'$ олдугда

$$\|\varphi(t,\mu^1)-\varphi(t,\mu^0)\|<p,$$

$t=\beta'$ олдугда исә

$$\|\varphi(\beta',\mu^1)-\varphi(\beta',\mu^0)\|=p. \qquad (10)$$

Дикәр тәрәфдән, $\|\mu^1-\mu^0\|\leqslant\rho$, $t_0\leqslant t\leqslant\gamma\leqslant\beta$ олдугда $\varphi(t,\mu^1)-\varphi(t,\mu^0)$ фәрги үчүн (7) бәрабәрсизлији доғру олдуғундан, (10) бәрабәрлији ρ әдәдинин сечилмәсинә зиддир. Ја'ни $\gamma>\beta$ олмалыдыр вә демәли, $x=\varphi(t,\mu^1)$ һәлли $[\alpha,\beta]$ парчасында тә'јин олунуб.

μ^1 вектору μ параметринин (8) бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари гијмәти олдуғундан, $\|\mu-\mu^0\|\leqslant\rho$ шәртини өдәјән μ-ләр үчүн $x=\varphi(t,\mu)$ һәлләри $[\alpha,\beta]$ иарчасында тә'јин олунублар. Бу һәлләрин гапалы $\Pi_1=\{\alpha\leqslant t\leqslant\beta,\ \|\mu-\mu^0\|\leqslant\rho\}$

областында аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәз олмасы 1-чи теоремдән алыныр.

Мисал 1. $\dot x=\frac{x}{t}+\mu t^2$ тәнлијинин $x(1)=1$ шәртини өдәјән вә $\mu=0$, $\mu=0{,}01$ гијмәтләринә ујғун олан һәлләринин фәргини $t\in[1,2]$ үчүн гијмәтләндирәк. Тәнлијин $\mu=0$-а ујғун һәлли $\varphi(t,0)=t$, $\mu=0{,}01$-ә ујғун һәлл исә $\varphi(t,0{,}01)=\frac{t}{200}(t^2+199)$. Онда

$$|\varphi(t,0{,}01)-\varphi(t,0)|=t\left(\frac{1}{200}(t^2+199)-1\right)\leqslant 2\cdot\frac{3}{200}=0{,}03.$$

§ 2. ҺӘЛЛИН ПАРАМЕТРЛӘРӘ НӘЗӘРӘН ДИФЕРЕНСИАЛЛАНМАСЫ

Һәллин параметрләрә нәзәрән диференсиалланмасы мәсәләсини өјрәнмәк үчүн әввәлчә ашағыдакы леммамы исбат едәк.

Лемма 2 (Адамар). *Тутаг ки, $g(u,v)=g(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)$ функсијасы $v_1, v_2,\dots,v_q$ дәјишәнләринә нәзәрән габарыг олан $(p+q)$-өлчүлү Ω областында кәсилмәздир вә кәсилмәз $\frac{\partial g}{\partial v_1},\frac{\partial g}{\partial v_2},\dots,\frac{\partial g}{\partial v_q}$ хүсуси төрәмәләри вар. Онда Ω областындан көтүрүлмүш истәнилән ики (u,v^1), (u,v^2) нөгтәләри үчүн*

$$g(u,v^2)-g(u,v^1)=\sum_{j=1}^{q} h_j(u,v^1,v^2)\left(v_j^2-v_j^1\right) \qquad (11)$$

бәрабәрлији доғрудур. Бурада $h_j(u,v^1,v^2)$, $j=1,2,\dots,q$ функсијалары Ω областына дахил олан (u,v^1), (u,v^2) нөгтәләри үчүн u, v^1, v^2 аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәздир.

Исбаты. Ихтијари ики (u,v^1), $(u,v^2)\in\Omega$ нөгтәләри көтүрүб, $\omega(s)=v^1+s(v^2-v^1)$, $0\leqslant s\leqslant1$ ишарә едәк. Ω областы v-јә нәзәрән габарыг олдуғундан, $(u,\omega(s))\in\Omega$, $0\leqslant s\leqslant1$. Онда

$$g(u,v^2)-g(u,v^1)=g(u,\omega(1))-g(u,\omega(0))=$$
$$=\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}g(u,\omega(s))\,ds.$$

олар.

$$\frac{\partial}{\partial s}g(u,\omega(s))=\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial g(u,\omega(s))}{\partial\omega_j}\;\frac{d\omega_j(s)}{ds}=$$

Ајдындыр ки, (14) системинин (15) башланғыч шәртләрини өдәјән вә Q-дә аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәз олан јеканә $z=\widetilde{\psi}(t, \mu, \delta)=(\widetilde{\psi}_1(t, \mu, \delta), \widetilde{\psi}_2(t, \mu, \delta), \ldots, \widetilde{\psi}_n(t, \mu, \delta))$ һәлли вар. Һәллин јеканәлијинә әсасән алырыг ки,

$$\widetilde{\psi}_i(t, \mu, \delta)=\psi_i(t, \mu, \delta), \ t\in[t_0-h, t_0+h], \quad i=1, 2, \ldots, n \quad (16)$$

олмалыдыр. Бу ејниликләрин сол тәрәфи $\delta_\kappa=0$ олдугда да, сағ тәрәфи исә $\delta_\kappa\neq 0$ олдугда тә'јин олунмушдур. Бурадан алырыг ки,

$$\lim_{\delta_\kappa\to 0}\psi_i(t, \mu, \delta)=\lim_{\delta_\kappa\to 0}\widetilde{\psi}_i(t, \mu, \delta)=\widetilde{\psi}_i(t, \mu, 0), \ i=1, 2, \ldots, n$$

сонлу лимити вар. Онда (12) мүнасибәтләринә әсасән

$$\lim_{\delta_\kappa\to 0}\psi_i(t, \mu, \delta)=\frac{\partial\varphi_i(t, \mu)}{\partial\mu_\kappa}=\widetilde{\psi}_i(t, \mu, 0), \ i=1, 2, \ldots, n, \quad (17)$$

Бурадан да, $\frac{\partial\varphi_i(t, \mu)}{\partial\mu_\kappa}$, $i=1, 2, \ldots, n$ төрәмәләринин варлығы вә аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәзлији алыныр. Дикәр тәрәфдән, $\widetilde{\psi}(t, \mu, 0)=(\widetilde{\psi}_1(t, \mu, 0), \widetilde{\psi}_2(t, \mu, 0), \ldots, \widetilde{\psi}_n(t, \mu, 0))$ вектор-функсијасы $\lambda=\mu$ олдугда (јә'ни $\delta_\kappa=0$ олдугда) (14) системинин һәлли олдуғундан, (17) мүнасибәтинә әсасән алырыг ки,

$$\frac{\partial\varphi(t, \mu)}{\partial\mu_\kappa}=\left(\frac{\partial\varphi_1(t, \mu)}{\partial\mu_\kappa}, \frac{\partial\varphi_2(t, \mu)}{\partial\mu_\kappa}, \ldots, \frac{\partial\varphi_n(t, \mu)}{\partial\mu_\kappa}\right)$$ вектор-функсијасы һәмин системин һәллидир. Бурадан да, $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi_i(t, \mu)}{\partial\mu_\kappa}\right)$ гарышыг төрәмәләринин варлығы вә кәсилмәзлији алыныр. $x=\varphi(t, \mu)$ вектор-функсијасы (1) системинин һәлли олдуғундан,

$$\frac{\partial\varphi_i(t, \mu)}{\partial t}=f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu), \ i=1, 2, \ldots, n$$

ејниликләри өдәнир вә бу ејниликләрин сағ тәрәфләринин $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ дәјишәнләринә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Она көрә сол тәрәфләринин дә $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ дәјишәнләринә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар вә

$$\frac{\partial}{\partial\mu_\kappa}\left(\frac{\partial\varphi_i(t, \mu)}{\partial t}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_j(t, \mu)}{\partial\mu_\kappa}+\frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial\mu_\kappa},$$
$$i=1, 2, \ldots, n; \quad \kappa=1, 2, \ldots, l. \quad (18)$$

Беләликлә, $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi_i(t, \mu)}{\partial\mu_\kappa}\right)$, $\frac{\partial}{\partial\mu_\kappa}\left(\frac{\partial\varphi_i(t, \mu)}{\partial t}\right)$ төрәмәләринин һәр икиси вар вә кәсилмәздирләр. Онда Шварс теореминә әсасән алырыг ки, бу гарышыг төрәмәләр бәрабәрдир. Теорем исбат олунду.

Теоремдән ајдындыр ки, (18) ејниликләрини

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi_i(t, \mu)}{\partial\mu_\kappa}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_j(t, \mu)}{\partial\mu_\kappa}+$$
$$+\frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial\mu_\kappa} \quad (19)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу исә көстәрир ки,

$$z_{i\kappa}=\frac{\partial\varphi_i(t, \mu)}{\partial\mu_\kappa}, \quad i=1, 2, \ldots, n, \ \kappa=1, 2, \ldots, l \quad (20)$$

функсијалары

$$\dot z_{i\kappa}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial x_j}z_{j\kappa}+\frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial\mu_\kappa}, i=1, 2, \ldots, n, \quad (21)$$
$$\kappa=1, 2, \ldots, l$$

хәтти системинин

$$z_{i\kappa}(t_0)=0, \ i=1, 2, \ldots, n; \quad \kappa=1, 2, \ldots, l \quad (22)$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәлли олур.

(21) системинә (1) системинин параметрләрә нәзәрән *вариасијаларла системи* дејилир. Ајдындыр ки,

$$f_x(t, \mu)=\left(\frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu), \mu)}{\partial x_j}\right), \ f_\mu(t, \mu)=\left(\frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \mu))}{\partial\mu_\kappa}\right), Z=(z_{i\kappa})$$

ишарәләринин көмәји илә (21) системини

$$\dot Z=f_x(t, \mu)Z+f_\mu(t, \mu) \quad (23)$$

матрис-систем шәклиндә, (22) башланғыч шәртләрини исә

$$Z(t_0)=0 \quad (24)$$

шәклиндә јазмаг олар; бурада Z илә $n\times l$-өлчүлү матрис-функсија ишарә едилмишдир.

Нәтиҹә. *Тутаг ки, $f(t, x, \mu)$ вектор-функсијасынын $f_i(t, x, \mu)$, $i=1, 2, \ldots, n$ компонентләри G областында кәсилмәздир вә $x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ аргументләринә нәзәрән m тәртибә гәдәр (m дә дахил олмагла) кәсилмәз төрәмәләри вар. Онда (1), (2) мәсәләсинин $x=\varphi(t, \mu)$ һәллинин $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ параметрләринә нәзәрән m тәртибә гәдәр (m дә дахил олмагла) кәсилмәз төрәмәләри вар.*

Исбаты. Нәтиҹәнин доғрулуғуну ријази индуксија үсулу илә исбат едәк. $m=1$ олдугда нәтиҹәнин доғрулуғу ајдындыр. $m=r$ үчүн онун доғрулуғуну гәбул едәрәк $m=r+1$ үчүн доғрулуғуну көстәрәк.

Теоремә әсасән, $Z=\left(\frac{\partial\varphi_i(t,\mu)}{\partial\mu_k}\right)$ матрис-функсиʲасы (23) матрис системинин (24) башланғыч шәртини өдәʲән һәллидир.

Аʲдындыр ки, гоʲулан шәртләрә әсасән, $f_x(t,\mu)Z+f_\mu(t,\mu)$ матрис-функсиʲасынын елементләринин z_{ik}, μ_k, $i=1,2,\ldots,n$; $k=1,2,\ldots,l$ аргументләринә нәзәрән r тәртиб кәсилмәз төрәмәләри вар. Онда (23), (24) мәсәләсинин $Z=\Phi(t,\mu)$ матрис-һәллинин $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_l$ аргументләринә нәзәрән r тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри вар. Бу исә о демәкдир ки, (1), (2) мәсәләсинин $x=\varphi(t,\mu)$ һәллинин $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_l$ аргументләринә нәзәрән $r+1$ тәртибә гәдәр кәсилмәз **төрәмәләри** вар.

Һәллин параметрләрә нәзәрән кәсилмәзлиʲи һаггында 2-чи теоремдән истифадә едәрәк, 3-чү теоремдәки мүһакимәләри тәкрар етмәклә ашағыдакы теореми исбат етмәк олар.

Теорем 4 *(Гејри-локал теорем). Тутаг ки, $f(t,x,\mu)$ вектор-функсиjасы 3-чү теоремин шәртләрини өдәjир, $(t_0, x^0, \mu^0)\in G$ вә $x=\varphi(t,\mu^0)$ вектор-функсиjасы (1), (2) мәсәлә үчүн $[\alpha,\beta]$ парчасында тә'јин олунмуш һәллидир. Онда елә $\rho>0$ әдәди тапмаг олар ки, $\|\mu-\mu^0\|<\rho$ шәртини өдәјән μ параметрләри үчүн $x=\varphi(t,\mu)$ һәлләри дә $[\alpha,\beta]$ парчасында тә'јин олунублар, $Q=\{\alpha\leqslant t\leqslant\beta, \|\mu-\mu^0\|<\rho\}$ чохлуғунда кәсилмәз $\frac{\partial\varphi_i(t,\mu)}{\partial\mu_k}$, $i=1,2,\ldots,n$; $k=1,2,\ldots,l$ хүсуси төрәмәләри вә $\frac{\partial^2\varphi_i(t,\mu)}{\partial t\,\partial\mu_k}$, кәсилмәз гарышыг төрәмәләри вар, белә ки, бу гарышыг төрәмәләр диференсиаллама нөвбәсиндән асылы дејил.*

Геʲд едәк ки, $Z=\left(\frac{\partial\varphi_i(t,\mu)}{\partial\mu_k}\right)$ матрис-функсиʲасы $[\alpha,\beta]$ парчасында (23) вариасиʲаларла системинин (24) башланғыч шәртини өдәʲән һәлли олур.

Нәтичә. *(1), (2) мәсәләсинин $x=\varphi(t,\mu^0)$ һәлли мә'лум олдуғда, $x=\varphi(t,\mu)$ һәллинин $\frac{\partial\varphi_i(t,\mu)}{\partial\mu_k}$, $i=1,2,\ldots,n$; $k=1,2,\ldots,l$* төрәмәләринин $\mu=\mu^0$ *нөгтәсиндә гиjмәтини һесабламаг үчүн*

$$\dot Z=f_x(t,\mu^0)Z+f_\mu(t,\mu^0) \tag{25}$$

матрис системинин

$$Z(t_0)=0 \tag{26}$$

башланғыч шәртини өдәjән һәллини тапмаг кифаjәтдир. Бу мәсәләнин һәлли $Z(t)=(z_{ik}(t))$ оларса, $\left.\frac{\partial\varphi_i(t,\mu)}{\partial\mu_k}\right|_{\mu=\mu^0}=z_{ik}(t)$ олур.

Мисал 2.

$$\begin{cases}\dot x_1=x_1+2x_2+\mu(x_2-x_1),\\ \dot x_2=4x_1-x_2+\mu^2x_1x_2\end{cases}$$

системинин $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$ шәртини өдәjән $x_1=\varphi_1(t,\mu)$, $x_2=\varphi_2(t,\mu)$ һәллинин $\frac{\partial\varphi_1(t,\mu)}{\partial\mu}$, $\frac{\partial\varphi_2(t,\mu)}{\partial\mu}$ төрәмәләринин $\mu=0$ нөгтәсиндәки гиjмәтләрини тапаг. Асанлыгла јохламаг олар ки, $\mu=0$ олдугда алынан

$$\begin{cases}\dot x_1=x_1+2x_2,\\ \dot x_2=4x_1-x_2\end{cases}$$

системинин $x_1(0)=0$, $x_2(0)=1$ шәртини өдәjән һәлли

$$x_1=\frac{1}{3}(e^{3t}-e^{-3t}),\quad x_2=\frac{1}{3}(e^{3t}+2e^{-3t}).$$

Бахылан систем үчүн

$$f_x(t,0)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix},\quad f_\mu(t,0)=\begin{pmatrix}e^{-3t}\\ 0\end{pmatrix}$$

олдуғундан, (25), (26) мәсәләси

$$\begin{cases}\dot z_1=z_1+2z_2+e^{-3t}, & z_1(0)=0,\\ \dot z_2=4z_1-z_2, & z_2(0)=0\end{cases}$$

шәклиндәдир. Бу мәсәләнин һәлли

$$z_1=\frac{1}{9}e^{3t}+\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{3}\right)e^{-3t},\quad z_2=\frac{1}{9}e^{3t}-\frac{1}{3}\left(2t+\frac{1}{3}\right)e^{-3t}$$

олдуғундан, нәтичәjә әсасән

$$\left.\frac{\partial\varphi_1(t,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}=\frac{1}{9}e^{3t}+\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{3}\right)e^{-3t},$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_2(t,\mu)}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}=\frac{1}{9}e^{3t}-\frac{1}{3}\left(2t+\frac{1}{3}\right)e^{-3t}.$$

§ 3. ҺӘЛЛИН БАШЛАНҒЫЧ ГИЈМӘТЛӘРДӘН АСЫЛЫЛЫҒЫ. ҮМУМИ ИНТЕГРАЛЫН ВАРЛЫҒЫ

Тутаг ки,

$$\dot x=f(t,x) \tag{27}$$

нормал системи верилмишдир; бурада $f(t,x)$ вектор-функсиjасынын $f_i(t,x)$, $i=1,2,\ldots,n$ компонентләри t, x_1, $x_2,\ldots,x_n$ дәjишәнләри фәзасынын мүәjјән D областында кәсилмәздир вә $x_1,x_2,\ldots,x_n$ аргументләринә нәзәрән

кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Бу системин $x(t_0)=x^0$ башланғыч шәртини өдәјән һәллинин t_0, x^0 башланғыч гијмәтләриндән асылылығы мәсәләсини өјрәнәк. Одур ки, t_0, x^0 кәмијјәтләринин дәјишән олмасыны гејд етмәк үчүн онлары ујғун олараг τ, ξ илә, (27) системинин

$$x(\tau)=\xi \qquad (28)$$

шәртини өдәјән һәллини исә $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ илә ишарә едәк. Һәллин давамы һаггында теоремә әсасән (IV фәсил, § 8) һәр бир $(\tau,\xi)\in D$ үчүн елә ән бөјүк (α,β) интервалы вар ки, бу һәлл t-јә нәзәрән һәмин интервалда тә'јин олунуб вә даваметдирилмәјәндир. Ајдындыр ки, һәллин тә'јин олундуғу интервал τ, ξ башланғыч гијмәтләриндән асылыдыр, јә'ни $\alpha=\alpha(\tau,\xi)$, $\beta=\beta(\tau,\xi)$.

Беләликлә, $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ функсијасы $(\tau,\xi)\in D$ вә $\alpha(\tau,\xi)<t<\beta(\tau,\xi)$ шәртләрини өдәјән (t,τ,ξ) нөгтәләри чохлуғунда тә'јин олунмушдур. Бу чохлуғу Γ илә ишарә едәк.

Системдә

$$t=\tau+s,\quad x=\xi+y \qquad (29)$$

әвәзләмәси апараг; бурада s јени сәрбәст дәјишән, y исә јени ахтарылан вектор-функсијадыр. Онда y-ә нәзәрән

$$\frac{dy}{ds}=f(\tau+s,\ \xi+y) \qquad (30)$$

системини аларыг.

Бу системдә $g(s,y,\tau,\xi)=f(\tau+s,\ \xi+y)$ ишарә етсәк ону

$$\frac{dy}{ds}=g(s,y,\tau,\xi) \qquad (31)$$

шәклиндә јаза биләрик. $f(t,x)$ вектор-функсијасы D областында тә'јин олундуғундан, $g(s,y,\tau,\xi)$ вектор-функсијасы $(\tau+s,\ \xi+y)\in D$ шәртини өдәјән (s,y,τ,ξ) нөгтәләри чохлуғунда тә'јин олунмушдур. Белә (s,y,τ,ξ) нөгтәләри чохлуғуну D^* илә ишарә едәк. Бу һалда илә тә'јин олунан D^* чохлуғу $s, y_1,\dots,y_n, \tau, \xi_1,\dots,\xi_n$ дәјишәнләри фәзасында област тәшкил едир.

Тә'јин олунма гајдасындан ајдындыр ки, $g(s,y,\tau,\xi)$ вектор-функсијасынын $g_i(s,y,\tau,\xi)$, $i=1,2,\dots,n$ компонентләри D^* областында кәсилмәздир вә $y_1,y_2,\dots,y_n,\xi_1,\dots,\xi_n$ дәјишәнләринә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Дикәр тәрәфдән, (20) әвәзләмәләриндән ајдындыр ки,

$$y=\varphi(s+\tau,\tau,\xi)-\xi$$

вектор-функсијасы (31) системинин

$$y(0)=0 \qquad (32)$$

башланғыч шәртини өдәјән һәлли олур вә бу һәлл һәр бир $(\tau,\xi)\in D$ үчүн $\alpha(\tau,\xi)-\tau<s<\beta(\tau,\xi)-\tau$ интервалында тә'-

јин олунмушдур. Белә (s,τ,ξ) нөгтәләри чохлуғуну $\tilde{\Gamma}$ илә ишарә едәк.

Ајдындыр ки, (31) тәнлијинин (32) башланғыч шәртини өдәјән вә даваметдирилмәјән һәллини $y=\psi(s,\tau,\xi)$ илә ишарә етсәк, бу һәлл $\tilde{\Gamma}$ областында тә'јин олунмушдур. Һәллин јеканәлијинә әсасән, $\tilde{\Gamma}$ областында

$$\psi(s,\tau,\xi)=\varphi(s+\tau,\tau,\xi)-\xi \qquad (33)$$

олар. Дикәр тәрәфдән,

$$t=s+\tau,\quad \tau=\tau,\quad \xi=\xi$$

чевирмәси $\tilde{\Gamma}$ областы илә Γ областы арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг јаратдығындан, (33) бәрабәрлијиндән аларыг ки, Γ областында

$$\varphi(t,\tau,\xi)=\xi+\psi(t-\tau,\tau,\xi) \qquad (34)$$

мүнасибәти өдәнир. Бу көстәрир ки, (27) системинин (28) башланғыч шәртини өдәјән һәллинин τ, ξ башланғыч гијмәтләриндән асылылығы мәсәләси, (29) әвәзләмәләри васитәсилә (31) системинин гејд олунмуш (32) башланғыч шәртини өдәјән һәллинин τ, ξ параметрләриндән асылылығы мәсәләсинә кәтирилир.

Теорем 5. *Тутаг ки, $f(t,x)$ вектор-функсијасынын $f_i(t,x)$, $i=1,2,\dots,n$ компонентләри D областында кәсилмәздир вә $x_1,x_2,\dots,x_n$ аргументләринә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Онда (27), (28) мәсәләсинин $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ һәллинин Γ областында аргументләринә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Бундан башга, $\frac{\partial^2\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial t\,\partial\tau}$, $\frac{\partial^2\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial t\,\partial\xi_k}$ гарышыг төрәмәләри кәсилмәздир вә диференсиаллама нөвбәсиндән асылы дејил.*

Исбаты. Һәллин параметрләрә нәзәрән кәсилмәзлији вә диференсиалламасы һаггында теоремләри (31), (32) мәсәләсинә тәтбиг едиб (34) мүнасибәтини дә нәзәрә алсаг, ајдындыр ки, $x=\varphi(t,\tau,\xi)$ һәлли Γ областында кәсилмәздир, кәсилмәз $\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_k}$, $i,k=1,2,\dots,n$ хүсуси төрәмәләри вар. Бундан башга, $\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial t\,\partial\xi_k}$ гарышыг төрәмәләри кәсилмәздир вә диференсиаллама нөвбәсиндән асылы дејил.

Көстәрәк ки, $\varphi_i(t,\tau,\xi)$, $i=1,2,\dots,n$ функсијаларынын Γ областында кәсилмәз $\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}$ хүсуси төрәмәләри вар.

Тутаг ки, $x=\varphi(t, \tau, \xi)$ вә $x=\varphi(t, \bar{\tau}, \xi)$ вектор-функсиjалары (27) системинин ујғун олараг $x(\tau)=\xi$ вә $x(\bar{\tau})=\xi$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәлләридир. Онда

$$\varphi(t, \tau, \xi)=\xi+\int_{\tau}^{t} f(s, \varphi(s, \tau, \xi))ds,$$

$$\varphi(t, \bar{\tau}, \xi)=\xi+\int_{\bar{\tau}}^{t} f(s, \varphi(s, \bar{\tau}, \xi))ds$$

еjниликләри өдәнир.

Бу һәлләрин көмәјн илә

$$V_i(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)=\frac{\varphi_i(t, \bar{\tau}, \xi)-\varphi_i(t, \tau, \xi)}{\bar{\tau}-\tau}, \quad \bar{\tau}\neq\tau \tag{35}$$

функсиjаларыны дүзәлтсәк, јухарыдакы еjниликләрә әсасән алырыг ки,

$$V_i(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)=\frac{1}{\bar{\tau}-\tau}\int_{\bar{\tau}}^{t}[f_i(s, \varphi(s, \bar{\tau}, \xi))-$$

$$-f_i(s, \varphi(s, \tau, \xi))]ds-\frac{1}{\bar{\tau}-\tau}\int_{\tau}^{\bar{\tau}} f_i(s, \varphi(s, \tau, \xi))ds.$$

Бурадан, $f_i(s, \varphi(s, \bar{\tau}, \xi))-f_i(s, \varphi(s, \tau, \xi))$ фәргинә Адамар леммасыны тәтбиг етсәк,

$$V_i(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)=\int_{\bar{\tau}}^{t}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(s, \varphi(s, \bar{\tau}, \xi), \varphi(s, \tau, \xi))\times$$

$$\times V_j(s, \tau, \bar{\tau}, \xi)ds-\frac{1}{\bar{\tau}-\tau}\int_{\tau}^{\bar{\tau}} f_i(s, \varphi(s, \tau, \xi))ds.$$

Садәлик үчүн

$$\widetilde{h}_{ij}(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)=h_{ij}(t, \varphi(t, \bar{\tau}, \xi), \varphi(t, \tau, \xi)),$$

$$h_i(\tau, \bar{\tau}, \xi)=-\frac{1}{\bar{\tau}-\tau}\int_{\tau}^{\bar{\tau}} f_i(s, \varphi(s, \tau, \xi))ds$$

ишарә едәк. $\widetilde{h}_{ij}(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)$ функсиjалары $t, \tau, \bar{\tau}, \xi$ дәјишәнләринин елә гиjмәтләриндә тә'јин олунмушдур ки, бу гиjмәтләр үчүн $(t, \tau, \xi)\in\Gamma$, $(t, \bar{\tau}, \xi)\in\Gamma$. Белә $(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)$ нөгтәләри чохлуғуну R^* илә ишарә едәк. Адамар леммасына әсасән,

$h_{ij}(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)$ функсиjалары R^* областында кәсилмәздир. Ифадәләриндән аjдындыр ки, $h_i(\tau, \bar{\tau}, \xi)$ функсиjалары $\tau\neq\bar{\tau}$ олдугда R^* областында кәсилмәздир. Лопитал гаjдасына әсасән

$$\lim_{\bar{\tau}\to\tau} h_i(\tau, \bar{\tau}, \xi)=-f_i(\tau, \varphi(\tau, \tau, \xi))=-f_i(\tau, \xi)$$

олдуғундан

$$\widehat{h}_i(\tau, \bar{\tau}, \xi)=\begin{cases} h_i(\tau, \bar{\tau}, \xi), & \tau\neq\bar{\tau} \text{ оларса,} \\ -f_i(\tau, \xi), & \tau=\bar{\tau} \text{ оларса} \end{cases}$$

функсиjалары R^*-да кәсилмәз олар.

Беләликлә, $V(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)=(V_1(t, \tau, \bar{\tau}, \xi), \dots, V_n(t, \tau, \bar{\tau}, \xi))$ вектор-функсиjасы, әмсаллары вә сәрбәст һәдләри R^* областында кәсилмәз олан хәтти

$$U_i(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)=\sum_{j=1}^{n}\int_{\bar{\tau}}^{t}\widetilde{h}_{ij}(s, \tau, \bar{\tau}, \xi)U_j(s, \tau, \bar{\tau}, \xi)ds+\widehat{h}_i(\tau, \bar{\tau}, \xi),$$

$$i=1, 2, \dots, n \tag{36}$$

интеграл тәнликләр системинин һәллидир.

Һәллин параметрләрә нәзәрән кәсилмәзлиjи һаггында теоремин исбат гаjдасы илә көстәрмәк олар ки, (36) системинин R^* областында јеканә $\widetilde{V}(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)=(\widetilde{V}_1(t, \tau, \bar{\tau}, \xi), \dots, \widetilde{V}_n(t, \tau, \bar{\tau}, \xi))$ кәсилмәз һәлли вар. Һәллин јеканәлиjинә әсасән

$$\widetilde{V}_i(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)=V_i(t, \tau, \bar{\tau}, \xi), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Бу еjниликләрдән аjдындыр ки,

$$\lim_{\bar{\tau}\to\tau} V_i(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)=\widetilde{V}_i(t, \tau, \tau, \xi), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Бурадан

$$\lim_{\bar{\tau}\to\tau} V_i(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)=\frac{\partial\varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial\tau}=\widetilde{V}_i(t, \tau, \tau, \xi), i=1, 2, \dots, n. \tag{37}$$

Демәли, $\frac{\partial\varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial\tau}$ хүсуси төрәмәләри вар вә кәсилмәздир.

Дикәр тәрәфдән, $\widetilde{V}_i(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)$ вектор-функсиjасынын (36) интеграл тәнликләр системинин һәлли олмасындан аjдындыр ки, $\frac{\partial\widetilde{V}_i(t, \tau, \bar{\tau}, \xi)}{\partial t}$ кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Онда (37) еjниликләринә әсасән $\frac{\partial^2\varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial t\,\partial\tau}$, $i=1, 2, \dots, n$ кәсилмәз гарышыг төрәмәләри вар.

Теоремин шәртинә вә $\frac{\partial\varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial\tau}$, $i=1, 2, \dots, n$ төрәмәләринин кәсилмәзлиjинә әсасән

$$\frac{\partial \varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial t} = f_i(t, \varphi(t,\tau,\xi)),\ i=1, 2, \dots, n \qquad (38)$$

ejниликләринин сағ тәрәфләринин τ-ја нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләринин варлығындан алыныр ки, $\frac{\partial^2\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\tau\,\partial t}$ гарышыг төрәмәләри вар вә кәсилмәздир. Бурадан Шварс теореминә әсасән, $\frac{\partial^2\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial t\,\partial\tau}$ хүсуси төрәмәләри вар вә диференсиаллама нөвбәсиндән асылы дејил. Теорем исбат олунду.

Теоремин шәртләри дахилиндә (38) ejниликләриндән τ-ја нәзәрән төрәмә алмаг олар. Онда гарышыг төрәмәләрин бәрабәрлијинә әсасән

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(t,\varphi(t,\tau,\xi))}{\partial x_j}\,\frac{\partial\varphi_j(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}, \qquad (39)$$
$$i=1, 2, \dots, n.$$

Дикәр тәрәфдән, (37) бәрабәрликләриндә $t=\tau$ көтүрдүкдә

$$\frac{\partial\varphi_i(\tau,\tau,\xi)}{\partial\tau} = \tilde V_i(\tau,\tau,\tau,\xi) = \tilde h_i(\tau,\tau,\xi) = -f_i(\tau,\xi)$$

олдуғундан, (39) ejниликләри көстәрир ки, компонентләри $u_1 = \frac{\partial\varphi_1(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}$, $u_2 = \frac{\partial\varphi_2(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}$, $\dots$, $u_n = \frac{\partial\varphi_n(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}$ олан $u(t,\tau,\xi)$ вектор-функсијасы хәтти бирчинс

$$\dot u = f_x(t, \varphi(t,\tau,\xi))\,u \qquad (40)$$

системинин

$$u(\tau) = -f(\tau,\xi) \qquad (41)$$

башланғыч шәртини өдәјән һәллидир.

(40) системинә (27) системинин сәрбәст дәјишәнин башланғыч гијмәтинә нәзәрән *вариасијаларла системи* дејилир.

Гарышыг төрәмәләр бәрабәр олдуғундан, (38) ejнилијиндән ξ_k-ја нәзәрән төрәмә алсаг,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_k}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(t,\tau,\xi))}{\partial x_j}\,\frac{\partial\varphi_j(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_k},\ i,\kappa = 1,2,\dots,n. \qquad (42)$$

Башланғыч шәртинә әсасән $\varphi_i(\tau,\tau,\xi) = \xi_i$, $i=1, 2, \dots, n$ олдуғундан

$$\frac{\partial\varphi_i(\tau,\tau,\xi)}{\partial\xi_k} = \delta_{i\kappa},\quad \delta_{i\kappa} = \begin{cases} 1, & i=\kappa \text{ оларса}, \\ 0, & i\neq\kappa \text{ оларса}. \end{cases}$$

Демәли, $\Phi = \left(\frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_\kappa}\right)$ матрис-функсијасы хәтти бирчинс

$$\dot\Phi = f_x(t, \varphi(t,\tau,\xi))\,\Phi \qquad (43)$$

матрис-системинин

$$\Phi(\tau) = E \qquad (44)$$

башланғыч шәртини өдәјән һәллидир; бурада E ваһид матрисдир. (43) системинә (27) системинин ахтарылан функсијаларын башланғыч гијмәтләринә нәзәрән *вариасијаларла системи* дејилир.

Нәтичә. *Тутаг ки, (27) системинин $x(t_0) = x^0$ шәртини өдәјән $x = \varphi(t)$ һәлли мә'лумдур. Онда $x = \varphi(t,\tau,\xi)$ һәллинин*

$$u_i = \frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\tau}\Big|_{(\tau,\xi)=(t_0,x^0)},\quad \Phi_{i\kappa} = \frac{\partial\varphi_i(t,\tau,\xi)}{\partial\xi_\kappa}\Big|_{(\tau,\xi)=(t_0,x^0)},$$
$$i,\kappa = 1, 2, \dots, n$$

төрәмәләри ујғун олараг

$$\dot u_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(t,\varphi(t))}{\partial x_j} u_j,\quad u_i(t_0) = -f_i(t_0, x^0),\ i=1, 2, \dots, n, \qquad (45)$$

$$\dot\Phi_{i\kappa} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(t,\varphi(t))}{\partial x_j}\Phi_{j\kappa},\quad \Phi_{i\kappa}(t_0) = \delta_{i\kappa},\ i,\kappa = 1, 2, \dots, n \qquad (46)$$

мәсәләләринин һәлләри кими тапылыр.

Теорем 6 *(Линделјоф). Тутаг ки, 5-чи теоремин шәртләри өдәнир вә $x_i = \varphi_i(t,\tau,\xi_1,\dots,\xi_n)$, $i=1, 2, \dots, n$ функсијалары Γ областында (27), (28) мәсәләсинин һәллидир. Онда $z = \varphi_i(t,\tau,\xi_1,\dots,\xi_n)$, $i=1, 2, \dots, n$ функсијалары $\tau, \xi_1, \dots, \xi_n$ дәјишәнләринә нәзәрән*

$$\frac{\partial z}{\partial\tau} + \sum_{\kappa=1}^{n} f_\kappa(\tau,\xi_1,\dots,\xi_n)\frac{\partial z}{\partial\xi_\kappa} = 0 \qquad (*)$$

хүсуси төрәмәли тәнлијинин һәлләридир вә

$$\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{D(\xi_1,\dots,\xi_n)} = \exp\left[\int_\tau^t \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\partial f_\kappa(s,\varphi(s,\tau,\xi))}{\partial x_\kappa}\,ds\right] > 0.$$

Исбаты. Теореми исбат етмәк үчүн (42) ejнилијини $f_\kappa(\tau,\xi_1,\dots\xi_n)$-ә вуруб $\kappa = 1, 2, \dots, n$ көтүрәрәк топлајаг вә алынан мүнасибәти (39) ejнилијинин үзәринә кәләк. Бу заман

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{n} f_k(\tau, \xi) \frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \xi_k}\right] =$$

ејнилиј

суси $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \tau, \xi))}{\partial x_j}\left[\frac{\partial \varphi_j(t, \tau, \xi)}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{n} f_k(\tau, \xi) \frac{\partial \varphi_j(t, \tau, \xi)}{\partial \xi_k}\right]$

р

ејнилији алынар. Бурадан

$$\frac{\partial \varphi_i(\tau, \tau, \xi)}{\partial \tau} = -f_i(\tau, \xi), \quad \frac{\partial \varphi_i(\tau, \tau, \xi)}{\partial \xi_k} = \delta_{ik}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$V_i(t, \tau, \xi) = \frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{n} f_k(\tau, \xi) \frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \xi_k}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

функсијалары

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(t, \varphi(t, \tau, \xi))}{\partial x_j} u_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

хәтти бирчинс системинин $u_i(\tau) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ башланғыч шәртини өдәјән һәлли олдуғу алыныр. Һәллин јеканәлијинә әсасән алырыг ки,

$$V_i(t, \tau, \xi) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

јә'ни

$$\frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{n} f_k(\tau, \xi) \frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \xi_k} \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Бу исә теоремин биринчи тәклифинин доғрулуғуну **көстәрир.** Дикәр тәрәфдән, $\Phi = \left(\frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \xi_k}\right)$ матрис-функсијасы (43) системинин (44) шәртини өдәјән һәлли олдуғундан, Остроградски—Лиувилл—Јакоби дүстуруна әсасән

$$\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(\xi_1, \dots, \xi_n)} = \det\left(\frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \xi_k}\right) =$$

$$= \exp\left[\int_{\tau}^{t} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k(s, \varphi(s, \tau, \xi))}{\partial x_k} ds\right] > 0.$$

Теорем исбат олунду.

Инди исә (27) нормал системинин үмуми интегралынын варлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 7. *Тутаг ки, 5-чи теоремин шәртләри өдәнир. Онда (27) системинин n сајда функсионал асылы олмајан диференсиалланан интеграллары вар.*

Исбаты. Тутаг ки,

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, \tau, \xi_1, \dots, \xi_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(t, \tau, \xi_1, \dots, \xi_n) \end{cases} \qquad (**)$$

функсијалар системи (27), (28) мәсәләсинин һәллидир.

Линделјоф теореминә көрә $\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(\xi_1, \dots, \xi_n)} > 0$ олдуғундан, гејри-ашкар функсијаларын варлығы һаггында теоремә әсасән, (**) системи $\xi_1, \dots, \xi_n$ дәјишәнләринә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$\begin{cases} \xi_1 = \psi_1(\tau, t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \xi_n = \psi_n(\tau, t, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Мә'лумдур ки, $\psi_1(\tau, t, x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_n(\tau, t, x_1, \dots, x_n)$ диференсиалланан функсијалар олур.

Дикәр тәрәфдән,

$$\psi_i(\tau, t, \varphi_1(t, \tau, \xi_1, \dots, \xi_n), \dots, \varphi_n(t, \tau, \xi_1, \dots, \xi_n)) \equiv \xi_i,$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$

ејниликләринә әсасән

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_j} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

олдуғундан,

$$\frac{D(\psi_1, \dots, \psi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(\xi_1, \dots, \xi_n)} = 1.$$

Бурадан $\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(\xi_1, \dots, \xi_n)} > 0$ шәртинә көрә алырыг ки, $\frac{D(\psi_1, \dots, \psi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} > 0$. Бу исә көстәрир ки (бах: IV фәсил, теорем 1),

$$\psi_1(\tau, t, x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_n(\tau, t, x_1, \dots, x_n)$$

функсијалар системи һәр бир гејд олунмуш τ үчүн (27) системинин функсионал асылы олмајан диференсиалланан интегралларыдыр.

Мисал 3. $\dot{x} = \sqrt{1 - t^2}\, e^{-x^2}$ тәнлијинин $x(0) = x_0$ вә $x(0) = \bar{x}_0$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәлләринин фәргини $[-1, 1]$ парчасында гијмәтләндирәк.

Тәнлијин верилмиш башланғыч шәртләри өдәјән һәлләрини үјғун олараг $x = \varphi(t, x_0)$ вә $x = \varphi(t, \bar{x}_0)$ илә ишарә едәк. Бу һәлләр

$$\varphi(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \sqrt{1 - s^2}\, e^{-\varphi^2(s, x_0)} ds,$$

$$\varphi(t, \overline{x}_0) = \overline{x}_0 + \int_0^t \sqrt{1-s^2}\, e^{-\varphi^2(s, \overline{x}_0)} ds$$

еjниликләрини өдәјир.

Гејд едәк ки, $\sqrt{1-t^2}\, e^{-x^2}$ функсиjасы $\{-1 \leqslant t \leqslant 1; -\infty < x < +\infty\}$ золағында

$$|\sqrt{1-t^2}\, e^{-x^2} - \sqrt{1-t^2}\, e^{-y^2}| \leqslant |x - y|$$

шәртини өдәјир. Она көрә дә $x = \varphi(t, x_0)$ вә $x = \varphi(t, \overline{x}_0)$ һәлләри $[-1, 1]$ парчасында тә'јин олунублар (II фәсил, § 8, гејд 4). Јухарыдакы еjниликләрдән, $0 \leqslant t \leqslant 1$ гәбул едәрәк алырыг:

$$|\varphi(t, \overline{x}_0) - \varphi(t, x_0)| \leqslant |\overline{x}_0 - x_0| + \int_0^t |\varphi(s, \overline{x}_0) - \varphi(s, x_0)| ds.$$

Бурадан, Гронуолл леммасыны тәтбиг етсәк,

$$|\varphi(t, \overline{x}_0) - \varphi(t, x_0)| \leqslant |\overline{x}_0 - x_0| e^t \leqslant |\overline{x}_0 - x_0| e.$$

Ајдындыр ки, бу бәрабәрсизлик $-1 \leqslant t \leqslant 0$ олдугда да доғрудур.

Хүсуси һалда, $x_0 = 0$, $\overline{x}_0 = 0{,}001$ оларса,

$$|\varphi(t, 0{,}001) - \varphi(t, 0)| < 0{,}003.$$

Мисал 4.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 + \dfrac{1}{1+t^2}, & x_1(1) = 2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_2}{t} + x_2^2, & x_2(1) = -1 \end{cases} \tag{47}$$

мәсәләсиндә

$$u_i(t) = \frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \tau}\bigg|_{(\tau, \xi) = (1, 2, -1)}, \quad \Phi_{ij}(t) = \frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi)}{\partial \xi_j}\bigg|_{(\tau, \xi) = (1, 2, -1)}$$

төрәмәләрини һесаблајаг.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, (47) мәсәләсинин һәлли

$$x_1 = \frac{t+3}{1+t^2}, \quad x_2 = -\frac{2t}{1+t^2}.$$

Онда $u_1(t)$, $u_2(t)$ функсиjалары ((45) мәсәләсинә әсасән)

$$\dot{u}_1 = -\frac{2t}{1+t^2} u_1 + \frac{t+3}{1+t^2} u_2, \quad u_1(1) = \frac{3}{2}.$$

$$\dot{u}_2 = \frac{1-3t^2}{t(1+t^2)} u_2, \qquad u_2(1) = 0$$

мәсәләсинин һәлли кими тә'јин олунар. Бу мәсәләнин һәлли $u_1(t) = \dfrac{3}{1+t^2}$, $u_2(t) = 0$. Бахылан систем үчүн $\Phi_{11}(t)$, $\Phi_{12}(t)$, $\Phi_{21}(t)$, $\Phi_{22}(t)$ функсиjалары

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_{11} = -\dfrac{2t}{1+t^2}\Phi_{11} + \dfrac{t+3}{1+t^2}\Phi_{21}, & \Phi_{11}(1) = 1, \\ \dot{\Phi}_{21} = \dfrac{1-3t^2}{t(1+t^2)}\Phi_{21}, & \Phi_{21}(1) = 0, \\ \dot{\Phi}_{12} = -\dfrac{2t}{1+t^2}\Phi_{12} + \dfrac{t+3}{1+t^2}\Phi_{22}, & \Phi_{12}(1) = 0, \\ \dot{\Phi}_{22} = \dfrac{1-3t^2}{t(1+t^2)}\Phi_{22}, & \Phi_{22}(1) = 1 \end{cases}$$

мәсәләсинин һәллидир. Бурадан,

$$\Phi_{11}(t) = \frac{2}{1+t^2}, \quad \Phi_{21}(t) = 0, \quad \Phi_{12}(t) = \frac{2}{1+t^2}\left\{\frac{2t^2-t-1}{1+t^2} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arc\,ctg} t - \frac{\pi}{4}\right\}, \quad \Phi_{22}(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

§ 4. ҺӘЛЛИН АНАЛИТИКЛИЈИ ҺАГГЫНДА

Тутаг ки, $x = \varphi(t)$ функсиjасынын t_0 нөгтәсинин мүәjjән $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ әтрафында истәнилән тәртибдән төрәмәләри вар вә бу әтрафда јығылан

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k$$

гүввәт сырасына ајрылыр. Онда дејирләр ки, $x = \varphi(t)$ функсиjасы t_0 *нөгтәсинин әтрафында аналитикдир* (вә ја һоломорфдур). Верилмиш (α, β) интервалынын һәр бир нөгтәсиндә аналитик олан $x = \varphi(t)$ функсиjасына һәмин интервалда аналитик функсиjа дејилир.

Еjни гајда илә, чохдәјишәнли функсиjанын аналитиклији анлајышыны вермәк олар.

Хүсуси һалда, $f(t, x)$ функсиjасынын (t_0, x_0) нөгтәсинин әтрафында истәнилән тәртибдән төрәмәләри варса вә бу әтрафда јығылан

$$f(t, x) = \sum_{i, j=0}^{\infty} a_{ij} (t - t_0)^i (x - x_0)^j$$

гүввәт сырасына ајрыларса, дејирләр ки, һәмин функсиjа (t_0, x_0) нөгтәсинин әтрафында аналитикдир.

1. Садәлик үчүн $f(t, x)$ скалјар функсиjа олан һалда

$$\dot{x}=f(t,x) \qquad (27')$$

тәнлијинин

$$x(t_0)=x_0 \qquad (2')$$

башланғыч шәртини өдәјән һәллинин аналитиклији һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 6. *Тутаг ки, $f(t, x)$ функсијасы (t_0, x_0) нөгтәсинин әтрафында аналитикдир. Онда (27'), (2') мәсәләсинин t_0 нөгтәсинин әтрафында аналитик олан јеканә $x=\varphi(t)$ һәлли вар.*

Исбаты. Үмумилији позмадан $t_0=0$, $x_0=0$ гәбул едәк вә фәрз едәк ки, $f(t, x)$ функсијасы $D=\{|t|<a;\ |x|<b\}$ областында јығылан

$$f(t,x)=\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}t^i x^j \qquad (48)$$

гүввәт сырасына ајрылыр. (27'), (2') $(t_0=0,\ x_0=0)$ мәсәләсинин һәллини формал олараг

$$x=c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+\cdots \qquad (49)$$

гүввәт сырасы шәклиндә ахтараг.

Бу сыранын $x(0)=0$ шәртини өдәмәси үчүн $c_0=0$ олмалыдыр. $c_1, c_2, c_3, \ldots$ әмсалларыны тә'јин етмәк үчүн (49) сырасындан формал олараг төрәмә алаг вә (27') тәнлијиндә јеринә јазаг. Онда (48) ајрылышыны да нәзәрә алсаг,

$$c_1+2c_2t+3c_3t^2+\cdots=\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}\,t^i(c_1t+c_2t^2+\cdots)^j \qquad (50)$$

ејнилијини аларыг.

Алынан ејниликдә $t=0$ көтүрсәк, $c_1=a_{00}$ олар. Бу ејнилији диференсиаллајаг:

$$2c_2+3!\,c_3t+\cdots=\sum_{i,j=0}^{\infty} ia_{ij}\,t^{i-1}(c_1t+c_2t^2+\cdots)^j+$$

$$+\sum_{i,j=0}^{\infty} ja_{ij}\,t^i(c_1+2c_2t+\cdots)(c_1t+c_2t^2+\cdots)^{j-1}.$$

Бурада јенә дә $t=0$ гәбул етсәк, $2c_2=a_{10}+a_{01}c_1$ олар. Сонунчу ејнилији диференсиаллајыб $t=0$ көтүрсәк, $3!\,c_3=2a_{02}c_1^2+2a_{11}c_1+2a_{01}c_2+2a_{20}$ вә с. Бу гајда илә (49) сырасынын әмсаллары рекуррент дүстурларла биргијмәтли тә'јин етмәк олар

Гејд едәк ки, $c_1, c_2, c_3, \ldots$ әмсалларыны (50) ејнилијиндә t аргументинин ејни дәрәчәләринин әмсалларыны мүгајисә ет-

мәклә дә тапмаг олар. Көстәрәк ки, әмсаллары бу гајда илә тә'јин олунан (49) сырасы $t=0$ нөгтәсинин әтрафында јығылыр.

Теоремин шәртинә көрә (48) сырасы D областында јығылдығындан, $0<a_1<a$, $0<b_1<b$ шәртини өдәјән ихтијари a_1, b_1 әдәдләри үчүн мүсбәт һәдли $\sum_{i,j=1}^{\infty}|a_{ij}|\,a_1^i b_1^j$ әдәди сырасы јығыландыр. Бу сыранын cәмини M илә ишарә едәк. Онда $|a_{ij}|\,a_1^i b_1^j\leqslant M$, јә'ни $|a_{ij}|\leqslant\frac{M}{a_1^i b_1^j}$, $i, j=1, 2, \ldots$ олар. $A_{ij}=\frac{M}{a_1^i b_1^j}$ ишарә едәрәк $D_1=\{|t|<a_1,\ |x|<b_1\}$ областында

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}t^i x^j \qquad (51)$$

сырасына бахаг. Бу сыра D_1 областында јығыландыр. Мә'лумдур ки, $|z|<1$ олдугда $\sum_{i=0}^{\infty} z^i=\frac{1}{1-z}$. Она көрә дә

$$F(t,x)=\sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}t^i x^j=M\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{t}{a_1}\right)^i\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{x}{b_1}\right)^j=\frac{Ma_1b_1}{(a_1-t)(b_1-x)}.$$

Гурма гајдасындан ајдындыр ки, (51) сырасы D_1 областында (48) сырасынын мажорантыдыр. Она көрә дә $F(t, x)$ функсијасына D_1 областында $f(t, x)$ функсијасынын *мажоранты* дејилир.

Бурадан алыныр ки,

$$\dot{y}=\frac{Ma_1b_1}{(a_1-t)(b_1-y)} \qquad (52)$$

тәнлијинин $y(0)=0$ шәртини өдәјән һәлли, $t=0$ нөгтәсинин әтрафында (27') тәнлијинин $x(0)=0$ шәртини өдәјән һәллинин мажоранты олур. Буну көстәрәк.

Ајдындыр ки, (52) тәнлијинин $y(0)=0$ шәртини өдәјән һәлли

$$y(t)=b_1\left(1-\sqrt{1+\frac{2Ma_1}{b_1}\ln\left(1-\frac{t}{a_1}\right)}\right).$$

Мә'лумдур ки, $\ln(1+z)$, $\sqrt{1+u}$ функсијалары ујғун олараг $z=0$, $u=0$ нөгтәләринин әтрафында гүввәт сырасына ајрылыр вә һәмин сыралар $|z|<1$ вә $|u|<1$ областларында јығылыр. Она көрә дә $\sqrt{1+\kappa\ln(1+z)}$ функсијасыны z дәјишәнинин мүрәккәб функсијасы кими $z=0$ нөгтәсинин әтрафында гүввәт сырасына ајырсаг, бу сыра $|\kappa\ln(1+z)|<1$, $|z|<1$ олдугда, јә'ни $|z|<|1-\exp(-\kappa)|$ олдугда јығылар.

Она көрә дә $y(t)$ функсијасыны $(-h, h)$ интервалында јығылан

$$y(t) = \bar{c}_1 t + \bar{c}_2 t^2 + \dots \qquad (53)$$

гүввәт сырасына ајырмаг олар; бурада $h = a_1\left[1 - \exp\left(-\frac{b_1}{2Ma_1}\right)\right]$

Бу сыранын әмсалларыны тә'јин етмәк үчүн ону (52) тәнлијиндә јазыб, сағ тәрәфин дә $\sum\limits_{i,\, j=0}^{\infty} A_{ij} t^i y^j$ шәклиндә олдуғуну нәзәрә алсаг

$$\bar{c}_1 = A_{00}, \quad 2\bar{c}_2 = A_{10} + A_{01}\bar{c}_1;$$

$$3!\, \bar{c}_3 = 2A_{02}\bar{c}_1^2 + 2A_{11}\bar{c}_1 + 2A_{01}\bar{c}_2 + 2A_{20}, \dots$$

Бурадан $\bar{c}_k \geqslant 0$ вә $|c_k| \leqslant \bar{c}_k$. Демәли, (53) сырасы (49) сырасынын мажорантыдыр. Она көрә дә (49) сырасы $(-h, h)$ интервалында јығылыр.

Һәллин јеканәлији $f(t, x)$ функсијасынын аналитиклијиндән алыныр. Теорем исбат олунду.

Аналожи тәклиф $x^{(n)} = f\left(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}\right)$ тәнлији вә нормал систем үчүн дә доғрудур.

2. Һәллин параметрләрдән кәсилмәз асылылығы вә параметрләрә нәзәрән диференсиалланмасы һаггындакы теоремләри башланғыч шәртләр дә параметрләрдән асылы олан һала үмумиләшдирмәк олар.

Доғрудан да, тутаг ки, $f(t, x, \mu)$ вектор-функсијасы 1-чи (вә ја 2-чи) теоремин шәртләрини өдәјир, $r(\mu)$ исә $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ параметрләриндән кәсилмәз асылы олан n өлчүлү вектордур. Онда 1-чи теоремин (2-чи теоремин) исбат гајдасы илә көстәрмәк олар ки, (1) системинин

$$x(t_0) = r(\mu) \qquad (2'')$$

башланғыч шәртини өдәјән $x = \varphi(t, \mu)$ һәлли аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәздир. $f(t, x, \mu)$ вектор-функсијасы 3-чү теоремин (4-чү теоремин) шәртләрини өдәјирсә вә $r(\mu)$ векторунун $r_i(\mu)$, $i = 1, 2, \dots, n$ компонентләринин кәсилмәз $\frac{\partial r_i(\mu)}{\partial \mu_k}$, $k = 1, 2, \dots, l$ хүсуси төрәмәләри варса, (1) системинин (2'') башланғыч шәртини өдәјән $x = \varphi(t, \mu)$ һәллинин кәсилмәз $\frac{\partial \varphi_i(t, \mu)}{\partial \mu_k}$ хүсуси төрәмәләри вә кәсилмәз $\frac{\partial^2 \varphi_i(t, \mu)}{\partial t\, \partial \mu_k}$ гарышыг төрәмәләри вар, һәм дә бу гарышыг төрәмәләр диференсиаллама нөвбәсиндән асылы дејил.

Бу тәклифин доғрулуғу 3-чү теоремин исбат гајдасы илә көстәрилир.

3. Тутаг ки, μ скалјар параметрдир, $f(t, x, \mu)$ вектор-функсијасы μ-јә нәзәрән $\mu = 0$ нөгтәсинин әтрафында тә'јин олунмушдур вә компонентләринин $x_1, x_2, \dots, x_n, \mu$ дәјишәнләринә нәзәрән m тәртибә гәдәр кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Онда 3-чү теоремдән алынан нәтиҹәнин исбат гајдасы илә көстәрмәк олар ки, $r(\mu)$ векторунун компонентләринин $\mu = 0$ нөгтәсинин әтрафында m тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри варса, (1) системинин (2'') башланғыч шәртини өдәјән $x = \varphi(t, \mu)$ һәллинин μ параметринә нәзәрән $\mu = 0$ нөгтәсинин әтрафында m тәртибә гәдәр кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Бурадан ајдындыр ки, $x = \varphi(t, \mu)$ һәллини $\mu = 0$ нөгтәсинин әтрафында μ-нүн дәрәҹәләри үзрә

$$\varphi(t, \mu) = \varphi^0(t) + \mu\varphi^1(t) + \dots + \mu^m\varphi^m(t) + o(\mu^m)$$

шәклиндә Тејлор дүстуруна ајырмаг олар.

Гејд едәк ки, $x = \varphi(t, \mu)$ мә'лум олмадыгда да $\varphi^0(t), \varphi^1(t), \dots, \varphi^m(t)$ вектор-функсијаларыны тә'јин етмәк олар. Бунун үчүн $f(t, \varphi(t, \mu), \mu)$ вектор-функсијасыны вә $r(\mu)$ векторуну

$$f(t, \varphi^0(t) + \mu\varphi^1(t) + \dots + \mu^m\varphi^m(t) + o(\mu^m), \mu) =$$
$$= f(t, \varphi^0(t), 0) + \mu[f_x(t, \varphi^0(t), 0)\varphi^1(t) + f_\mu(t, \varphi^0(t), 0)] +$$
$$+ \dots + \mu^m[f_x(t, \varphi^0(t), 0)\varphi^m(t) + f^m(t)] + o(\mu^m),$$
$$r(\mu) = r(0) + \mu r^1 + \dots + \mu^m r^m + o(\mu^m)$$

шәклиндә Тејлор дүстуруна ајырараг

$$\dot{\varphi}^0(t) + \mu\dot{\varphi}^1(t) + \dots + \mu^m\dot{\varphi}^m(t) + o(\mu^m) =$$
$$= f(t, \varphi^0(t), 0) + \mu[f_x(t, \varphi^0(t), 0)\varphi^1(t) + f_\mu(t, \varphi^0(t), 0)] +$$
$$+ \dots + \mu^m[f_x(t, \varphi^0(t), 0)\varphi^m(t) + f^m(t)] + o(\mu^m)$$

ејнилијиндә вә еләҹә дә

$$\varphi^0(t_0) + \mu\varphi^1(t_0) + \dots + \mu^m\varphi^m(t_0) + o(\mu^m) = r(0) + \mu r^1 + \dots +$$
$$+ \mu^m r^m + o(\mu^m)$$

бәрабәрлијиндә μ параметринин ејни дәрәҹәләринин әмсалларыны тутушдурмаг лазымдыр. Бу заман алырыг ки, $\varphi^0(t)$, $\varphi^1(t), \dots, \varphi^m(t)$ вектор-функсијалары

$$\dot{\varphi}^0(t) = f(t, \varphi^0(t), 0), \quad \varphi^0(t_0) = r(0),$$
$$\dot{\varphi}^1(t) = f_x(t, \varphi^0(t), 0)\varphi^1(t) + f_\mu(t, \varphi^0(t), 0), \quad \varphi^1(t_0) = r^1, \qquad (54)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dot{\varphi}^m(t) = f_x(t, \varphi^0(t), 0)\varphi^m(t) + f^m(t), \quad \varphi^m(t_0) = r^m$$

мәсәләләринин һәлли кими тапылыр; бурада $f^i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ вектор-функсијасы $\varphi^0(t), \varphi^1(t), \dots, \varphi^{i-1}(t)$ вектор-функсијалары васитәсилә ифадә олунур. Бурадан ајдындыр ки, (1), (2'') мәсәләсинин $\mu = 0$ гијмәтинә ујғун олан $x = \varphi^0(t)$ һәлли мә'лум олдугда $\varphi^1(t), \varphi^2(t), \dots, \varphi^m(t)$ функсијалары хәтти системләрин һәлләри кими тә'јин олунурлар.

Гејд едәк ки, $f(t, x, \mu)$ вә $r(\mu)$ вектор-функсијаларынын компонентләринин $x_1, x_2, \dots, x_n, \mu$ дәјишәнләринә нәзәрән истәнилән тәртибдән төрәмәләри варса, (1), (2″) мәсәләсинин һәллини формал олараг

$$\varphi(t, \mu)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\varphi^{\kappa}(t)\mu^{\kappa} \tag{55}$$

шәклиндә гүввәт сырасына ајырмаг олар. Бу сыра, үмумијјәтлә, јығылмаја биләр, лакин ҝөстәрмәк олар ки, μ параметринин кичик гијмәтләри үчүн

$$\left\|\varphi(t, \mu)-\sum_{\kappa=0}^{m}\varphi^{\kappa}(t)\mu^{\kappa}\right\|\leqslant c|\mu|^{m+1}\quad (c=\text{const})$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Она ҝөрә дә (55) сырасына (1), (2″) мәсәләсинин һәллинин асимптотик ајрылышы дејилир.

Ашағыда скалјар тәнлик үчүн һәллин параметрә нәзәрән аналитиклији һаггында теорем исбат олунур. Бунун үчүн әввәлҹә гејд едәк ки, $y=x-r(\mu)$ әвәзләмәси апармагла (1) системинин (2″) шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсини

$$\dot{y}=F(t, y, \mu),\quad F(t, y, \mu)=f(t, y+r(\mu), \mu)$$

системинин $y(t_0)=0$ шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә ҝәтирмәк олар.

Одур ки,

$$\dot{x}=f(t, x, \mu) \tag{56}$$

тәнлијинин

$$x(t_0)=0 \tag{57}$$

шәртини өдәјән һәллинин μ параметриндән асылылығыны өјрәнәк.

Теорем 7 (Пуанкаре-Љапунов). *Тутаг ки, $f(t, x, \mu)$ функсијасы $G=\{t_0\leqslant t\leqslant t_0+a;\ |x|<b;\ |\mu|<c\}$ чохлуғунда t-јә нәзәрән мүнтәзәм јығылан*

$$f(t, x, \mu)=\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(t)x^{i}\mu^{j} \tag{58}$$

гүввәт сырасына ајрылыр вә $a_{ij}(t)$, $i, j=0, 1, \dots$ функсијалары $[t_0, t_0+a]$ парчасында кәсилмәздирләр. Онда елә $0<\alpha<a$, $0<\rho<c$ әдәдләри вар ки, (56), (57) мәсәләсинин $x=\varphi(t, \mu)$ һәлли гапалы $\Pi=\{t_0\leqslant t\leqslant\alpha;\ |\mu|\leqslant\rho\}$ областында тә'јин олунуб вә јығылан

$$\varphi(t, \mu)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\varphi_{\kappa}(t)\mu^{\kappa}$$

сырасы шәклиндә ҝөстәрилир.

Исбаты. Теоремин шәртинә ҝөрә $0<b_1<b$, $0<c_1<c$ шәртини өдәјән истәнилән b_1, c_1 әдәдләри үчүн

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}|a_{ij}(t)|\,b_1^{i}c_1^{j}$$

сырасы $[t_0, t_0+a]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр.

$$M=\max_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+a}\sum_{i,j=0}^{\infty}|a_{ij}(t)|\,b_1^{i}c_1^{j}$$

ишарә едәк. Онда ајдындыр ки, $|a_{ij}(t)|\leqslant\frac{M}{b_1^{i}c_1^{j}}$; $i, j=0, 1, \dots$

Одур ки, $A_{ij}=\frac{M}{b_1^{i}c_1^{j}}$ ишарә етсәк, 6-чы теоремдә олдуғу кими,

$$F(x, \mu)=\sum_{i,j=0}^{\infty}A_{ij}x^{i}\mu^{j}=\frac{Mb_1c_1}{(b_1-x)(c_1-\mu)}$$

функсијасы гапалы $G_1=\{t_0\leqslant t\leqslant t_0+a;\ |x|\leqslant b_1;\ |\mu|\leqslant c_1\}$ областында $f(t, x, \mu)$ функсијасынын (јә'ни $\sum_{i,j=0}^{\infty}A_{ij}x^{i}\mu^{j}$ сырасы $\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(t)x^{i}\mu^{j}$ сырасынын) мажоранты олар. Бурадан алыныр ки,

$$\dot{z}=\frac{Mb_1c_1}{(b_1-z)(c_1-\mu)} \tag{59}$$

тәнлијинин

$$z(t_0)=0 \tag{60}$$

шәртини өдәјән һәлли (56), (57) мәсәләсинин һәллинин мажоранты олар. Ајдындыр ки, (59), (60) мәсәләсинин һәлли

$$z(t, \mu)=b_1\left(1-\sqrt{1-\frac{2Mc_1(t-t_0)}{b_1(c_1-\mu)}}\right) \tag{61}$$

шәклиндәдир.

Формал олараг (56), (57) мәсәләсинин һәллини

$$\varphi(t, \mu)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\varphi_{\kappa}(t)\mu^{\kappa} \tag{62}$$

шәклиндә ахтарсаг, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, ... функсијалары

$$\dot{\varphi}_0=f(t, \varphi_0, 0),\quad \varphi_0(t_0)=0,$$
$$\dot{\varphi}_1=f_x(t, \varphi_0(t), 0)\varphi_1+f_\mu(t, \varphi_0(t), 0),\quad \varphi_1(t_0)=0, \tag{63}$$

. . . .

мәсәләләринин һәлләри кими тә'јин олунар. Алынан системин биринчи тәнлији $\varphi_0(t)$-јә нәзәрән гејри-хәтти тәнликдир. Теоремин шәртләри дахилиндә һәмин тәнлијин $\varphi_0(t_0)=0$ шәртини өдәјән вә $[t_0, t_0+a_1]$ парчасында тә'јин олунан јеканә һәлли вар; бурада $a_1=\min\left\{a, \frac{b_1}{M}\right\}$. Ајдындыр ки, (63) системинин галан тәнликләриндән $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ функсијалары хәтти мәсәләләрин һәлләри кими тә'јин олунурлар. Одур ки, бу функсијалар да $[t_0, t_0+a_1]$ парчасында тә'јин олунублар.

Тутаг ки, α әдәди $0<\alpha<\frac{a_1}{2}$ шәртини өдәјән ихтијари гејд олунмуш әдәддир вә ρ әдәдини $0<\rho<c_1\left(1-\frac{2M\alpha}{b_1}\right)$ шәртиндән сечәк. Онда, (61) дүстуру илә верилән $z(t,\mu)$ функсијасы гапалы $\bar{D}=\{t_0\leqslant t\leqslant t_0+\alpha;\ -\rho\leqslant\mu\leqslant\rho\}$ областында тә'јин олунмушдур вә ону $\mu=0$ нөгтәсинин әтрафында t-јә нәзәрән мүнтәзәм јығылан

$$z(t,\mu)=\sum_{i=0}^{\infty} z_i(t)\mu^i \tag{64}$$

гүввәт сырасына ајырмаг олар. Бурада $z_\kappa(t)$, $\kappa=0, 1, \dots$ функсијалары $[t_0, t_0+\alpha]$ парчасында мүсбәтдирләр вә $|\varphi_\kappa(t)|\leqslant z_\kappa(t)$ бәрабәрсизликләри өдәнир. Јә'ни (64) сырасы (62) сырасынын мажоранты олур. Демәли, μ параметри $|\mu|\leqslant\rho$ шәртини өдәдикдә (62) сырасы $[t_0, t_0+\alpha]$ парчасында t-јә нәзәрән мүнтәзәм јығылыр. Теорем исбат олунду.

Мисал 5. $\ddot{x}=3x\dot{x}+e^t$ тәнлијинин $x(0)=1, \dot{x}(0)=0$ шәртини өдәјән вә $t=0$ нөгтәсинин әтрафында аналитик олан һәллинин ајрылышынын бир нечә һәддини тапаг.

Мәсәләнин һәллини

$$x=c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3+\cdots$$

шәклиндә ахтарсаг, башланғыч шәртләринә әсасән $c_0=1$, $c_1=0$. Бу сыраны тәнликдә јазыб, алынан

$$2c_2+3\cdot 2c_3t+4\cdot 3\,c_4t^2+\cdots=3(1+c_2t^2+c_3t^3+\cdots)\times$$

$$\times(2c_2t+3c_3t^2+\cdots)+1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots$$

ејнилијиндә $t=0$ көтүрсәк, $2c_2=1$ олар.

Ејнилији диференсиалласаг вә јенә дә $t=0$ гәбул етсәк, $6c_3=6c_2+1$. Беләликлә, $c_0=1$, $c_1=0$, $c_2=\frac{1}{2}$, $c_3=\frac{2}{3}, \dots$ вә $x=1+\frac{t^2}{2}+\frac{2t^3}{3}+\cdots$

Мисал 6. $\dot{x}=x^2+\mu x^{5/2}$, $x(0)=1-\mu$ мәсәләсинин һәллини μ параметринә көрә Тејлор дүстуруна ајыраг. Ајдындыр ки,

$f(t, x, \mu)=x^2+\mu x^{5/2}$ функсијасынын (0, 0, 0) нөгтәсинин әтрафында x-ә нәзәрән ики тәртиб кәсилмәз төрәмәси вар. Она көрә тәнлијин $x(0)=1-\mu$ шәртини өдәјән $x=\varphi(t,\mu)$ һәлли

$$\varphi(t,\mu)=\varphi_0(t)+\mu\varphi_1(t)+\mu^2\varphi_2(t)+o(\mu^2)$$

шәклиндә көстәрилә биләр вә $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ функсијалары

$$\dot{\varphi}_0=\varphi_0^2,\quad \varphi_0(0)=1,$$

$$\dot{\varphi}_1=2\varphi_0\varphi_1+\varphi_0^{5/2},\quad \varphi_1(0)=-1,$$

$$\dot{\varphi}_2=2\varphi_0\varphi_2+\varphi_1^2+2{,}5\varphi_0^{3/2}\varphi_1,\quad \varphi_2(0)=0$$

мәсәләләринин һәлләри кими тә'јин олунурлар. Бурадан, ардычыл һәлл етмәклә алырыг ки,

$$\varphi_0(t)=\frac{1}{1-t},\quad \varphi_1(t)=\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{2}{(1-t)^{3/2}},$$

$$\varphi_2(t)=\frac{3-2t}{(1-t)^3}+\frac{\ln(1-t)}{(1-t)^2}-\frac{3}{(1-t)^{5/2}}.$$

Мисал 7.

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_1^2+\mu x_2,\\ \dot{x}_2=x_1x_2+\mu x_1\end{cases}$$

системинин $x_1(0)=\cos\mu$, $x_2(0)=\sin\mu$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәллинин μ-нүн дәрәчәләринә нәзәрән ајрылышынын әмсалларындан бир нечәсини тапаг.

Һәллин

$$x_1(t)=\varphi_{10}(t)+\mu\varphi_{11}(t)+\mu^2\varphi_{12}(t)+\cdots,$$

$$x_2(t)=\varphi_{20}(t)+\mu\varphi_{21}(t)+\mu^2\varphi_{22}(t)+\cdots$$

ајрылышыны верилмиш системдә јазыб, һәм дә

$$r_1(\mu)=\cos\mu=1-\frac{\mu^2}{2!}+\cdots,$$

$$r_2(\mu)=\sin\mu=\mu-\frac{\mu^3}{3!}+\cdots$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_{10}=\varphi_{10}^2, & \varphi_{10}(0)=1;\\ \dot{\varphi}_{20}=\varphi_{10}\varphi_{20}, & \varphi_{20}(0)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_{11}=2\varphi_{10}\varphi_{11}+\varphi_{20}, & \varphi_{11}(0)=0,\\ \dot{\varphi}_{21}=\varphi_{10}\varphi_{21}+\varphi_{11}\varphi_{20}+\varphi_{10}, & \varphi_{21}(0)=1,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\varphi}_{12}=2\varphi_{10}\varphi_{12}+\varphi_{11}^2+\varphi_{21}, & \varphi_{12}(0)=-\frac{1}{2},\\ \dot{\varphi}_{22}=\varphi_{10}\varphi_{22}+\varphi_{11}\varphi_{21}+\varphi_{11}+\varphi_{12}\varphi_{20}, & \varphi_{22}(0)=0\end{cases}$$

мәсәләләрини аларыг. Бу мәсәләләри ардычыл һәлл етсәк,

$$\varphi_{10}(t)=\frac{1}{1-t},\quad \varphi_{20}(t)=0,\quad \varphi_{11}(t)=0,\quad \varphi_{21}(t)=\frac{1+t}{1-t},$$

$$\varphi_{12}(t)=-\frac{2t^3-6t+3}{6(1-t)^2},\quad \varphi_{22}(t)=0,\ \ldots$$

§ 5. СИНГУЛЈАР ҺӘЈӘЧАНЛАНМЫШ СИСТЕМЛӘР ҺАГГЫНДА

Бир чох практики мәсәләләрин тәдгиги

$$\begin{cases}\mu\dot{x}=F(t,\ x,\ y),\\ \dot{y}=g(t,\ x,\ y)\end{cases}\tag{65}$$

шәклиндә системләрин һәллинә кәтирилир. Бурада $F(t,x,y)$, $g(t,\ x,\ y)$ үч өлчүлү фәзанын мүәјјән G областында тә'јин олунмуш функсијалардыр, μ исә кичик мүсбәт параметрдир.

Ајдындыр ки, (65) системинин биринчи тәнлијини μ-јә бөлмәклә бу системи, сағ тәрәфи параметрдән асылы олан (1) шәклиндә системә кәтирмәк олар. Лакин бу заман алынан

$$\dot{x}=\frac{1}{\mu}F(t,\ x,\ y),\quad \dot{y}=g(t,\ x,\ y)$$

системинин сағ тәрәфи μ сыфра јахынлашдыгда гејри-мәһдуд артыр. Одур ки, (1) системи үчүн јухарыда алдығымыз нәтичәләр $\mu=0$ нөгтәсинин әтрафында (65) системи үчүн, үмумијјәтлә, доғру дејил.

Бу параграфда әсас мәгсәд μ сыфра јахынлашдыгда (65) системинин

$$x(t_0,\ \mu)=x_0,\quad y(t_0,\ \mu)=y_0,\ (t_0,\ x_0,\ y_0)\in G\tag{66}$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәлли илә системдә $\mu=0$ көтүрмәклә алынан

$$\begin{cases}0=F(t,\ x,\ y),\\ \dot{y}=g(t,\ x,\ y)\end{cases}\tag{67}$$

системинин

$$y(t_0)=y_0\tag{68}$$

шәртини өдәјән һәлли арасындакы әлагәни өјрәнмәкдән ибарәтдир.

(65) системинә *сингулјар һәјәчанланмыш* систем, бу системдә $\mu=0$ көтүрмәклә алынан (67) системинә исә она *ујғун чырлашмыш систем* дејилир.*

Ајдындыр ки, (65) системи ики тәртибли диференсиал тәнликләр системидир. (67) системинин биринчи тәнлији чәбри тәнлик олдуғундан бу тәнликдән x вә y дәјишәнләриндән бирини тә'јин едиб икинчи тәнликдә јазсаг, бир тәртибли диференсиал тәнлик аларыг. Јә'ни (67) системи бир тәртибли диференсиал тәнликдир. Одур ки, (67) системинин (68) шәртини өдәјән һәлли (66) шәртләриндән биринчисини, үмумијјәтлә, өдәмәз. Она көрә дә көзләмәк олар ки, (65) системинин (66) шәртләрини өдәјән һәлли, һәмин шәртләрин верилдији $t=t_0$ нөгтәсиндә (67) системинин (68) шәртини өдәјән һәллиндән чох фәргләнир.

Бу мәсәләни изаһ етмәк үчүн

$$\begin{cases}\mu\dot{x}=\alpha x+\beta_1,\\ \dot{y}=\gamma x+\delta y+\beta_2\end{cases}\tag{69}$$

системинин

$$x(0,\ \mu)=x_0,\quad y(0,\ \mu)=y_0\tag{70}$$

шәртләрини өдәјән һәллини арашдыраг; бурада $\alpha,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma,\ \delta$ верилмиш әдәдләрдир вә $\alpha\neq 0,\ \delta\neq 0$.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, (69), (70) мәсәләсинин һәлли

$$x(t,\ \mu)=-\frac{\beta_1}{\alpha}+\left(x_0+\frac{\beta_1}{\alpha}\right)e^{\frac{\alpha}{\mu}t},$$

$$y(t,\ \mu)=\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}-\frac{\beta_2}{\delta}+\left(y_0-\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}-\right.\tag{71}$$

$$\left.-\frac{\mu\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2-\mu\alpha\delta}+\frac{\beta_2}{\delta}\right)e^{\delta t}+\frac{\mu\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2-\mu\alpha\delta}e^{\frac{\alpha t}{\mu}},$$

ујғун чырлашмыш

$$\begin{cases}0=\alpha x+\beta_1,\\ \dot{y}=\gamma x+\delta y+\beta_2\end{cases}\tag{72}$$

системинин

$$y(0,\ \mu)=y_0\tag{73}$$

шәртини өдәјән һәлли исә

$$\bar{x}(t)=-\frac{\beta_1}{\alpha},\quad \bar{y}(t)=\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}-\frac{\beta_2}{\delta}+\left(y_0-\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}+\frac{\beta_2}{\delta}\right)e^{\delta t}\tag{74}$$

олур. Һәлләрин ифадәләриндән алырыг ки,

$$x(t,\ \mu)-\bar{x}(t)=\left(x_0+\frac{\beta_1}{\alpha}\right)e^{\frac{\alpha}{\mu}t},$$

* Хатырладаг ки, јухарыда өјрәндијимиз (1) *системинә регулјар һәјәчанланмыш* систем, һәмин системдә $\mu=0$ көтүрмәкдә алынан $\dot{x}=f(t,x,0)$ системинә исә *һәјәчанланмамыш* систем дејилир.

$$y(t,\ \mu)-\overline{y}(t)=-\frac{\mu\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2-\mu\alpha\delta}e^{\delta t}+\frac{\mu\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2-\mu\alpha\delta}e^{\frac{\alpha}{\mu}t}. \qquad (75)$$

Ајдындыр ки, $\alpha<0$ вә $t>0$ олдугда (вә ја $\alpha>0$, $t<0$ олдугда)

$$\lim_{\mu\to 0}x(t,\ \mu)=\overline{x}(t),\quad \lim_{\mu\to 0}y(t,\ \mu)=\overline{y}(t) \qquad (76)$$

мүнасибәтләри өдәнир, лакин $x_0\neq-\frac{\beta_1}{\alpha}$ олдугда $t=0$ нөгтәсиндә бу мүнасибәтләрин биринчиси өдәнмир.

Беләликлә, сингулјар һәјәчанланмыш (69) системинин һәллинин (76) мүнасибәтләрини өдәмәси үчүн, һәмин системин сағ тәрәфи регулјар һалда гојулан шәртләрдән әлавә, јени шәртләр өдәмәлидир (бурада $\alpha<0$ шәрти). Гејд едәк ки, $x_0\neq\frac{\beta_1}{\alpha}$ олдугда (76) мүнасибәтләриндән биринчиси $t=0$ нөгтәсиндә өдәнмәдијиндән, $t=0$ нөгтәсинин кичик әтрафында бир зона јараныр ки, μ истәнилән гәдәр кичик олмасына бахмајараг, бу зонада (69), (70) мәсәләсинин һәлли (72), (73) мәсәләсинин һәллиндән чох фәргләнир. Белә зонанын јаранмасы һадисәсинә *сәрһәд лај һадисәси*, зонанын өзүнә исә *сәрһәд лајы* дејилир.

Ајдындыр ки, (75) ифадәләриндә μ параметринин кичик гијмәтләри үчүн $\left(x_0+\frac{\beta_1}{\alpha}\right)e^{\frac{\alpha}{\mu}t}$, $\frac{\mu\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2-\mu\alpha\delta}e^{\frac{\alpha}{\mu}t}$ функсијалары әсас рол ојнајыр (δ әмсалы μ параметриндән асылы олмадығындан, μ сыфра јахынлашдыгда $-\frac{\mu\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2-\mu\alpha\delta}e^{\delta t}$ сыфра јахынлашыр). Бу функсијалар (71) һәллинин (70) башланғыч шәртләрини өдәмәсини тә'мин едирләр вә $\alpha<0$ олдугда $t>0$ дәјишәни $t=0$ башланғыч нөгтәсиндән узаглашдыгча експоненсиал сүр'әтлә сөнүрләр. Һәмин функсијалара *сәрһәд функсијалары* дејилир.

Садә (69) системи үчүн көстәрилән бу хассә, сингулјар һәјәчанланмыш системләрин кениш синфинә хас олан әсас хассәләрдән биридир. Јә'ни бу системләрин һәлләринин сәрһәд лајында хассәләри сәрһәд функсијалары илә характеризә олунур.

Сәрһәд функсијалары анлајышыны (69), (70) мәсәләси үзәриндә изаһ едәк. Бунун үчүн $t=\tau\mu$ әвәзләмәси апараг вә

$$\frac{\mu}{\alpha^2-\mu\alpha\delta}=\frac{1}{\alpha^2}\mu+\frac{\delta}{\alpha^3}\mu^2+\frac{\delta^2}{\alpha^4}\mu^4+\cdots$$

ајрылышындан истифадә едәрәк (71) һәллини

$$x(t,\ \mu)=-\frac{\beta_1}{\alpha}+\left(x_0+\frac{\beta_1}{\alpha}\right)e^{\alpha\tau},$$

$$y(t,\ \mu)=\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}-\frac{\beta_2}{\delta}+\left(y_0-\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}+\frac{\beta_2}{\delta}\right)e^{\delta t}-\frac{\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2}e^{\delta t}\mu-$$
$$-\frac{\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^3}e^{\delta t}\mu^2+\cdots+\frac{\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2}e^{\alpha\tau}\mu+ \qquad (77)$$
$$+\frac{\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^3}e^{\alpha\tau}\mu^2+\cdots$$

шәклиндә јазаг. Бурадан көрүнүр ки, (69), (70) мәсәләсинин һәлли

$$\overline{x}(t,\ \mu)=-\frac{\beta_1}{\alpha},$$
$$\overline{y}(t,\ \mu)=\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}-\frac{\beta_2}{\delta}+\left(y_0-\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}+\frac{\beta_2}{\delta}\right)e^{\delta t}- \qquad (78)$$
$$-\frac{\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2}e^{\delta t}\mu-\cdots$$

шәклиндә топлананларла

$$\Pi x(\tau,\ \mu)=\left(x_0+\frac{\beta_1}{\alpha}\right)e^{\alpha\tau},$$

$$\Pi y(\tau,\ \mu)=\frac{\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2}e^{\alpha\tau}\mu+\frac{\gamma(\alpha x_0+\beta_1)\delta}{\alpha^3}e^{\alpha\tau}\mu^2+\cdots \qquad (79)$$

шәклиндә топлананларын ҹәминә бәрабәрдир. Садәлик үчүн

$$\overline{x}_0(t)=-\frac{\beta_1}{\alpha},\ \overline{x}_\kappa(t)\equiv 0,\ \kappa=1,\ 2,\ \ldots,$$
$$\overline{y}_0(t)=\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}-\frac{\beta_2}{\delta}+\left(y_0-\frac{\beta_1\gamma}{\alpha\delta}+\frac{\beta_2}{\delta}\right)e^{\delta t},$$
$$\overline{y}_1(t)=-\frac{\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2}e^{\delta t},\ \ldots,$$
$$\Pi_0 x(\tau)=\left(x_0+\frac{\beta_1}{\alpha}\right)e^{\alpha\tau},\quad \Pi_\kappa x(\tau)\equiv 0,\ \kappa=1,2,\ldots,$$
$$\Pi_0 y(\tau)\equiv 0,\quad \Pi_1 y(\tau)=\frac{\gamma(\alpha x_0+\beta_1)}{\alpha^2}e^{\alpha\tau},\ldots$$

ишарә едәрәк (78) вә (79) сыраларыны ујғун олараг

$$\overline{x}(t,\ \mu)=\overline{x}_0(t)+\mu\overline{x}_1(t)+\cdots,$$
$$\overline{y}(t,\ \mu)=\overline{y}(t)+\mu\overline{y}_1(t)+\cdots, \qquad (78')$$
$$\Pi x(\tau,\ \mu)=\Pi_0 x(\tau)+\mu\Pi_1 x(\tau)+\cdots,$$
$$\Pi y(\tau,\ \mu)=\Pi_0 y(\tau)+\mu\Pi_1 y(\tau)+\cdots \qquad (79')$$

шәклиндә јазаг. Демәли, (71) һәллини

$$x(t,\mu)=\overline{x}_0(t)+\mu\overline{x}_1(t)+\cdots+\Pi_0 x(\tau)+\mu\Pi_1 x(\tau)+\cdots,$$

$$y(t,\mu)=\bar y_0(t)+\mu\bar y_1(t)+\dots+\Pi_0 y(\tau)+\mu\Pi_1 y(\tau)+\dots \qquad (80)$$

сыралары шәклиндә јазмаг олар.

Гејд олунмуш $t>0$ үчүн μ сыфра јахынлашдыгда τ сонсузлуға јахынлашдығындан, ајдындыр ки, $\Pi_\kappa x(\tau)$, $\Pi_\kappa y(\tau)$, $\kappa=0, 1, \dots$ функсијалары $\alpha<0$ олдугда експоненсиал сүр'әтлә сыфра јахынлашырлар. Дикәр тәрәфдән, асанлыгла јохламаг олар ки, (80) сыраларында μ параметринин ejни дәрәчәләринин әмсаллары үчүн

$$[\bar x_0(t)+\Pi_0 x(\tau)]_{t=0}=x_0,\quad [\bar x_\kappa(t)+\Pi_\kappa x(\tau)]_{t=0}=0,\dots,$$

$$[\bar y_0(t)+\Pi_0 y(\tau)]_{t=0}=y_0,\quad [\bar y_\kappa(t)+\Pi_\kappa y(\tau)]_{t=0}=0$$

шәртләри өдәнир. Јә'ни $\Pi_\kappa x(\tau)$, $\Pi_\kappa y(\tau)$ функсијалары (71) һәллинин (70) башланғыч шәртләрини өдәмәсини тә'мин едирләр.

Бурадан алыныр ки, $\Pi_\kappa x(\tau)$, $\Pi_\kappa y(\tau)$, $\kappa=0, 1, \dots$ функсијалары (69) (70) мәсәләсинин сәрһәд функсијаларыдыр.

Јухарыда гејд етдијимиз кими, бу параграфда әсас мәсәлә (65), (66) мәсәләсинин $x(t,\mu)$, $y(t,\mu)$ һәлли илә (67), (68) мәсәләсинин $\bar x(t)$, $\bar y(t)$ һәлли арасында

$$\lim_{\mu\to0} x(t,\mu)=\bar x(t),\quad \lim_{\mu\to0} y(t,\mu)=\bar y(t)$$

мүнасибәтләринин өдәндијини көстәрмәкдән ибарәтдир.

Гојулан мәсәлә ашағыда верилән Тихонов теореми илә һәлл олунур.

Фәрз едәк ки, ашағыдакы шәртләр өдәнир:

I. *$F(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ функсијалары G областында кәсилмәздир;*

II. *t, y дәјишәнләри фәзасынын гапалы, мәһдуд $\bar D$ областында тә'јин олунмуш кәсилмәз елә $\bar x=\varphi(t,y)$ функсијасы вар ки, $(t,y)\in\bar D$ олдугда $(t,\varphi(t,y),y)\in G$ вә $F(t,\varphi(t,y),y)\equiv0$. Бу шәртләри өдәјән $x=\varphi(t,y)$ функсијасына $F(t,x,y)=0$ тәнлијинин $\bar D$ областында көкү дејилир. Фәрз едәчәјик ки, $x=\varphi(t,y)$ көкү $\bar D$ областында изолә олунмушдур, јә'ни елә $\eta>0$ әдәди вар ки, $0<|x-\varphi(t,y)|<\eta$, $(t,y)\in\bar D$ олдугда $F(t,x,y)\neq0$;*

III. *һәм (65), (66) мәсәләсинин, һәм дә*

$$\dot y=g(t,\varphi(t,y),y),\quad y(t_0)=y_0$$

мәсәләсинин $[t_0, T]$ парчасында тә'јин олунмуш јеканә һәлли вар. Бу һәлләри уjғун олараг $x(t,\mu)$, $y(t,\mu)$ вә $\bar y(t)$ илә ишарә едәк.

Параметр кими гәбул олунан t вә y үчүн

$$\frac{dz}{d\tau}=F(t,z,y),\quad (\tau\geq0) \qquad (81)$$

тәнлијинә, (65) системинә уjғун олан сәрһәд лајын тәнлији, $F(t,z,y)=0$ чәбри тәнлијинин көкләринә исә һәмин тәнлијин таразлыг вәзијјәтләри дејилир. II шәртиндән ајдындыр ки, $\bar x=\varphi(t,y)$ көкү (81) тәнлијинин изолә олунмуш таразлыг вәзијјәтидир;

IV. *(81) тәнлијинин $\bar x=\varphi(t,y)$ таразлыг вәзијјәти t вә y параметрләринә нәзәрән $\bar D$ областында мүнтәзәм олараг, Лјапунов мә'нада асимтотик дајаныглыдыр. Јә'ни истәнилән $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә, анчаг ε-дан асылы олан елә $\delta(\varepsilon)>0$ әдәди вар ки, истәнилән $(t,y)\in\bar D$ үчүн, $|z(0)-\varphi(t,y)|<\delta$ олдугда $|z(\tau)-\varphi(t,y)|<\varepsilon$, $\tau\geq0$ вә $\lim_{\tau\to+\infty} z(\tau)=\varphi(t,y)$ шәртләри өдәнир.*

Сәрһәд лајын тәнлијиндә $t=t_0$, $y=y_0$ көтүрмәклә алынан

$$\frac{dz}{d\tau}=F(t_0,z,y_0) \qquad (82)$$

тәнлијинин

$$z(t_0)=x_0 \qquad (83)$$

шәртини өдәјән һәллини $z=z(\tau)$ илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, x_0 нөгтәси $\varphi(t_0,y_0)$ нөгтәсинә, үмумијјәтлә, јахын олмадығындан, τ сонсузлуға јахынлашдыгда (82), (83) мәсәләсинин һәлли $\varphi(t_0,y_0)$-а јахынлашмаја биләр:

V. *(82), (83) мәсәләсинин $z(\tau)$ һәлли үчүн*

а) $\lim_{\tau\to+\infty} z(\tau)=\varphi(t_0,y_0)$,

б) $\tau\geq0$ үчүн $(t_0,z(\tau),y_0)\in G$

шәртләри өдәнир.

Теорем 8 (Тихонов теореми). *Тутаг ки, I—V шәртләри өдәнир. Онда елә $\mu_0>0$ әдәди тапмаг олар ки, $0<\mu\leq\mu_0$ шәртини өдәјән μ параметрләри үчүн (65) системинин (66) шәртләрини өдәјән $x=x(t,\mu)$, $y=y(t,\mu)$ һәлли $[t_0, T]$ парчасында тә'јин олунуб вә*

$$\lim_{\mu\to0} x(t,\mu)=\bar x(t)=\varphi(t,\bar y(t)),\quad t_0<t\leq T,$$

$$\lim_{\mu\to0} y(t,\mu)=\bar y(t),\quad t_0\leq t\leq T$$

мүнасибәтләри өдәнир.

Бу теорем көстәрир ки, $y(t,\mu)$ функсијасы $\bar y(t)$ функсијасына $[t_0, T]$ парчасында, $x(t,\mu)$ функсијасы исә $\bar x(t)$ функсијасына $[t_1, T]$ парчасында мүнтәзәм јығылыр; бурада t_1 нөгтәси $t_0<t_1<T$ шәртини өдәјән ихтијари гејд олунмуш

нөгтәдир. Лакин Тихонов теореми $x(t, \mu)$ вә $y(t, \mu)$ функсиjаларынын $\bar{x}(t)$ вә $\bar{y}(t)$ функсиjаларына јығылма сүр'әти һаггында һеч бир мә'лумат вермир.

Бу мәсәләни һәлл етмәк үчүн, (65) системинин сағ тәрәфи үзәринә әлавә һамарлыг шәртләри гојулур вә системин (66) шәртләрини өдәјән һәлли (80) шәклиндә ахтарылыр.

Чалышмалар

1. $\mu \geqslant 0$ параметринин һансы гијмәтләриндә $\dot{x} = 2x + \mu t\sqrt{x}$ тәнлијинин $x(0) = 1$ башланғыч шәртини өдәјән вә $[0, 1]$ парчасында тә'јин олунан $x = \varphi(t, 0)$, $x = \varphi(t, \mu)$ һәлләри үчүн $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, 0)| \leqslant \varepsilon$ шәрти өдәнәр.

Чаваб: $0 \leqslant \mu \leqslant 2\left(\sqrt{1 + e^{-2}\varepsilon} - 1\right)$.

2. $$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{2t}{1+t^2} x_2 + \mu(t + t^3) \end{cases}$$

системинин $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ башланғыч шәртини өдәјән $x_1 = \varphi_1(t; 0)$, $x_2 = \varphi_2(t, 0)$ вә $x_1 = \varphi_1(t: 0{,}001)$, $x_2 = \varphi_2(t, 0{,}001)$ һәлләринин фәргини $[0, 1]$ парчасында гијмәтләндирин.

Чаваб: $|\varphi_1(t; 0{,}001) - \varphi_1(t; 0)| < 0{,}003$,
$|\varphi_2(t; 0{,}001) - \varphi_2(t; 0)| < 0{,}001$.

3. Ашағыдакы мисалларда һәллин параметрә нәзәрән төрәмәсини тапын:

а) $\dot{x} = x + \mu(t + \sqrt{x})$, $\quad x(0) = 1$, $z(t) = \dfrac{\partial x}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}$.

Чаваб: $z(t) = 3e^t - t - 1 - 2e^{t/2}$.

б) $\dot{x} = \dfrac{2t}{1+t^2} x + \mu e^{x-2(1+t^2)}$, $\quad x(0) = 2$, $z(t) = \dfrac{\partial x}{d\mu}\Big|_{\mu=0}$.

Чаваб: $z(t) = (1 + t^2)\ \mathrm{arctg}\, t$.

в) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{x_1}{t} - 2t^3 x_1, \ x_1(1) = 0, \ z_1(t) = \dfrac{\partial x_1}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}, \\ \dot{x}_2 = \mu x_2 + x_2^2, \ x_2(1) = 1, \ z_2(t) = \dfrac{\partial x_2}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}. \end{cases}$$

Чаваб: $z_1(t) = t\left(\dfrac{t^7}{21} - \dfrac{t^5}{10} + \dfrac{t}{6} - \dfrac{4}{35}\right)$,

$z_2(t) = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{t^4}{6} - \dfrac{1}{12t^2}$.

г) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2te^{\mu(x_1 - x_2)} + 2\mu(tx_2 - 2x_1), \ x_1(0) = e^{\mu} - 1, \ z_1(t) = \dfrac{\partial x_1}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + \mu^2 x_2^2, \quad x_2(0) = \sin\mu, \ z_2(t) = \dfrac{\partial x_2}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}. \end{cases}$$

Чаваб: $z_1(t) = \dfrac{t^4}{2} - \dfrac{4t^3}{3} + 1$,

$z_2(t) = \dfrac{t^4}{2} - \dfrac{10}{3} t^3 + 10t^2 - 20t - 20e^{-t} + 21$.

д) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + \mu_1 x_2 + \mu_2 x_2^2, \ x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2 = \mu_1 x_1 - x_2 + \mu_2 x_1 x_2, \ x_2(0) = 1, \end{cases} \quad z_{ij}(t) = \dfrac{\partial x^i}{\partial \mu_j}\Big|_{(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)}, \ i, j = 1, 2.$$

Чаваб: $z_{11}(t) = \mathrm{sh}\, t$, $\quad z_{12}(t) = \dfrac{2}{3} e^{-\frac{t}{2}} \mathrm{sh} \dfrac{3t}{2}$,

$z_{21}(t) = \mathrm{sh}\, t$, $z_{22}(t) = 2e^{-\frac{t}{2}} \mathrm{sh} \dfrac{t}{2}$.

4. $\dot{x} = 1 - \dfrac{2t}{1+t^2} x$ тәнлијинин $x(0) = 0$ вә $x(0) = 0{,}01$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәлләринин фәргини $[0, 1]$ парчасында гијмәтләндирин.

Чаваб: $|\varphi(t; 0{,}01) - \varphi(t; 0)| \leqslant 0{,}01$.

5. a, b параметрләринин һансы гијмәтләриндә $\ddot{x} + 4x = f(t)$ тәнлијинин $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ шәртләрини өдәјән $x = \varphi(t, 0, 0)$ һәлли/илә $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$ шәртләрини өдәјән $x = \varphi(t; a, b)$ һәлли $|\varphi(t; a, b) - \varphi(t; 0, 0)| \leqslant \varepsilon$ шәртини өдәјирләр? Бурада $f(t)$ функсијасы $t \geqslant 0$ јарымохунда кәсилмәздир.

Чаваб: $|a| + \dfrac{|b|}{2} \leqslant \varepsilon$.

6. $\ddot{x} + 4x = 0$ тәнлијинин $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 2$ шәртләрини өдәјән $x = \varphi(t, 0)$ һәлли илә $x\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 0$, $\dot{x}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = 2$ шәртләрини өдәјән $x = \varphi\left(t, \dfrac{\pi}{12}\right)$ һәллинин фәргини гијмәтләндирин.

Чаваб: $\left|\varphi\left(t, \dfrac{\pi}{12}\right) - \varphi(t, 0)\right| \leqslant \dfrac{\pi}{6}$.

7. Ашағыдакы мисалларда һәллин башланғыч гијмәтләринә нәзәрән көстәрилән төрәмәләрини тапын:

а) $\dot{x} = 3x^2 + 2tx$, $x(1) = 0$, $u(t) = \dfrac{\partial x}{\partial \tau}\Big|_{(\tau, \xi) = (1, 0)}$,

$$\Phi(t) = \frac{\partial x}{\partial \xi}\Big|_{(\tau,\,\xi)=(1,\,0)}.$$

Чаваб: $u(t)=0$, $\Phi(t)=e^{t^2}$.

б) $\dot x = -5x+4x^3e^{2t}$, $x(0)=1$, $u(t)=\frac{\partial x}{\partial \tau}\Big|_{(\tau,\,\xi)=(0,\,1)}$.

Чаваб: $u(t)=-e^{7t}$.

в) $\begin{cases}\dot x_1 = x_1^2, & x_1(1)=-1,\\ \dot x_2 = -x_1x_2+t, & x_2(1)=2,\end{cases}$ $\Phi_{ij}(t)=\frac{\partial x^i}{\partial \xi_j}\Big|_{(\tau,\,\xi)=(1,-1,2)}$, $i,\ j=1,2.$

Чаваб: $\Phi_{11}(t)=\frac{1}{t^2}$, $\Phi_{12}(t)=0$, $\Phi_{21}(t)=1-t(1+\ln t)$, $\Phi_{22}(t)=t$.

г) $\begin{cases}\dot x_1 = x_1-x_2+x_1^2, & x_1(0)=1,\\ \dot x_2 = x_2-2x_1x_2+x_1^2+2x_1^3, & x_2(0)=1\end{cases}$

$u_i(t)=\frac{\partial x_i}{\partial \tau}\Big|_{(\tau,\,\xi)=(0,1,1)}$, $\Phi_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\Big|_{(\tau,\,\xi)=(0,1,1)}$, $i,\ j=1,\ 2.$

Чаваб: $u_1(t)=e^t$, $u_2(t)=2e^{2t}$, $\Phi_{11}(t)=(1+2t)e^t$,

$\Phi_{12}(t)=-te^t$, $\Phi_{21}(t)=4te^{2t}+2e^{2t}-2e^t$, $\Phi_{22}(t)=e^t-2te^{2t}$.

Кестәриш: $x_1=e^t$, $x_2=e^{2t}$ мәсәләнин һәллидир.

8. $\dot x = x\cos t+t$ тәнлијинин $x(0)=1$ шәртини өдәјән һәллинин t-нин дәрәчәләри үзрә гүввәт сырасына ајрылышынын бир нечә һәддинин әмсалыны тә'јин един.

Чаваб: $\varphi(t)=1+t+t^2+\frac{1}{6}t^3+\cdots$

9. Ашағыдакы мисалларда һәллин параметрә нәзәрән гүввәт сырасына ајрылышынын бир нечә һәддинин әмсалыны тә'јин един:

а) $\dot x=\mu t^2-x^2$, $x(1)=1$.

Чаваб: $\varphi(t,\mu)=\frac{1}{t}+\frac{\mu}{5}\left(t^3-\frac{1}{t^2}\right)+\mu^2\left(\frac{1}{25t^3}-\frac{1}{18t^2}+\frac{t^2}{50}-\frac{t^7}{225}\right)+\cdots$

б) $\dot x=-2x+x^2e^t$, $x(0)=1+3\mu$.

Чаваб: $\varphi(t,\mu)=e^{-t}+3\mu+9\mu^2(e^t-1)+\cdots$.

в) $\dot x=\frac{2}{t}x+1+\mu tx$, $x(1)=-1+2\mu$.

Чаваб: $\varphi(t,\mu)=-t+\mu t^2(3-t)+\mu^2t^2\left(\frac{3t^2}{2}-\frac{t^3}{3}-\frac{7}{6}\right)+\cdots$.

г) $\begin{cases}\dot x_1 = x_1-\mu x_2, & x_1(0)=1,\\ \dot x_2=\mu x_1-x_2, & x_2(0)=2.\end{cases}$

Чаваб: $x_1\equiv\varphi_1(t,\mu)=e^t+\mu(e^{-t}-e^t)+\mu^2\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{t}{2}\right)e^t-\frac{1}{4}e^{-t}\right]+\cdots,$

$x_2\equiv\varphi_2(t,\mu)=2e^{-t}+\frac{\mu}{2}(e^t-e^{-t})+\mu^2\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)e^{-t}-\frac{1}{2}e^t\right]+\cdots.$

ғ) $\begin{cases}\dot x_1 = x_1^2+\mu x_2, & x_1(0)=\cos\mu,\\ \dot x_2=x_1x_2+\mu x_1, & x_2(0)=\sin\mu.\end{cases}$

Чаваб: $x_1\equiv\varphi_1(t,\mu)=\frac{1}{1-t}+\mu^2\frac{6t-2t^3-3}{6(1-t)^2}+\cdots,$

$x_2\equiv\varphi_2(t,\mu)=\mu\frac{1+t}{1-t}+\mu^2\cdot 0+\cdots.$

10. Исбат един ки,

$$\begin{cases}\mu\dot x=-x+t,\\ \dot y=xy^2\end{cases}$$

системинин һәлләри μ сағдан сыфыра јахынлашдыгда

$$\begin{cases}0=-x+t,\\ \dot y=xy^2\end{cases}$$

системинин һәлләринә јахынлашыр. Бу тәклиф

$$\begin{cases}\mu\dot x=x+t,\\ \dot y=xy^2,\end{cases}\qquad\begin{cases}0=x+t,\\ \dot y=xy^2\end{cases}$$

системләри үчүн дә доғрудурму?

VII ФӘСИЛ

ДАЈАНЫГЛЫГ НӘЗӘРИЈЈӘСИ ҺАГГЫНДА

Һәллин башланғыч шәртләрдән кәсилмәз асылылығыны өјрәнәркән көстәрдик ки, сәрбәст дәјишән сонлу парчада дәјишәрсә, башланғыч шәртләр кичик дәјишдикдә һәлл һәмин парчада кичик дәјишир. Бир чох практик мәсәләләрдә башланғыч шәртләрин кичик дәјишмәси илә әлагәдар олараг, сәрбәст дәјишән сонсуз интервалда дәјишдикдә һәллин кичик дәјишмәсини

өјрәнмәк лазым кәлир. Бу исә һәллин дајаныглығы мәсәләси илә бағлыдыр.

Бу фәсил диференсиал тәнликләр системинин һәлләринин Лјапунов мә'нада дајаныглығы нәзәријјәсинә һәср олунмушдур.

§ 1. ӘСАС АНЛАЈЫШЛАР

Тутаг ки,

$$\dot{x} = f(t, x) \qquad (1)$$

нормал системиндә $f(t, x)$ вектор-функсијасынын $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ компонентләри $G = I \times D$ чохлуғунда кәсилмәздир вә кәсилмәз $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ хүсуси төрәмәләри вар, бурада $I = \{t_0 \leqslant t < +\infty\}$, D исә $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләри фәзасынын мәһдуд областыдыр.

Ајдындыр ки, гојулмуш шәртләр дахилиндә һәр бир $x^0 \in D$ нөгтәси үчүн (1) системинин $x(t_0) = x^0$ шәртини өдәјән вә мүәјјән $[t_0, t_1)$ јарыминтервалында тә'јин олунмуш даваметдирилмәјән јеканә һәлли вар.

Фәрз едәк ки, $x = \varphi(t)$ вектор-функсијасы (1) системинин $x(t_0) = x^0$ шәртини өдәјән вә I-дә тә'јин олунмуш һәллидир. Верилмиш $\xi \in D$ үчүн системин $x(t_0) = \xi$ шәртини өдәјән вә мүәјјән $[t_0, t_\xi)$ јарыминтервалында тә'јин олунмуш даваметдирилмәјән һәллини $x = \varphi(t, \xi)$ илә ишарә едәк.

Тутаг ки, 1) кафи гәдәр кичик мүсбәт ρ әдәди вар ки, $\|\xi - x^0\| < \rho$ шәртини өдәјән ξ-ләр үчүн $x = \varphi(t, \xi)$ һәлләри I јарымохунда тә'јин олунуб; 2) истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $0 < \delta \leqslant \rho$ әдәди вар ки, $\|\xi - x^0\| < \delta$ олдугда $x = \varphi(t, \xi)$ һәлләри I јарымохунда $\|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ шәртини өдәјир. Онда дејирләр ки, (1) системинин $x = \varphi(t)$ һәлли *Лјапунов мә'нада дајаныглыдыр*.

Тутаг ки, $x = \varphi(t)$ һәлли Лјапунов мә'нада дајаныглыдыр вә 3) $0 < \sigma \leqslant \delta$ шәртини өдәјән елә σ әдәди вардыр ки, $\|\xi - x^0\| < \sigma$ олдугда $\lim\limits_{t \to \infty} \|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)\| = 0$ олур. Бу заман дејирләр ки, $x = \varphi(t)$ һәлли *асимптотик дајаныглыдыр*.

Тутаг ки, һәр һансы $\varepsilon > 0$ вә истәнилән $\delta > 0$ әдәдләри үчүн $\|\xi^0 - x^0\| < \delta$ шәртини өдәјән елә $\xi^0 \in D$ нөгтәси вә елә $t_1 > t_0$ аны вардыр ки, $x = \varphi(t, \xi^0)$ һәлли $\|\varphi(t_1, \xi^0) - \varphi(t_1)\| \geqslant \varepsilon$ шәртини өдәјир. Онда (1) системинин $x = \varphi(t)$ һәлли *дајаныгсыз һәлл* адланыр.

Тутаг ки, елә $\sigma > 0$ әдәди вардыр ки, $\|\xi - x^0\| < \sigma$ шәртини өдәјән һәр бир $\xi \in D$ үчүн $x = \varphi(t, \xi)$ һәлли мүәјјән $t_1 = T(\xi) > t_0$ анында тә'јин олунмушдур вә тә'јин олундуғу $t \geqslant T(\xi)$ нөгтәләриндә $\|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)\| \geqslant \sigma$ бәрабәрсизлијини

өдәјир. Онда (1) системинин $x = \varphi(t)$ һәлли *тамам дајаныгсыз һәлл адланыр.*

Ајдындыр ки, $x = a$ сабит вектору үчүн $f(t, a) = 0$, $t \in I$ оларса, бу вектор (1) системинин I-дә һәлли олур. Белә һәллә (1) системинин таразлыг вәзијјәти дејилир. Хүсуси һалда $a = 0$ оларса, $x = 0$ һәллинә тривиал һәлл дејилир.

Системин $x = a$ таразлыг вәзијјәтинин Лјапунов мә'нада дајаныглы вә ја дајаныгсыз олмасынын тә'рифи, јухарыдакы тә'рифләрдә $x^0 = a$, $\varphi(t) = a$, $t \in I$ көтүрмәклә алыныр.

Адәтән, верилмиш системин һәр һансы һәллинин дајаныглығынын арашдырылмасы мәсәләси, бу системин көмәји илә гурулан јени системин тривиал һәллинин дајаныглығынын арашдырылмасы мәсәләсинә кәтирилир.

Тутаг ки, $x = \varphi(t)$ вектор-функсијасы (1) системинин һәр һансы һәллидир. Системдә $x = y + \varphi(t)$ әвәзләмәси апараг. Онда

$$\dot{y} = F(t, y), \quad F(t, y) = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)) \qquad (1')$$

системи алынар вә ајдындыр ки, $y = 0$ бу системин һәллидир.

Беләликлә, (1) системинин $x = \varphi(t)$ һәллинин дајаныглығы мәсәләси (1′) системинин $y = 0$ тривиал һәллинин дајаныглығы мәсәләсинә кәтирилир.

Ашағыда көстәрәчәјик ки, хәтти бирчинс системин һәр бир һәллинин мәһдудлуғундан онун ихтијари һәллинин дајаныглығы вә әксинә, һәр һансы һәллинин дајаныглығындан ихтијари һәллин мәһдудлуғу алыныр. Гејд едәк ки, бу хассә бирчинс олмајан вә гејри-хәтти системләр үчүн, үмумијјәтлә, доғру дејил.

Мисал 1. $\dot{x} = ax$ тәнлијинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглығыны арашдыраг. Ајдындыр ки, тәнлијин $x(t_0) = \xi$ шәртини өдәјән һәлли $\varphi(t, \xi) = \xi e^{a(t-t_0)}$ шәклиндәдир.

Тутаг ки, $a \leqslant 0$. Ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы $\delta > 0$ әдәдини $0 < \delta \leqslant \varepsilon$ шәртиндән сечсәк, $\|\xi\| < \delta$ олдугда

$$\left|\xi e^{a(t-t_0)}\right| \leqslant |\xi| < \delta \leqslant \varepsilon, \ t \in I.$$

Бурадан алыныр ки, $a \leqslant 0$ олдугда тәнлијин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныглыдыр. Бундан башга, $a < 0$ олдугда һәм дә $\lim\limits_{t \to +\infty} \xi e^{a(t-t_0)} = 0$ олур. Демәли, $a < 0$ олдугда $x = 0$ таразлыг вәзијјәти асимптотик дајаныглыдыр.

Үмуми һәллин ифадәсиндән ајдындыр ки, $a > 0$ оларса, һәр һансы $\varepsilon > 0$ вә ихтијари $\delta > 0$ әдәдләри үчүн елә $t_1 = T(\xi) > t_0$ аны тапмаг олар ки, $0 < |\xi| < \delta \leqslant \varepsilon$ олмасына бахмајараг $t \geqslant t_1$ олдугда $|\xi e^{a(t-t_0)}| \geqslant \varepsilon$ олар. Доғ-

рудан да, $t_1 = t_0 + \frac{1}{a} \ln \frac{\varepsilon}{|\xi|}$ гәбул етсәк, асанлыгла көстәрмәк олар ки, $t \geqslant t_1$ олдугда $|\xi e^{a(t-t_0)}| \geqslant \varepsilon$ олур.

Демәли, $a > 0$ олдугда $x = 0$ тривиал һәлли даjаныгсыз һәллдир.

Мисал 2. Јохламаг олар ки, $\varphi(t) = e^t$ функсиjасы $\dot{x} = -x + 2e^t$ тәнлиjинин $x(0) = 1$ шәртини өдәjән һәллидир вә тәнлиjин $x(0) = \xi$ шәртини өдәjән һәлли $\varphi(t, \xi) = (\xi - 1)e^{-t} + e^t$. Ихтиjари $t \geqslant 0$ үчүн $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| = |\xi - 1| e^{-t} \leqslant |\xi - 1|$ олдуғундан, аjдындыр ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы $\delta > 0$ әдәдини $0 < \delta \leqslant \varepsilon$ шәртиндән сечсәк $|\xi - 1| < \delta$ олдугда, $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| < \varepsilon$, $t \in I_0 = \{0 \leqslant t < +\infty\}$ олар. Дикәр тәрәфдән $\lim\limits_{t \to +\infty} |\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| = \lim\limits_{t \to \infty} |\xi - 1| e^{-t} = 0$ олдуғундан, алырыг ки, $\varphi(t) = e^t$ һәлли I_0-да асимптотик даjаныгдыр.

Аjдындыр ки, $\varphi(t) = e^t$ һәлли I_0-да мәһдуд деjил.

Мисал 3. $\dot{x} = \sin x$ тәнлиjинин үмуми һәлли $x = 2\mathrm{arctg}(ce^t)$ шәклиндәдир вә һәлләр I_0-да мәһдуддур.

Аjдындыр ки, $c < 0$ олдугда $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = -\pi$, $c > 0$ олдугда исә $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \pi$. Бурадан алынып ки, $x(t) = 0$ һәлли даjаныглы деjил.

§ 2. ХӘТТИ СИСТЕМИН ДАЈАНЫГЛЫҒЫ

Тутаг ки, хәтти бирчинс олмаjан

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{2}$$

системи верилмишдир; бурада $A(t)$ матрис-функсиjасы вә $f(t)$ вектор-функсиjасы $I = \{t_0 \leqslant t < +\infty\}$ јарымохунда кәсилмәздир. Бу системин һәр һансы $x = \varphi(t)$ һәллинин даjаныглығы мәсәләси, $x = y + \varphi(t)$ әвәзләмәси васитәсилә уjғун бирчинс

$$\dot{y} = A(t)y$$

системинин $y = 0$ тривиал һәллинин даjаныглығы мәсәләсинә кәтирилир. Она көрә дә хәтти бирчинс

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3}$$

системинин тривиал һәллинин даjаныглығыны өjрәнмәклә кифаjәтләнәчәjик.

Бүтүн һәлләри даjаныглы (асимптотик даjаныглы) олан системә *даjаныглы систем (асимптотик даjаныглы систем)* деjилир.

Тутаг ки, $\Phi(t)$ матриси (3) системинин $\Phi(t_0) = E$ шәртини өдәjән фундаментал матрисидир; бурада E ваһид матрисдир. Онда (3) системинин $x(t_0) = \xi$ башланғыч шәртини өдәjән һәлли

$$\varphi(t, \xi) = \Phi(t)\xi \tag{4}$$

шәклиндә көстәрилир. Бурадан асанлыгла көстәрмәк олар ки, (3) системинин даjаныглы олмасы үчүн онун тривиал һәллинин даjаныглы олмасы зәрури вә кафидир.

Хәтти бирчинс олмаjан (2) системинин ихтиjари ики һәллинин фәрги уjғун бирчинс (3) системинин һәлли олдуғундан, ахырынчы тәклифдән алырыг ки, (2) системинин даjаныглы олмасы үчүн уjғун бирчинс системин даjаныглы олмасы зәрури вә кафидир.

Јухарыда кәтирилән мисаллар көстәрир ки, һәллин даjаныглығы илә мәһдудлуғу асылы олмаjан анлаjышлардыр. Лакин хәтти бирчинс системин даjаныглығы илә онун һәлләринин мәһдудлуғу мәсәләләри бир-бирилә сых бағлыдыр.

Теорем 1. *Хәтти бирчинс системин даjаныглы олмасы үчүн, онун һәр бир һәллинин I-дә мәһдуд олмасы зәрури вә кафидир.*

Зәрурилиjин исбаты. Тутаг ки, (3) системи даjаныглыдыр. Онда тривиал һәллин даjаныглығына әсасән, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $\delta > 0$ әдәди тапмаг олар ки, $\|\xi\| < \delta$ олдугда (4)-ә әсасән $\|\varphi(t, \xi)\| = \|\Phi(t)\xi\| < \varepsilon$, $t \in I$ олур.

Хүсуси һалда ξ вектору олараг, i-чи компоненти $\frac{\delta}{2}$, галан компонентләри исә сыфыр олан вектор көтүрсәк,

$$\|\varphi(t, \xi)\| = \|\Phi(t)\xi\| = \|\Phi^i(t)\| \frac{\delta}{2} < \varepsilon, \ t \in I$$

олар; бурада $\Phi^i(t)$ илә $\Phi(t)$ матрисинин i-чи сүтуну ишарә олунмушдур. Онда $\|\Phi^i(t)\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}$ олдуғундан,

$$\|\Phi(t)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|\Phi^i(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{2\varepsilon}{\delta} \sqrt{n}, \ t \in I$$

олар, jә'ни $\Phi(t)$ матриси I jарымохунда мәһдуддур вә (4) дүстуруна әсасән алырыг ки, (3) системинин һәр бир һәлли мәһдуддур.

Кафилиjин исбаты. (3) системинин һәр бир һәллинин мәһдудлуғундан алынып ки, $\Phi(t)$ фундаментал матриси I-дә мәһдуддур: $\|\Phi(t)\| \leqslant M$, $t \in I$. Онда истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы $\delta > 0$ әдәдини $0 < \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$ шәртиндән сечсәк,

$\|\xi\| < \delta$ олдугда (4) дүстуруна әсасән $\|\varphi(t,\xi)\| \leqslant \|\Phi(t)\| \times \|\xi\| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M}$ олар. Бурадан алыныр ки, (3) системинин тривиал һәлли дајаныглыдыр. Теорем исбат олунду.

Нәтичә. *Тутаг ки, бирчинс олмајан (2) хәтти системи дајаныглыдыр. Онда ја бу системин һәлләринин һәр бири I јарымохунда мәһдуддур, јахуд да һеч бири мәһдуд дејил.*

Нәтичәнин исбаты (2) системинин $x(t_0)=\xi$ башланғыч шәртини өдәјән һәллинин

$$\varphi(t,\xi)=\Phi(t)\xi+\int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

шәклиндә көстәрилмәсиндән вә ујғун бирчинс системин һәлләринин I-дә мәһдудлуғундан алыныр.

Теорем 2. *Хәтти бирчинс системин асимптотик дајаныглы олмасы үчүн онун һәр бир һәллинин t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда сыфра јахынлашмасы зәрури вә кафидир.*

З ә р у р и л и ј и н   и с б а т ы. Тривиал һәлл асимптотик дајаныглы олдуғундан, елә $\sigma>0$ әдәди вар ки, $\|\xi\|<\sigma$ олдугда $x(t_0)=\xi$ шәртини өдәјән $x=\varphi(t,\xi)$ һәлләри үчүн $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t,\xi)=\lim\limits_{t\to+\infty}\Phi(t)\xi=0$. Бурадан $\lim\limits_{t\to+\infty}\Phi^{i}(t)=0$, $i=1,2,\dots,n$. Онда (4) дүстуруна әсасән зәрурилијин исбаты алыныр.

К а ф и л и ј и н   и с б а т ы. Тутаг ки, (3) тәнлијинин һәр бир $x=\varphi(t,\xi)$ һәлли

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t,\xi)=0 \qquad (5)$$

шәртини өдәјир. Бурадан лимитин тә'рифинә әсасән елә $A_\xi>t_0$ әдәди вар ки,

$$\|\varphi(t,\xi)\|\leqslant 1,\ t\in[A_\xi,+\infty).$$

Дикәр тәрәфдән, $\varphi(t,\xi)$ вектор-функсијасы сонлу $[t_0, A_\xi]$ парчасында кәсилмәз олдуғундан, һәм дә бу парчада мәһдуддур. Она көрә дә, $x=\varphi(t,\xi)$ һәлли I јарымохунда мәһдуддур. Бурадан, 1-чи теоремә вә (5) шәртинә әсасән, (3) системинин тривиал һәллинин асимптотик дајаныглы олдуғу алыныр. Теорем исбат олунду.

Сабит әмсаллы хәтти бирчинс

$$\dot x = Ax \qquad (6)$$

системинин дајаныглығы мәсәләси A матрисинин характеристик әдәдләри илә бағлыдыр. Белә системләрин $I_0=\{0\leqslant t<+\infty\}$ јарымохунда дајаныглығыны өјрәнәк. Бунун үчүн A матрисинин Жордан формасындан истифадә олунур.

Мә'лумдур ки, J матриси A матрисинин каноник Жордан формасы исә, елә гејри-мәхсуси P матриси вар ки,

$$P^{-1}AP=J\equiv\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & \cdots & 0 & J_{m_l}(\lambda_l)\end{pmatrix},$$

$$J_{m_j}(\lambda_j)=\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \cdots & 0\\ 0 & \lambda_j & 1 \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & 0 & 0 \cdots & \lambda_j\end{pmatrix},\quad j=1,2,\dots,l;$$

бурада $m_1+m_2+\dots+m_l=n$; $J_{m_j}(\lambda_j)$ һүчрәси m_j-тәртибли квадрат матрисдир вә мүәјјән j_0 үчүн $m_{j_0}=1$ олдугда $J_{m_{j_0}}(\lambda_{j_0})$ бирелементли һүчрә олуб, јеканә λ_{j_0} елементи вар; λ_1, $\lambda_2,\dots,\lambda_l$ әдәдләри A матрисинин характеристик әдәдләридир вә мүхтәлиф олмаја биләрләр.

Әкәр (6) системиндә $x=Py$ әвәзләмәси апарсаг, y векторунун $y_1, y_2,\dots,y_n$ компонентләринә нәзәрән

$$\begin{cases}\dot y_1=\lambda_1 y_1+y_2,\\ \dot y_2=\lambda_1 y_2+y_3,\\ \dots\dots\dots\\ \dot y_{m_1}=\lambda_1 y_{m_1},\\ \dots\dots\dots\\ \dot y_{n-m_l+1}=\lambda_l y_{n-m_l+1}+y_{n-m_l+2},\\ \dot y_{n-m_l+2}=\lambda_l y_{n-m_l+2}+y_{n-m_l+3},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \dot y_n=\lambda_l y_n\end{cases} \qquad (7)$$

системи алынар. Бу системин биринчи m_1 сајда тәнлији $J_{m_1}(\lambda_1)$ һүчрәсинә вә с. сонунчу m_l сајда тәнлији исә $J_{m_l}(\lambda_l)$ һүчрәсинә ујғун алыныр. Һәр һансы һүчрә, мәсәлән, $J_{m_1}(\lambda_1)$ һүчрәси бирелементли оларса, она анчаг бир $\dot y_1=\lambda_1 y_1$ тәнлији ујғун кәлир.

Гејд едәк ки, P матриси гејри-мәхсуси матрис олдуғундан, (6) системинин дајаныглығы мәсәләси (7) системинин дајаныглығы мәсәләсинә еквивалентдир.

Теорем 3. *Сабит әмсаллы хәтти бирчинс системин I_0 јарымохунда дајаныглы олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт, A матрисинин бүтүн характеристик әдәдләринин һәгиги һиссәләри мүсбәт олмамагла, һәгиги һиссәси сыфыр олан характеристик әдәдләрә ујғун Жордан һүчрәләринин бирелементли олмасыдыр.*

Зәрурилиіин исбаты. Тутаг ки, (6) системи даіаныг-
лыдыр, лакин A матрисинин характеристик әдәдләри ичәри-
синдә һәгиги һиссәси мүсбәт оланы вар. Үмумилиіи позмадан,
фәрз едәк ки, $Re\,\lambda_1 = \alpha > 0$. Онда (7) системинин $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$,
$y_2(t) = 0, \dots, y_n(t) = 0$ һәлли үчүн

$$\lim_{t\to+\infty} \| y(t) \| = \lim_{t\to+\infty} | e^{\lambda_1 t} | = \lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = +\infty.$$

Бу исә (7) системинин даіаныглылығына зиддир.
Инди тутаг ки, А матрисинин һәгиги һиссәси сыфыр олан
характеристик әдәдләри ичәрисиндә еләси вар ки, она уіғун
олан Жордан һүчрәсинин тәртиби икидән аз деіил. Үмумилиіи
позмадан, фәрз едәк ки, $\lambda_1 = i\beta$ ($\beta = 0$ ола биләр) характерис-
тик әдәдинә уіғун олан $J_{m_1}(\lambda_1)$ Жордан һүчрәсиндә $m_1 \geqslant 2$.
Бу һалы арашдырмаг үчүн (7) системинин $y_j(0) = 1$, $j = 1$,
$2, \dots, m_1$, $y_j(0) = 0$, $j = m_1 + 1, \dots, n$ башланғыч шәртини өдә-
іән һәллини тапаг. Бунун үчүн (7) системинин биринчи m_1 тән-
ликләрини, сонунчудан башлаіараг ардычыл һәлл едәк. Онда
(7) системинин

$$y_1(t) = e^{i\beta t}\left(1 + t + \dots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}\right),$$

$$y_2(t) = e^{i\beta t}\left(1 + t + \dots + \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_{m_1}(t) = e^{i\beta t},$$

$$y_j(t) = 0, \quad j = m_1 + 1, \dots, n$$

һәллини аларыг вә $m_1 \geqslant 2$ олдуғундан, бу һәлл үчүн

$$\lim_{t\to+\infty} \| \varphi(t) \| \geqslant \lim_{t\to+\infty}\left(1 + t + \dots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}\right) = +\infty.$$

Бу исә (7) системинин даіаныглы олмасына зиддир.
Кафилиіин исбаты. Тутаг ки, $Re\,\lambda_j = \alpha_j < 0$, $j = 1$,
$2, \dots, \kappa$ ($\kappa < l$) вә $Re\,\lambda_j = 0$, $j = \kappa + 1, \dots, l$. Теоремин шәр-
тинә әсасән $J_{m_j}(\lambda_j)$, $j = \kappa + 1, \dots, l$ бирелементли олуб, іека-
нә λ_j елементи вар ($\lambda_{\kappa+1}, \lambda_{\kappa+2}, \dots, \lambda_l$ мүхтәлиф олмаіа биләр-
ләр). Онда (7) системинин үмуми һәлли

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}\left(c_1 + tc_2 + \dots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}c_{m_1}\right),$$

$$y_2(t) = e^{\lambda_1 t}\left(c_2 + tc_3 + \dots + \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!}c_{m_1}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_{m_1}(t) = e^{\lambda_1 t}\, c_{m_1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n(t) = e^{\lambda_l t} c_n$$

шәклиндә олар. $\sigma = \min(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_\kappa|)$ ишарә едәк
вә $0 < \nu < \sigma$ шәртини өдәіән ν үчүн $\mu = \sigma - \nu$ әдәдинә бахаг.
Онда $\alpha_j + \nu \leqslant -\mu$, $j = 1, 2, \dots, \kappa$ олар.

Компонентләри $c_1, c_2, \dots, c_n$ олан c вектору үчүн елә M
әдәди тапмаг олар ки, $t \geqslant 0$ олдугда

$$| y_1(t) | = \left| e^{\lambda_1 t}\left(c_1 + tc_2 + \dots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}c_{m_1}\right)\right| =$$

$$= e^{(\alpha_1+\nu)t}\left| e^{-\nu t}\left(c_1 + tc_2 + \dots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}c_{m_1}\right)\right| \leqslant Me^{-\mu t},$$

$$| y_2(t) | = \left| e^{\lambda_1 t}\left(c_2 + tc_3 + \dots + \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!}c_{m_1}\right)\right| =$$

$$= e^{(\alpha_1+\nu)t}\left| e^{-\nu t}\left(c_2 + tc_3 + \dots + \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!}c_{m_1}\right)\right| \leqslant Me^{-\mu t}, \dots,$$

$$| y_n(t) | = | e^{\lambda_l t} c_n | = | c_n | \leqslant M.$$

Бу бәрабәрсизликләрә әсасән, (7) системинин һәр бир һәл-
лини

$$\| y(t) \|^2 \leqslant M_1 e^{-2\mu t} + M_2$$

шәклиндә гиіметләндирмәк олар. Бурадан да 1-чи теоремә
әсасән (7) системинин даіаныглы олмасы алыныр.

Геід едәк ки, (6) системинин һәлләри $x(t) = Py(t)$ шәк-
линдә олдуғундан, сонунчу бәрабәрсизлиіә әсасән бу систе-
мин һәр бир һәлли үчүн елә M_3, M_4 әдәдләри тапмаг олар ки,

$$\| x(t) \|^2 \leqslant M_3 e^{-2\mu t} + M_4$$

бәрабәрсизлиіи өдәнәр.

Теорем 4. *Сабит әмсаллы хәтт бирчинс системин I_0
іарымохунда асимптотик даіаныглы олмасы үчүн A мат-
рисинин характеристик әдәдләринин һамысынын һәгиги һис-
сәләринин мәнфи олмасы зәрури вә кафидир.*

Исбаты. Зәрурилик 3-чү теоремдәки гаіда илә исбат
олунур.

Теоремин шәртләри дахилиндә (8) бәрабәрсизлиіи

$$\| x(t) \| \leqslant M_5 e^{-\mu t}, \quad t \in I_0 \ (\mu > 0) \qquad (9)$$

бәрабәрсизлиіи илә әвәз олунур вә бурадан да 2-чи теоремә
әсасән кафилиіин исбаты алыныр.

Исбат олунан теоремләр көстәрир ки, сабит әмсаллы хәтти
бирчинс системин даіаныглығы мәсәләсиндә A матрисинин
характеристик әдәдләринин һәгиги һиссәләринин ишарәләрини
билмәк әсас рол оінаіыр. A матрисинин характеристик әдәд-
ләри

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

шәклиндә һәгиги әмсаллы чохһәдлинин көкләри олдуғундан, бу чохһәдлинин көкләринин һәгиги һиссәләринин ишарәләрини мүәјјән етмәк кифајәтдир. Одур ки, һәгиги әмсаллы $f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ чохһәдлисини көтүрәк вә онун көкләринин һәгиги һиссәләринин мүсбәт олмамасы һаггында бир нечә әламәтлә таныш олаг. Үмумилији позмадан, $a_0 > 0$ көтүрүлүр.

Көкләринин һәгиги һиссәләри мәнфи олан $f(\lambda)$ чохһәдлисинә *Гурвич чохһәдлиси дејилир.*

Тәклиф 1. $f(\lambda)$ *чохһәдлисинин Гурвич чохһәдлиси олмасы үчүн* $a_1 > 0,\ a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ *олмасы зәруридир. Чохһәдлинин дәрәчәси* $n \leqslant 2$ *олдугда бу шәрт һәм дә кафидир.*

Доғрудан да, $f(\lambda)$ чохһәдлиси Гурвич чохһәдлиси исә онун көкләри $\lambda = -a$ $(a > 0)$, $\lambda = -\alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = -\alpha - i\beta$ $(\alpha > 0)$ шәклиндәдир. Демәли, $f(\lambda)$ чохһәдлиси $\lambda + a$, $\lambda + \alpha - i\beta$, $\lambda + \alpha + i\beta$ вә с. шәклиндә вуругларын һасили кими көстәрилә биләр. Бурадан ајдындыр ки, $f(\lambda)$ чохһәдлисинин әмсаллары мүсбәт олар.

Мисал 1. $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1 + 3i$, $\lambda_3 = 1 - 3i$ әдәдләри $f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 30$ чохһәдлисинин көкләридир. Әмсалларын мүсбәт олмасына бахмајараг $f(\lambda)$ чохһәдлиси Гурвич чохһәдлиси дејил.

Баш диагонал елементләри $a_1,\ a_2, \dots, a_n$ олан

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

квадрат матрисини дүзәлдәк вә онун баш диагонал минорларыны

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1}$$

илә ишарә едәк.

Тәклиф 2 (Гурвич теореми). $f(\lambda)$ *чохһәдлисинин Гурвич чохһәдлиси олмасы үчүн* $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ *шәртләринин өдәнмәси зәрури вә кафидир.*

Тәклиф 3 (Ленар—Шипар шәрти). $f(\lambda)$ *чохһәдлисинин Гурвич чохһәдлиси олмасы үчүн* $a_1 > 0,\ a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ *вә* $\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \Delta_{n-5} > 0, \dots$ *шәртләринин өдәнмәси зәрури вә кафидир.*

Тәклиф 4 (Михаjлов шәрти). $f(\lambda)$ *чохһәдлисинин Гурвич чохһәдлиси олмасы үчүн* $a_n \cdot a_{n-1} > 0$ *олмагла,*

$$a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \cdots = 0,$$
$$a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \cdots = 0$$

тәнликләринин көкләринин һамысынын һәгиги, мүсбәт, мүхтәлиф олмасы вә

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \cdots$$

шәртини өдәмәси зәрури вә кафидир.

Мисал 2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + 2x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 - 2x_2 - x_3 \end{cases}$$

системинин дајаныглығыны арашдыраг.

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda+1 & -2 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 12\lambda + 34$$

олдуғундан, $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = 68$. Онда Гурвич теореминә әсасән бахылан систем асимптотик дајаныглы олур.

Мисал 3. α вә β параметрләринин һансы гијмәтиндә

$$\dddot{x} + \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + 3x = 0$$

тәнлији асимптотик дајаныглыдыр?

Һәлли. Бурада $f(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 3$ олдуғундан, Ленар—Шипар шәртинә әсасән, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ вә $\Delta_2 = \alpha\beta - 3 > 0$ олдугда бахылан тәнлик асимптотик дајаныглы олур.

Мисал 4. $x^{V} + x^{IV} + 6\dddot{x} + 4\ddot{x} + 8\dot{x} + 3x = 0$ тәнлијинин асимптотик дајаныглы олдуғуну Михаjлов шәртинин көмәјилә көстәрәк. Бахылан тәнлик үчүн $a_{n-1} \cdot a_n = 8 \cdot 3 > 0$ вә $3 - 4\xi + \xi^2 = 0$, $8 - 6\eta + \eta^2 = 0$ тәнликләринин көкләри ($\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 3$, $\eta_1 = 2$, $\eta_2 = 4$) үчүн $0 < \xi_1 < \mu_1 < \xi_2 < \eta_2$ шәрти өдәнир. Демәли, бахылан тәнлик асимптотик дајаныглыдыр.

§ 3. ЛЈАПУНОВ ФУНКСИЈАЛАРЫ ҮСУЛУ

Бу параграфда D областынын n-өлчүлү фәзанын координат башланғычыны өз дахилиндә сахладығыны вә $f(t, 0) = 0$, $t \in I$ шәртинин өдәндијини фәрз едәрәк Лјапунов функсијаларынын көмәји илә (1) системинин тривиал һәллинин дајаныглығыны арашдырачағыг.

Тутаг ки, $v = v(t, x)$ функсијасы G чохлуғунда кәсилмәздир вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Әкәр $v(t, 0) = 0$,

$t \in I$ вә $v(t, x) \geqslant 0$ ($v(t, x) \leqslant 0$), $(t, x) \in G$ оларса, $v(t, x)$ функсијасына *ишарәси мүсбәт (ишарәси мәнфи)* функсија дејилир.

Ишарәси мүсбәт $v(t, x)$ функсијасы үчүн, D областында

$$v(t, x) \geqslant \omega(x) > 0, \quad (t, x) \in G, \quad x \neq 0,$$
$$v(t, x) = \omega(0) = 0, \quad t \in I$$

шәртләрини өдәјән вә кәсилмәз диференсиалланан $\omega(x)$ функсијасы варса, $v(t, x)$ функсијасына G чохлуғунда *мүсбәт мүәјјән*, $\omega(x)$-ә исә D областында мүсбәт мүәјјән функсија дејилир.

Ујғун гајда илә, ишарәси мәнфи $\tilde{v}(t, x)$ функсијасы үчүн D областында

$$\tilde{v}(t, x) \leqslant -\tilde{\omega}(x) < 0, \quad (t, x) \in G, \quad x \neq 0,$$
$$\tilde{v}(t, 0) = \tilde{\omega}(0) = 0, \quad t \in I$$

шәртләрини өдәјән кәсилмәз диференсиалланан вә мүсбәт мүәјјән $\tilde{\omega}(x)$ функсијасы варса, $\tilde{v}(t, x)$ функсијасына G-дә *мәнфи мүәјјән функсија* дејилир.

Дајаныглығын арашдырылмасы үчүн истифадә олунан белә $v(t, x)$ функсијасына *Лјапунов функсијасы* дејилир.

Адәтән, (1) системинин сағ тәрәфи t-дән ашкар асылы олмадыгда Лјапунов функсијасы олараг $\omega(x)$ көтүрүлүр.

Лемма. *Тутаг ки, $\omega(x)$ функсијасы D областында мүсбәт мүәјјән функсијадыр. Онда елә $h > 0$ әдәди вар ки, $0 < c < h$ шәртини өдәјән ихтијари c әдәди үчүн $\omega(x) = c$ сәвијјә сәтһләри координат башланғычына нәзәрән гапалы сәтһләрдир, јә'ни координат башланғычыны D областынын сәрһәди илә бирләшдирән ихтијари кәсилмәз әјри $\omega(x) = c$ сәтһини һеч олмаса бир нөгтәдә кәсир.*

Исбаты. Елә $R > 0$ әдәди көтүрәк ки, мәркәзи координат башланғычында вә радиусу R олан H_R күрәси тамамилә D областында јерләшсин. Бу күрәнин сәтһини S_R илә ишарә едәк. $\omega(x)$ функсијасы гапалы, мәһдуд S_R сферасы үзәриндә кәсилмәз олдуғундан, бурада минимумуну алыр. Бу минимуму h илә ишарә едәк. S_R сферасы үзәриндә η нөгтәси көтүрүб, $x(0) = 0$, $x(s_1) = \eta$ шәртләрини өдәјән вә $[0, s_1]$ парчасында кәсилмәз олан $x = x(s)$ функсијасы үчүн $\Phi(s) = \omega(x(s))$ функсијасына бахаг. Ајдындыр ки, $y = \Phi(s)$ функсијасы $[0, s_1]$ парчасында кәсилмәздир вә $\Phi(0) = \omega(x(0)) = 0$, $\Phi(s_1) = \omega(x(s_1)) = \omega(\eta) \geqslant h > 0$. Бурадан Коши теореминә әсасән, $0 < c < h$ шәртини өдәјән ихтијари c әдәди үчүн елә $s \in [0, s_1]$ нөгтәси вар ки, $\Phi(s) = \omega(x(s')) = c$ олур. Лемма исбат олунду.

Теорем 5. *Тутаг ки, G чохлуғунда мүсбәт мүәјјән олан елә $v(t, x)$ функсијасы вар ки, онун (1) системинә әсасән төрәмәси*

$$\dot{v}_{(1)}(t, x) \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} f_j(t, x) \leqslant 0, \quad (t, x) \in G \qquad (10)$$

олур. Онда (1) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныглыдыр.

Исбаты. $v(t, x)$ функсијасы мүсбәт мүәјјән олдуғундан D областында мүсбәт мүәјјән олан елә $\omega(x)$ функсијасы вар ки, $v(t, x) \geqslant \omega(x) > 0$, $x \neq 0$, шәрти өдәнир.

Ајдындыр ки, кифајәт гәдәр кичик $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн мәркәзи координат башланғычында вә радиусу ε олан H_ε күрәси S_ε сферасы илә бирликдә D областында јерләшәр. $\omega(x)$ функсијасынын S_ε сферасы үзәриндә алдығы ән кичик гијмәти ω_ε илә ишарә едәк. Онда $v(t, 0) = 0$, $t \in I$ олдуғундан, верилмиш ε әдәдинә көрә $0 < \delta < \varepsilon$ шәртини өдәјән елә δ әдәди сечмәк олар ки, $x \in H_\delta$, $t \in I$ үчүн $v(t, x) < \omega_\varepsilon$ олар. Сечилмиш $\delta > 0$ әдәди үчүн $0 < \|\xi\| < \delta$ шәртини өдәјән ихтијари ξ нөгтәси көтүрүб, (1) системинин $x(t_0) = \xi$ шәртини өдәјән һәллинә бахаг. Гојулмуш шәртләр дахилиндә бу мәсәләнин $[t_0, t_\xi)$ јарыминтервалында тә'јин олунан вә даваметдирилмәјән јеканә $x = \varphi(t, \xi)$ һәлли вар. Көстәрәк ки, $t \in [t_0, t_\xi)$ үчүн

$$\|\varphi(t, \xi)\| < \varepsilon. \qquad (11)$$

Доғрудан да, $\|\xi\| < \delta < \varepsilon$ олдуғундан, бу бәрабәрсизлик кичик $h > 0$ әдәди үчүн $[t_0, t_0 + h]$ $(t_0 + h < t_\xi)$ парчасында өдәнир. Әкәр бу бәрабәрсизлик $[t_0, t_\xi)$ јарыминтервалында өдәнмәсә, леммаја әсасән елә $t_1 \in (t_0, t_\xi)$ нөгтәси тапмаг олар ки, $t \in [t_0, t_1)$ олдугда (11) бәрабәрсизлији өдәнир вә $\|\varphi(t_1, \xi)\| = \varepsilon$ олур. Бурадан алырыг ки, $x^1 = \varphi(t, \xi)$ нөгтәси S_ε сферасы үзәриндә јерләшир. Дикәр тәрәфдән, (10) бәрабәрсизлијинә әсасән

$$v(t_1, x^1) - v(t_0, \xi) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{v}(t, \varphi(t, \xi))\, dt \leqslant 0$$

олур. Бурадан $v(t_0, \xi) \geqslant v(t_1, x^1) \geqslant \omega(x^1) \geqslant \omega_\varepsilon$. Бу исә $v(t_0, \xi) < \omega_\varepsilon$ шәртинә зиддир. Демәли, $[t_0, t_\xi)$ јарыминтервалында (11) бәрабәрсизлији өдәнир.

Гејд едәк ки, (11) бәрабәрсизлијинин өдәнмәсиндән $t_\xi = +\infty$ олдуғу алыныр. Доғрудан да, әкс һалда (јәни $t_\xi < +\infty$ олдугда) $\varphi(t, \xi)$ һәлли даваметдирилән һәлл олар.

Беләликлә, ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы $0 < \delta < \varepsilon$ шәртини өдәјән елә δ сечмәк олар ки, $\|\xi\| < \delta$ шәрти өдәндикдә, (1) системинин $x(t_0) = \xi$ башланғыч шәртини өдәјән $x = \varphi(t, \xi)$ һәлләри I јарымохунда тә'јин олунуб вә бу јарымохда $\|\varphi(t, \xi)\| < \varepsilon$ бәрабәрсизлији өдәнир. Бу исә (1) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглығы демәкдир.

Теорем 6. *Тутаг ки, G чохлуғунда мүсбәт мүәјјән олан елә $v(t, x)$ функсијасы вар ки, онун (1) системинә әсасән төрәмәси мәнфи мүәјјәндир вә I јарымохунда мүнтәзәм олараг $\lim\limits_{x \to 0} v(t, x) = 0$ шәрти өдәнир. Онда (1) системинин тривиал һәлли асимптотик дајаныглыдыр.*

Исбаты. 5-чи теоремин шәртләри өдәндијиндән $x = 0$ һәлли дајаныглыдыр. Она көрә дә $0 < \sigma < \delta$ шәртини өдәјән σ әдәди үчүн $0 < \|\xi\| < \sigma$ олдугда

$$\varphi(t, \xi) \in \overline{H}_\varepsilon, \quad t \in I \ (\overline{H}_\varepsilon = H_\varepsilon \cup S_\varepsilon)$$

олар. Көстәрәк ки,

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t, \xi) = 0. \tag{12}$$

Бунун үчүн $\Phi(t) = v(t, \varphi(t, \xi))$ функсијасына бахаг. Шәртә көрә $\dot{\Phi}(t) = \dot{v}_{(1)}(t, \varphi(t, \xi)) < 0, \ t \in I$ олдуғундан, $\Phi(t)$ функсијасы I јарымохунда чидди монотон азаландыр вә $\Phi(t) > 0$. Одур ки, сонлу $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = \inf\limits_I \Phi(t) = l \geqslant 0$ лимити вар. Тутаг ки, $l > 0$. Онда елә $\lambda > 0$ әдәди вар ки, $\|\varphi(t, \xi)\| \geqslant \lambda, \ t \in I$. Доғрудан да, әкс һалда елә $\{t_\kappa\}, \ t_\kappa \in I$ ардычыллығы сечмәк олар ки, $\lim\limits_{\kappa \to \infty} t_\kappa = +\infty$ вә $\lim\limits_{\kappa \to \infty} \varphi(t_\kappa, \xi) = 0$. Бурадан, теоремин шәртинә әсасән аларыг ки, $\lim\limits_{\kappa \to \infty} \Phi(t_\kappa) = \lim\limits_{\kappa \to \infty} v(t_\kappa, \varphi(t_\kappa, \xi)) = 0$.

Демәли, $l > 0$ олдугда $0 < \lambda \leqslant \|\varphi(t, \xi)\| < \varepsilon, \ t \in I$ олмалыдыр. Јә'ни $t \in I$ үчүн $\varphi(t, \xi) \in \overline{H}_\varepsilon \setminus H_\lambda$. Шәртә көрә $v(t, x)$ функсијасынын (1) системинә әсасән төрәмәси мәнфи мүәјјән олдуғундан елә мүсбәт мүәјјән $\omega_1(x)$ функсијасы вар ки,

$$\dot{v}_{(1)}(t, x) \leqslant -\omega_1(x) < 0, \ t \in I, x \in \overline{H}_\varepsilon \setminus H_\lambda.$$

Гапалы мәһдуд $\overline{H}_\varepsilon \setminus H_\lambda$ чохлуғунда $\omega_1(x)$ функсијасынын минимумуну m илә ишарә етсәк $(m > 0)$,

$$\dot{v}_{(1)}(t, x) \leqslant -m, \quad t \in I, \quad x \in \overline{H}_\varepsilon \setminus H_\lambda$$

олар. Онда

$$v(t, \varphi(t, \xi)) = v(t_0, \xi) + \int_{t_0}^{t} \dot{v}(\tau, \varphi(\tau, \xi))\, d\tau$$

бәрабәрлијинә әсасән аларыг ки,

$$v(t, \varphi(t, \xi)) \leqslant v(t_0, \xi) - m(t - t_0), \ t \geqslant t_0$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Бу бәрабәрсизлијин сағ тәрәфи кифајәт гәдәр бөјүк t-ләр үчүн мәнфи, сол тәрәфи исә һәмишә мүсбәтдир. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, $l = 0$ олмалыдыр, јә'ни

$$\lim_{t \to +\infty} v(t, \varphi(t, \xi)) = 0. \tag{13}$$

Бурадан да, (12) мүнасибәтинин доғрулуғу алыныр. Буну көстәрмәк үчүн $0 < \rho < \varepsilon$ шәртини өдәјән һәр һансы ρ әдәди көтүрәк вә гапалы, мәһдуд $\overline{H}_\varepsilon \setminus H_\rho$ областында $\omega(x)$ функсијасынын минимумуну ω_ρ илә ишарә едәк. Лимитин тә'рифинә әсасән (13) мүнасибәтиндән алырыг ки, елә $t_\rho > t_0$ вар ки, $t \geqslant t_\rho$ олдугда $v(t, \varphi(t, \xi)) < \omega_\rho$ олур. Бурадан, $\Phi(t) = v(t, \varphi(t, \xi))$ функсијасынын монотон азалан олмасына әсасән алырыг ки,

$$\|\varphi(t, \xi)\| < \rho, \ t > t_\rho \tag{14}$$

олмалыдыр. Доғрудан да, әкс һалда елә $t_1 > t_\rho$ нөгтәси тапмаг олар ки, $\|\varphi(t_1, \xi)\| \geqslant \rho$ олар. Бурадан $v(t_1, \varphi(t_1, \xi)) \geqslant \geqslant \omega(\varphi(t_1, \xi)) \geqslant \omega_\rho$ бәрабәрсизлији алыныр. Дикәр тәрәфдән, $t \geqslant t_\rho$ олдугда $v(t, \varphi(t, \xi)) < \omega_\rho$ олдуғундан, алынан зиддијјәт (14) бәрабәрсизлијинин доғрулуғуну көстәрир вә бурадан да, ρ ихтијари олдуғундан, (12) мүнасибәти алыныр. Бу исә (1) системинин тривиал һәллинин асимптотик дајаныглы олдуғуну көстәрир. Теорем исбат олунду.

Хүсуси һалда, (1) системинин сағ тәрәфи t-дән ашкар асылы олмадыгда, јә'ни

$$\dot{x} = f(x), \ f(0) = 0 \tag{15}$$

автоном системи үчүн 6-чы теорем ашағыдакы шәкилдә олур.

Теорем 7. *Тутаг ки, D областында өзү мүсбәт мүәјјән вә (15) системинә әсасән төрәмәси $\dot{\omega}_{(15)}(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} f_j(x)$ мәнфи мүәјјән олан $\omega(x)$ функсијасы вар. Онда (15) системинин тривиал һәлли асимптотик дајаныглыдыр.*

Исбаты. 5-чи теоремә әсасән, $x = 0$ һәлли дајаныглыдыр. Бу һәллин асимптотик дајаныглы олдуғуну көстәрмәк үчүн әввәлчә 6-чы теоремин исбат гајдасы илә $\Phi(t) = \omega(\varphi(t, \xi))$ функсијасынын чидди монотон азалан вә $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \omega(\varphi(t, \xi)) = 0$ олдуғу көстәрилир. Бурадан, јенә дә 6-чы теоремин исбат гајдасы илә көстәрмәк олар ки, $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t, \xi) = 0$. Бу исә көстәрир ки, (15) системинин $x = 0$ һәлли асимптотик дајаныглыдыр.

Мисал 1.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2^2, \\ \dot{x}_2 = x_2 x_1^2, \end{cases}$$

системинин $x_1 = 0, \ x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглығыны Лјапунов функсијалары үсулу илә арашдыраг. Бунун үчүн $\omega(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$ функсијасына бахаг. Ајдындыр ки, бу

функсиjа мүсбәт мүәjjән функсиjадыр. Дикәр тәрәфдән, онун бахылан системә әсасән төрәмәси

$$\dot{\omega}(x_1, x_2) = \frac{\partial\omega}{\partial x_1}(-x_1 x_2^2) + \frac{\partial\omega}{\partial x_2}(x_2 x_1^2) = -4x_1^2 x_2^2 + 2x_1^2 x_2^2 = -2x_1^2 x_2^2$$

олдуғундан, $\dot{\omega}(x_1, 0) = \dot{\omega}(0, x_2) = 0$ вә $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ олдугда $\dot{\omega}(x_1, x_2) < 0$. Демәли, $\omega(x_1, x_2)$ функсиjасынын өзү мүсбәт мүәjjән, бахылан системә әсасән төрәмәси исә ишарәси мәнфи функсиjадыр. Одур ки, 5-чи теоремә әсасән $x_1 = 0, x_2 = 0$ таразлыг вәзиjjәти даjаныглыдыр.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, системин истәнилән $x_1(t)$, $x_2(t)$ һәлли үчүн $x_1^2(t) + x_2^2(t) = c$ ($c \geqslant 0$ ихтиjари сабитдир) мүнасибәти доғрудур. Бурадан аjдындыр ки, $\lim_{t\to+\infty} \| x(t) \| \neq 0$. Бу бир даһа көстәрир ки, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзиjjәти асимптотик даjаныглы деjил.

Мисал 2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 9x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 - 0{,}5x_2^3 \end{cases}$$

системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзиjjәтинин асимптотик даjаныглы олдуғуну көстәрәк.

Ljапунов функсиjасы олараг $\omega(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2$ функсиjасыны көтүрәк. Бу функсиjанын бахылан системә әсасән төрәмәсини тапаг:

$$\dot{\omega}(x_1, x_2) = \frac{\partial\omega}{\partial x_1}(-5x_1 - 9x_2 - x_1^3) + \frac{\partial\omega}{\partial x_2}(3x_1 - 4x_2 - 0{,}5x_2^3) = -(10x_1^2 + 24x_2^2 + 2x_1^4 + 3x_2^4).$$

Аjдындыр ки, $\omega(x_1, x_2)$ функсиjасынын өзү мүсбәт мүәjjән, системә әсасән төрәмәси исә мәнфи мүәjjәндир. Онда 7-чи теоремә әсасән, бахылан системин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзиjjәти асимптотик даjаныглыдыр.

Исбат олунан теоремләр көстәрир ки, Ljапунов функсиjалары үсулу илә даjаныглығы өjрәнәркән әсас чәтинликләрдән бири Ljапунов функсиjасынын варлығы вә гурулмасы мәсәләсидир.

Теорем 8. *Тутаг ки, A матрисинин характеристик әдәдләринин һамысынын һәгиги һиссәси мәнфидир. Онда елә мүсбәт мүәjjән* $\omega(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij} x_i x_j$ *квадратик формасы вар ки, онун (6) системинә әсасән төрәмәси, мүәjjән $\beta > 0$ әдәди үчүн*

$$\dot{\omega}_{(6)}(x) \leqslant -\beta\omega(x) \qquad (16)$$

бәрабәрсизлиjини өдәjир.

Исбаты. Мә'лумдур ки, (V фәсил, § 5) (6) системинин $x(0) = \xi$ башланғыч шәртини өдәjән һәллини

$$\varphi(t, \xi) = e^{At}\xi \qquad (17)$$

шәклиндә вермәк олар. Аjдындыр ки, $\Phi^i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ илә e^{At} матрисинин i-чи сүтунуну ишарә етсәк, бу һәлли

$$\varphi(t, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \Phi^i(t) \qquad (18)$$

шәклиндә jазмаг олар.

Шәртә көрә A матрисинин характеристик әдәдләринин һәгиги һиссәси мәнфи олдуғундан, елә $\delta > 0$ әдәди вар ки, (9) бәрабәрсизлиjинә әсасән

$$\| \varphi(t, \xi) \| \leqslant M \| \xi \| e^{-\delta t}, \quad t \geqslant 0. \qquad (19)$$

Она көрә

$$\omega(\xi) = \int_0^\infty \| \varphi(\tau, \xi) \|^2 d\tau \qquad (20)$$

интегралы сонлудур. Бу интегралда

$$\| \varphi(t, \xi) \|^2 = (\varphi(t, \xi), \varphi(t, \xi))$$

олдуғуну нәзәрә алсаг, (18) бәрабәрлиjинә әсасән

$$\omega(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^\infty (\Phi^i(\tau), \Phi^j(\tau)) d\tau \right) \xi_i \xi_j$$

олур. Бурада

$$\omega_{ij} = \int_0^\infty (\Phi^i(\tau), \Phi^j(\tau)) d\tau, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

ишарә едәк. Аjдындыр ки, алынан $\omega(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \omega_{ij} \xi_i \xi_j$ квадратик формасы мүсбәт мүәjjәндир.

Дикәр тәрәфдән, (17) дүстуруна әсасән

$$\varphi(t, \varphi(s, \xi)) = e^{At} \varphi(s, \xi) = e^{At} e^{As} \xi = e^{A(t+s)} \xi = \varphi(t + s, \xi)$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\omega(\varphi(t, \xi)) = \int_0^\infty \| \varphi(\tau, \varphi(t, \xi)) \|^2 d\tau = \int_0^\infty \| \varphi(\tau + t, \xi) \|^2 d\tau$$

олар. Бурада $\tau + t = s$ әвәз едиб, алынан

$$\omega(\varphi(t, \xi)) = \int_t^\infty \|\varphi(s, \xi)\|^2 ds$$

функсиjасынын $t=0$ нөгтәсиндә төрәмәсини тапаг:

$$\dot{\omega}_{(6)}(\xi) = \frac{d}{dt}\omega(\varphi(t, \xi))|_{t=0} = -\|\varphi(t, \xi)\|^2|_{t=0} = -\|\xi\|^2. \quad (21)$$

Мәркәзи координат башланғычында олан ваһид радиуслу S_1 сферасы үзәриндә $\omega(\xi)$ функсиjасынын минимум вә максимум гиjмәтләрини уjғун олараг μ вә ν илә ишарә едәк. (Аjдындыр ки, $\mu > 0$, $\nu > 0$). Онда $x \in S_1$ үчүн

$$\mu \leqslant \omega(x) \leqslant \nu \quad (22)$$

олар. Һәр бир ξ нөгтәси үчүн елә λ әдәди вә $x \in S_1$ нөгтәси вар ки, $\xi = \lambda x$. Онда $\|\xi\|^2 = \|\lambda x\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2 = \lambda^2$ олдуғундан, (22) бәрабәрсизлиjинин һәр тәрәфини λ^2-на вурмагла

$$\mu\|\xi\|^2 \leqslant \omega(\xi) \leqslant \nu\|\xi\|^2 \quad (23)$$

бәрабәрсизлиjини аларыг. Бурадан алынан

$$-\|\xi\|^2 \leqslant -\frac{1}{\nu}\omega(\xi).$$

бәрабәрсизлиjини (21)-дә нәзәрә алсаг,

$$\dot{\omega}_{(6)}(\xi) \leqslant -\frac{1}{\nu}\omega(\xi).$$

Теорем исбат олунду.

Бу теорем көстәрир ки, асимптотик даjаныглы сабит әмсаллы систем үчүн квадратик форма шәклиндә Лjапунов функсиjасы гурмаг олар.

Мисал 3. Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

системи асимптотик даjаныглыдыр. Онда исбат етдиjимиз теоремә әсасән, системин $\omega(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ шәклиндә Лjапунов функсиjасы вар. Бу квадратик форманын мүсбәт муәjjән олмасы үчүн $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ олмалыдыр. Дикәр тәрәфдән, $\omega(x_1, x_2)$ функсиjасынын системә әсасән төрәмәси

$$\dot{\omega}(x_1, x_2) = 2(a + 2b)x_1^2 + 2(2c - 3a - 3b)x_1x_2 - 2(3b + 4c)x_2^2$$

олдуғундан, $\dot{\omega}(x_1, x_2)$ төрәмәсинин мәнфи муәjjән олмасы үчүн $2(a+2b) < 0$, $-4(a+2b)(3b+4c) - (2c-3a-3b)^2 > 0$ олмалыдыр.

Беләликлә, $\omega(x_1, x_2)$ функсиjасынын бахылан системин Лjапунов функсиjасы олмасы үчүн a, b, c әмсаллары

$$a > 0,\ ac - b^2 > 0,\ 2(a+2b) < 0,$$
$$-4(a+2b)(3b+4c) - (2c - 3a - 3b)^2 > 0$$

бәрабәрсизликләрини өдәмәлидирләр. Бурадан, хүсуси һалда, $a = 1$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = 1$ көтүрсәк, $\omega(x_1, x_2) = x_1^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 + x_2^2$ функсиjасы бахылан систем үчүн Лjапунов функсиjасы олар.

§ 4. БИРИНЧИ JАХЫНЛАШМАЛАРА НӘЗӘРӘН ДАJАНЫГЛЫГ ҺАГГЫНДА ЛJАПУНОВ ТЕОРЕМИ

Бу параграфда

$$\dot{x} = Ax + f(t, x) \quad (24)$$

шәклиндә олан системин тривиал һәллинин даjаныглығы араштырылыр. Бурада A сабит матрис, $f(t, x)$ исә $f_i(t, x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ компонентләри $G = I \times D$ чохлуғунда кәсилмәз олан вектор-функсиjадыр; $I = \{t_0 \leqslant t < +\infty\}$, D исә n өлчүлү Евклид фәзасынын координат башланғычыны өз дахилиндә сахлаjан мәһдуд областдыр. Әлавә олараг фәрз едәҹәjик ки, t-jә нәзәрән I-дә мүнтәзәм олараг,

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0 \quad (25)$$

шәрти өдәнир. Хәтти бирҹинс

$$\dot{x} = Ax \quad (6$$

системинә, (24) геjри-хәтти системинин *биринҹи jахынлашмалар системи* деjилир.

Геjд едәк ки,

$$\dot{x} = F(t, x) \quad (26)$$

системиндә $F(t, x)$ вектор-функсиjасы муәjjән шәртләри өдәдикдә, бу системи (24) шәклиндә системә кәтирмәк олар. Доғрудан да, тутаг ки, $F(t, x)$ вектор-функсиjасы вә $F_x(t, x)$ матрис-функсиjасы G чохлуғунда кәсилмәздирләр, $F(t, 0) = 0$, $t \in I$, һәм дә $F_x(t, 0) = A_1$ сабит матрисдир. Онда Теjлор дүстуруна әсасән

$$F(t, x) = F(t, 0) + F_x(t, 0)x + F_1(t, x)$$

олдуғундан, (26) системи

$$\dot{x} = A_1x + F_1(t, x).$$

шәклиндә jазыла биләр вә аjдындыр ки, $F_1(t, x)$ вектор-функсиjасы (25) шәртини өдәjир.

Теорем 9. *Тутаг ки, (6) системи асимптотик дајаныглыдыр вә (25) шәрти өдәнир. Онда (24) системинин $x=0$ таразлыг вәзијјәти асимптотик дајаныглыдыр.*

Исбаты. (6) системи асимптотик дајаныглы олдуғундан, 8-чи теорәмә әсасән елә мүсбәт мүәјјән $\omega(x)=\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}x_i x_j$ квадратик формасы вардыр ки, онун (6) системинә әсасән төрәмәси (16) бәрабәрсизлијини өдәјир.

Көстәрәк ки, $\omega(x)$ квадратик формасы һәм дә (24) системи үчүн Љапунов функсијасыдыр. Бу форманын (24) системинә әсасән төрәмәси, (16) бәрабәрсизлијинә әсасән

$$\dot{\omega}_{(24)}(x)=\dot{\omega}_{(6)}(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}f_i(t,x)\leqslant-$$
$$-\beta\omega(x)+(\operatorname{grad}\omega(x),\ f(t,x)) \tag{27}$$

шәртини өдәјир; бурада

$$\operatorname{grad}\omega(x)=\left\{\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_1},\ \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_n}\right\}.$$

Дикәр тәрәфдән, $\frac{\partial\omega}{\partial x_j}$ төрәмәләри $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләринә нәзәрән хәтти форма олдуғундан

$$\|\operatorname{grad}\omega(x)\|\leqslant l\,\|x\|,\qquad l=\mathrm{const}>0.$$

Онда (23) бәрабәрсизликләринә әсасән

$$\|\operatorname{grad}\omega(x)\|\leqslant\frac{l}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\omega(x)}. \tag{28}$$

Јухарыда исбат едилән леммаја әсасән, кифајәт гәдәр кичик $b>0$ әдәди үчүн $\omega(x)\leqslant b$ шәртини өдәјән x нөгтәләри чохлуғу, n өлчүлү Евклид фәзасынын координат башланғычыны дахилиндә сахлајан гапалы, мәһдуд област олур. Бу гапалы областы Δ_b илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, b әдәдини кичик көтүрсәк, $\Delta_b\subset D$ олар. Белә b-ләр үчүн $f(t,x)$ вектор-функсијасы $I\times\Delta_b$ чохлуғунда кәсилмәз олдуғундан вә (25) шәртини өдәдијиндән, елә мүсбәт, монотон артан вә $\lim_{r\to 0}\Omega(r)=0$ шәртини өдәјән $\Omega(r)$ функсијасы вардыр ки, (VI фәсил, лемма 1) $(t,x)\in I\times\Delta_b$ олдугда

$$\|f(t,x)\|\leqslant\Omega(\|x\|)\,\|x\| \tag{29}$$

мүнасибәти өдәнир. Бурадан, (23) бәрабәрсизлијинә әсасән

$$\|f(t,x)\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\omega(x)}\,\Omega\left(\sqrt{\frac{\omega(x)}{\mu}}\right).$$

Бу бәрабәрсизлијә вә (28) бәрабәрсизлијинә әсасән

$$|(\operatorname{grad}\omega(x),\ f(t,x))|\leqslant\frac{l}{\mu}\,\omega(x)\,\Omega\left(\sqrt{\frac{\omega(x)}{\mu}}\right)$$

олар. Онда (27) бәрабәрсизлијини

$$\dot{\omega}_{(24)}(x)\leqslant-\beta\omega(x)+\frac{l}{\mu}\,\omega(x)\,\Omega\left(\sqrt{\frac{\omega(x)}{\mu}}\right)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Верилмиш $\beta>0$ әдәдинә көрә $0<c\leqslant b$ шәртини өдәјән елә c әдәди сечәк ки, $\frac{l}{\mu}\,\Omega\left(\sqrt{\frac{c}{\mu}}\right)\leqslant\frac{\beta}{2}$ олсун. Онда $\omega(x)\leqslant c$ бәрабәрсизлији илә тә'јин олунан гапалы, мәһдуд Δ_c областында

$$\dot{\omega}_{(24)}(x)\leqslant-\beta\omega(x)+\frac{l}{\mu}\,\Omega\left(\sqrt{\frac{c}{\mu}}\right)\omega(x)\leqslant-\frac{\beta}{2}\,\omega(x) \tag{30}$$

бәрабәрсизлији өдәнәр.

Алынан бәрабәрсизлик көстәрир ки, мүсбәт мүәјјән $\omega(x)$ квадратик формасынын (24) системинә әсасән төрәмәси мәнфи мүәјјәндир. Бурадан да, 6-чы теоремә әсасән алырыг ки, (24) системинин $x=0$ таразлыг вәзијјәти асимптотик дајаныглыдыр.

Мисал 1.

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+2x_2+(tx_2-x_1)^2+t^2,\\ \dot{x}_2=-x_1+2tx_2-(x_2+1)^2+2t+2\end{cases} \tag{31}$$

системинин $x_1=t^2$, $x_2=t$ һәллинин дајаныглы олуб-олмамасыны јохлајаг. Бу системдә

$$x_1=y_1+t^2,\quad x_2=y_2+t$$

әвәзләмәси апарсаг, бахылан һәллин дајаныглығы мәсәләси

$$\begin{cases}\dot{y}_1=-y_1+2y_2+(ty_2-y_1)^2,\\ \dot{y}_2=-y_1-2y_2-y_2^2\end{cases} \tag{32}$$

системинин $y_1=0$, $y_2=0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглығы арашдырмаға кәтириләр. Алынан систем (24) шәклиндәдир вә (25) шәрти өдәнир. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, ујғун

$$\begin{cases}\dot{y}_1=-y_1+2y_2,\\ \dot{y}_2=-y_1-2y_2\end{cases}$$

хәтти бирчинс системи асимптотик дајаныглыдыр. Онда 9-чу теоремә әсасән, (32) системинин $y_1=0$, $y_2=0$ таразлыг вәзијјәти вә демәли, (31) системинин $x_1=t^2$, $x_2=t$ һәлли асимптотик дајаныглыдыр.

Тутаг ки,

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1)$$

системи верилмишдир; бурада $f(t, x)$ вектор-функсијасы 1-чи параграфда гојулан шәртләри өдәјир вә $f(t, 0) = 0$ $t \in I$. Бу системин $x = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныгсызлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 10 (*Четајев*). *Тутаг ки, мәркәзи координат башлангычында вә радиусу $\varepsilon_0 > 0$ олан гапалы $\overline{H}_{\varepsilon_0} \subset D$ күрәсиндә кәсилмәз диференсиалланан $\omega(x)$ функсијасы вә $U \subset H_{\varepsilon_0}$ областы вар ки,*

1) $x = 0$ нөгтәси U областынын сәрһәдиндә јерләшир вә бу областда $\omega(x) > 0$;

2) $\omega_{(1)}(x) = (\mathrm{grad}\,\omega(x),\ f(t, x)) > 0$, $t \in I$, $x \in U$ белә ки, һәр бир $\alpha > 0$ әдәдинә көрә елә $\beta > 0$ әдәди вар ки, $\omega(x) \geq \alpha$ олдугда, $\omega_{(1)}(x) \geq \beta$ олур;

3) U областынын H_{ε_0} күрәсиндә јерләшән сәрһәд нөгтәләри үчүн $\omega(x) = 0$.

Онда (1) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныгсыздыр.

Исбаты. Кифајәт гәдәр кичик $\delta > 0$ әдәди көтүрүб, $0 < \|\xi\| < \delta$ шәртини өдәјән $\xi \in U$ үчүн (1) системинин $x = \varphi(t, \xi)$ һәллинә бахаг. Онда мүәјјән $h > 0$ әдәди үчүн $\varphi(t, \xi) \in U$, $t \in [t_0,\ t_0 + h]$.

Теоремин 2-чи шәртинә әсасән $[t_0,\ t_0 + h]$ парчасында

$$\Phi(t) = \omega(\varphi(t, \xi)) > 0 \text{ вә } \dot{\Phi}(t) = \dot{\omega}(\varphi(t, \xi)) > 0$$

олур. Демәли, $\Phi(t)$ функсијасы һәмин парчада чидди монотон артандыр. Она көрә дә $\varphi(t, \xi) \in U$ шәртини өдәјән бүтүн $t \geq t_0$ нөгтәләри үчүн

$$\Phi(t) = \omega(\varphi(t, \xi)) \geq \omega(\varphi(t_0, \xi)) = \omega(\xi) = \alpha > 0, \quad (33)$$

$$\dot{\Phi}(t) = \dot{\omega}(\varphi(t, \xi)) \geq \beta > 0. \quad (34)$$

Ахырынчы бәрабәрсизлији t_0-дан t-јә гәдәр интегралламагла аларыг ки,

$$\omega(\varphi(t, \xi)) \geq \omega(\varphi(t_0, \xi)) + \beta(t - t_0), \quad t \geq t_0.$$

Бурадан ајдындыр ки, $\varphi(t, \xi) \in U$, $t \in I$ оларса, t артдыгча $\Phi(t) = \omega(\varphi(t, \xi))$ функсијасы гејри-мәһдуд артар. Бу исә $\omega(x)$ функсијасынын гапалы, мәһдуд $\overline{H}_{\varepsilon_0}$ күрәсиндә мәһдудлуғуна зиддир.

Демәли, истәнилән $t \geq t_0$ үчүн $\varphi(t, \xi) \in U$ ола билмәз. Она көрә дә елә $t_1 > t_0$ аны вар ки, $t \in [t_0, t_1)$ үчүн $\varphi(t, \xi) \in U$ вә $\varphi(t_1, \xi)$ нөгтәси U областынын сәрһәдиндә јерләшир. Хүсуси һалда, $\varphi(t_1, \xi) \in H_{\varepsilon_0}$ оларса, теоремин 3-чү шәртинә әсасән

$$\omega(\varphi(t_1, \xi)) = 0 \quad (35)$$

олмалыдыр. Дикәр тәрәфдән, (33) бәрабәрсизлијиндән

$$\omega(\varphi(t_1, \xi)) \geq \alpha > 0$$

олдуғу алыныр. Бу исә (35) шәртинә зиддир. Алынан зиддијәт көстәрир ки, $\varphi(t_1, \xi)$ нөгтәси H_{ε_0} күрәсинин дахилиндә јерләшә билмәз. Демәли, $\|\varphi(t_1, \xi)\| \geq \varepsilon_0$ олмалыдыр. Бурадан алыныр ки, (1) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныгсыздыр. Теорем исбат олунду.

Мисал 1.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2^2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 x_2 + x_2^3 \end{cases} \quad (36)$$

системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныгсыз олдуғуну көстәрәк. Бу систем үчүн $\omega(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ функсијасына бахаг. U областы олараг $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ дүз хәтләри арасында галан вә $x_1 > 0$ олан нөгтәләр чохлуғуну көтүрәк. Ајдындыр ки, (0, 0) нөгтәси U областынын сәрһәд нөгтәсидир вә ихтијари $(x_1, x_2) \in U$ үчүн $\omega(x_1, x_2) > 0$ олур. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\omega_{(36)}(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2)\,\omega(x_1, x_2) > 0$, $(x_1, x_2) \in U$. Бундан башга $\omega(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ олдуғундан, истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн, U областынын H_ε күрәсинә дахил олан (x_1, x_2) сәрһәд нөгтәләриндә $\omega(x_1, x_2) = 0$.

Дикәр тәрәфдән, $\omega_{(36)}(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2)\,\omega(x_1, x_2)$ ифадәсиндән ајдындыр ки, истәнилән $\alpha > 0$ әдәдинә көрә $\omega(x_1, x_2) \geq \alpha$ олдугда $\omega_{(36)}(x_1, x_2) \geq 2(x_1^2 + x_2^2)\,\alpha \geq 2\alpha^2$ олур.

Демәли, Четајев теореминин бүтүн шәртләри өдәнир. Она көрә дә (36) системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныгсыздыр.

Биринчи јахынлашмалара нәзәрән дајаныгсызлығы арашдырмаг үчүн

$$\dot{x} = Ax + f(t, x) \quad (24)$$

системинә бахаг. Бурада A сабит матрисдир, $f(t, x)$ вектор-функсијасы исә t-јә нәзәрән I-дә мүнтәзәм олараг

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|f(t, x)\|}{\|x\|} = 0 \quad (25)$$

шәртини өдәјир.

Теорем 11. *Тутаг ки, A матрисинин характеристик әдәдләриндән һеч олмаса биринин һәгиги һиссәси мүсбәтдир вә (25) шәрти өдәнир. Онда (24) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәти дајаныгсыздыр.*

Исбаты. Мә'лумдур ки, J матриси A матрисинин каноник Жордан формасы исә, елә гејри-мәхсуси P матриси вар ки,

$P^{-1}AP = J$ (бах: V фәсил, § 1). J матрисинин һүчрәләрини $J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), \ldots, J_{m_\kappa}(\lambda_\kappa), J_{m_{\kappa+1}}(\lambda_{\kappa+1}), \ldots, J_{m_l}(\lambda_l)$ илә ишарә едәк вә тутаг ки, $\mathrm{Re}\,\lambda_r = \alpha_r > 0$, $r = 1, 2, \ldots, \kappa$ $(1 \leqslant \kappa < l)$, $\mathrm{Re}\,\lambda_r = \alpha_r \leqslant 0$, $r = \kappa + 1, \ldots, l$.

Ајдындыр ки (24) системиндә $x = Py$ әвәзләмәси апарсаг,

$$\dot{y} = Jy + P^{-1} f(t, Py)$$

системини аларыг.

Ихтијари $\gamma > 0$ әдәди үчүн баш диагонал елементләри 1, $\gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{n-1}$ олан Q диагонал матриси көтүрәрәк сонунчу системдә $y = Qz$ әвәзләмәси апараг. Бу заман

$$\dot{z} = Q^{-1} JQz + Q^{-1} P^{-1} f(t, PQz)$$

системини вә ја компонентләрлә јазсаг,

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + \gamma z_2 + g_1(t, z), \\ \dot{z}_2 = \lambda_1 z_2 + \gamma z_3 + g_2(t, z), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{z}_{m_1} = \lambda_1 z_{m_1} + g_{m_1}(t, z), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{z}_{n-m_l+1} = \lambda_l z_{n-m_l+1} + \gamma z_{n-m_l+2} + g_{n-m_l+1}(t, z), \\ \dot{z}_{n-m_l+2} = \lambda_l z_{n-m_l+2} + \gamma z_{n-m_l+3} + g_{n-m_l+2}(t, z), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{z}_n = \lambda_l z_n + g_n(t, z) \end{cases} \tag{37}$$

системини аларыг, бурада $g_1(t, z), g_2(t, z), \ldots, g_n(t, z)$ функсијалары $g(t, z) = Q^{-1} P^{-1} f(t, PQz)$ вектор-функсијасынын компонентләридир.

Гејд едәк ки, һәр һансы һүчрә, мәсәлән, $J_{m_1}(\lambda_1)$ бир елементли олдугда, (37) системиндә она ујғун анчаг бир

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + g_1(t, z)$$

тәнлији вар.

Апарылан әвәзләмәләрдән ајдындыр ки, P вә Q матрисләри гејри-мәхсуси матрисләр олдуғундан, (24) системинин $x = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглығы мәсәләси, (37) системинин $z = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглығы мәсәләсинә еквивалентдир.

Гејд едәк ки, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ әдәдләри, үмумијјәтлә, комплекс әдәдләр олдуғундан, (37) системинин һәлләри, үмумијјәтлә, комплекс функсијалардыр. Она көрә $z_j = u_j + iv_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ гәбул етсәк, $|z_j|^2 = z_j \bar{z}_j = u_j^2 + v_j^2$ олар.

Инди $p = m_1 + m_2 + \cdots + m_\kappa$ ишарә едиб, $\omega(z) = \sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{n} |z_j|^2$ квадратик формасыны дүзәлдәк вә онун (37) системинә әсасән төрәмәсини һесаблајаг:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{(37)}(z) &= \sum_{j=1}^{p} (\dot{z}_j \bar{z}_j + z_j \dot{\bar{z}}_j) - \sum_{j=p+1}^{n} (\dot{z}_j \bar{z}_j + z_j \dot{\bar{z}}_j) = \\ &= 2 \sum_{j=1}^{p} \alpha_j |z_j|^2 - 2 \sum_{j=p+1}^{n} \alpha_j |z_j|^2 + \gamma \sum_{j=1}^{p-1} (z_j \bar{z}_{j+1} + \bar{z}_j z_{j+1}) - \\ &- \gamma \sum_{j=p+1}^{n-1} (z_j \bar{z}_{j+1} + \bar{z}_j z_{j+1}) + \sum_{j=1}^{p} (\bar{z}_j g_j(t, z) + z_j \bar{g}_j(t, z)) - \\ &- \sum_{j=p+1}^{n} (\bar{z}_j g_j(t, z) + z_j \bar{g}_j(t, z)). \end{aligned} \tag{38}$$

Гејд едәк ки, $\dot{\bar{z}}_j$ төрәмәсини тапмаг үчүн (37) системинин ујғун тәнлијиндән комплекс гошма тәнлијә кечмәк лазымдыр. $|z_j \bar{z}_{j+1}| \leqslant \frac{1}{2} (|z_j|^2 + |z_{j+1}|^2)$ бәрабәрсизлијини нәзәрә алсаг,

$$\left| \sum_{j=1}^{p-1} (z_j \bar{z}_{j+1} + \bar{z}_j z_{j+1}) \right| \leqslant \sum_{j=1}^{p-1} (|z_j|^2 + |z_{j+1}|^2),$$

$$\left| \sum_{j=p+1}^{n-1} (z_j \bar{z}_{j+1} + \bar{z}_j z_{j+1}) \right| \leqslant \sum_{j=p+1}^{n-1} (|z_j|^2 + |z_{j+1}|^2).$$

Дикәр тәрәфдән, (25) шәрти өдәндијиндән, (29) бәрабәрсизлијинә әсасән асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\| g(t, z) \| = \| Q^{-1} P^{-1} f(t, PQz) \| \leqslant \Omega_1(\| z \|) \| z \|.$$

Бурада $\Omega_1(r)$ функсијасы $r > 0$ областында монотон артан вә $\lim_{r \to +0} \Omega_1(r) = 0$ шәртини өдәјән функсијадыр. Бу бәрабәрсизлијә әсасән асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\left| \sum_{j=1}^{p} (\bar{z}_j g_j(t, z) + z_j \bar{g}_j(t, z)) - \sum_{j=p+1}^{n} (\bar{z}_j g_j(t, z) + z_j \bar{g}_j(t, z)) \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{j=1}^{n} |z_j| \, |g_j(t, z)| \leqslant 2n \Omega_1(\| z \|) \|z\|^2.$$

Алынмыш гијмәтләри (38) бәрабәрлијиндә нәзәрә алсаг,

$$\dot{\omega}_{(37)}(z) \geqslant 2 \sum_{j=1}^{p} (\alpha_j - 2\gamma) |z_j|^2 -$$

$$- 2 \sum_{j=p+1}^{n} (\alpha_j + 2\gamma) |z_j|^2 - 2n \Omega_1(\| z \|) \| z \|^2$$

олар. Бу бәрабәрсизлији дә, $\|z\|^2=\sum_{j=1}^{p}|z_j|^2+\sum_{j=p+1}^{n}|z_j|^2$ олдуғундан,

$$\dot\omega_{(37)}(z)\geqslant 2\Big\{\sum_{j=1}^{p}[\alpha_j-2\gamma-n\Omega_1(\|z\|)]\,|z_j|^2-$$

$$-\sum_{j=p+1}^{n}[\alpha_j+2\gamma+n\Omega_1(\|z\|)]\,|z_j|^2\Big\}. \qquad (39)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Тутаг ки, $\varepsilon>0$ әдәди $\varepsilon<\frac{1}{6}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant k}\{\alpha_j\}$ шәртини өдәјир вә јухарыда ихтијари көтүрүлән γ әдәдини елә сечәк ки, $0<\gamma<\varepsilon$ олсун.

Дикәр тәрәфдән, $\lim\limits_{r\to+0}\Omega_1(r)=0$ олдуғундан, верилмиш ε әдәдинә көрә елә $\delta>0$ әдәди тапмаг олар ки, $\|z\|<\delta$ олдугда $n\Omega_1(\|z\|)<\varepsilon$ олар. Онда (39) бәрабәрсизлијиндән

$$\dot\omega_{(37)}(z)\geqslant 2\Big\{\sum_{j=1}^{p}(\alpha_j-3\varepsilon)\,|z_j|^2-\sum_{j=p+1}^{n}(\alpha_j+3\varepsilon)\,|z_j|^2\Big\}$$

бәрабәрсизлији алынар. Бурадан да, ε-нун сечилмә гајдасына көрә $\alpha_j-3\varepsilon>3\varepsilon$, $j=1,2,\dots,p$ вә $\alpha_j\leqslant 0$, $j=p+1,\dots,n$ олдуғундан алырыг ки,

$$\dot\omega_{(37)}(z)\geqslant 6\varepsilon\Big\{\sum_{j=1}^{p}|z_j|^2-\sum_{j=p+1}^{n}|z_j|^2\Big\}=6\varepsilon\omega(z).$$

Демәли, $\omega(z)$ квадратик формасынын (37) системинә әсасән төрәмәси

$$\dot\omega_{(37)}(z)\geqslant 6\varepsilon\omega(z) \qquad (40)$$

бәрабәрсизлијини өдәјир.

Сечилмиш $\delta>0$ әдәдинә көрә H_δ күрәси илә $\sum_{j=1}^{p}|z_j|^2-\sum_{j=p+1}^{n}|z_j|^2>0$ шәртини өдәјән z-ләр чохлуғунун кәсишмәсини U илә ишарә едәк.

Ајдындыр ки, $z=0$ нөгтәси U областынын сәрһәд нөгтәсидир вә U областында $\omega(z)>0$. Онда (40) бәрабәрсизлијинә әсасән U областында $\dot\omega_{(37)}(z)>0$. Дикәр тәрәфдән, U областынын гурулма гајдасындан ајдындыр ки, бу областын H_δ күрәси дахилиндә јерләшән сәрһәд нөгтәләриндә $\omega(z)=0$.

Беләликлә, $\omega(z)$ квадратик формасы вә U областы үчүн Четајев теореминин шәртләри өдәнир. Демәли, (37) системинин $z=0$ таразлыг вәзијјәти дајаныгсыздыр.

Гејд едәк ки, теореми Четајев теореминдән истифадә етмәдән ашағыдакы гајда илә дә исбат етмәк олар.

Сечилмиш $\delta>0$ әдәдинә көрә, $0<\delta_1<\delta$ шәртини өдәјән ихтијари δ_1 әдәди көтүрәк вә $\|\xi\|<\delta_1$, $\sum_{j=1}^{p}|\xi_j|^2-\sum_{j=p+1}^{n}|\xi_j|^2>0$ шәртләрини өдәјән ξ үчүн $z(t,\xi)$ һәллинә бахаг. Онда елә $h>0$ әдәди вар ки, $t\in[t_0,t_0+h]$ олдугда $\|z(t,\xi)\|<\delta$ олар. Она көрә дә, (40) бәрабәрсизлијинә әсасән $[t_0,t_0+h]$ парчасында

$$\dot\omega(z(t,\xi))\geqslant 6\varepsilon\omega(z(t,\xi))$$

бәрабәрсизлији өдәнәр. Бурадан да, $e^{-6\varepsilon t}$-јә вуруб t_0-дан t-јә гәдәр интегралламагла

$$\omega(z(t,\xi))\geqslant\omega(\xi)\,e^{6\varepsilon(t-t_0)}$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Лакин $\|z(t,\xi)\|^2\geqslant\omega(z(t,\xi))$ олдуғундан, бурадан алырыг ки, $\|z(t,\xi)\|<\delta$ бәрабәрсизлији истәнилән $t>t_0$ үчүн өдәнә билмәз. Јә'ни мүәјјән $t_1>t_0$ аны вардыр ки, $t\geqslant t_1$ олдугда $\|z(t,\xi)\|\geqslant\delta$ олур. Бу исә көстәрир ки, (37) системинин $z=0$ һәлли дајаныгсыздыр.

Мисал 2.

$$\begin{cases}\dot x_1=x_1+4x_2+tx_1x_2^2,\\ \dot x_2=2x_1-x_2+x_1^2x_2\sin t\end{cases}$$

системинин $x_1=0$, $x_2=0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглығыны арашдыраг.

Ујғун биринчи јахынлашмалар системи

$$\begin{cases}\dot x_1=x_1+4x_2,\\ \dot x_2=2x_1-x_2\end{cases}$$

шәклиндәдир вә бу системин матрисинин характеристик әдәдләри $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=3$, јә'ни характеристик әдәдләрдән бири мүсбәтдир.

Бахылан системдә $f(t,x)$ вектор-функсијасынын компонентләри $f_1(t,x)=tx_1x_2^2$, $f_2(t,x)=x_1^2x_2\sin t$ шәклиндәдир вә асанлыгла јохламаг олар ки, (25) шәрти өдәнир. Онда теоремә әсасән алырыг ки, бахылан системин $x_1=0$, $x_2=0$ таразлыг вәзијјәти дајаныгсыздыр.

Теорем 12. *Тутаг ки, A матрисинин характеристик әдәдләринин һамысынын һәгиги һиссәси мүсбәтдир вә $f(t,x)$ вектор-функсијасы (25) шәртини өдәјир. Онда (24) системинин $x=0$ таразлыг вәзијјәти тамам дајаныгсыздыр.*

Исбаты. A матрисинин характеристик әдәдләрини $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $j=1,\ 2, \dots, n$ $(\alpha_j>0)$ илә ишарә едәк. Онда $-\lambda_j = -\alpha_j - i\beta_j$, $j=1,\ 2,\dots,n$ әдәдләри $-A$ матрисинин характеристик әдәдләри олдуғундан, 9-чу теоремә әсасән

$$\dot x = -Ax - f(t,x) \qquad (45)$$

системи үчүн елә мүсбәт мүәјјән $\omega(x)$ квадратик формасы вә $c>0$ әдәди вар ки, $x\in\Delta_c$ олдугда

$$\dot\omega_{(45)}(x) \leqslant -2\alpha\omega(x) \quad (\alpha>0)$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Бу заман һәм дә (45) системинин $x=0$ таразлыг вәзијјәти асимптотик дајаныглы олур.

Дикәр тәрәфдән,

$$\dot\omega_{(24)}(x) = -\dot\omega_{(45)}(x)$$

олдуғундан, $x\in\Delta_c$ нөгтәләри үчүн

$$\dot\omega_{(24)}(x)\geqslant 2\alpha\omega(x) \qquad (46)$$

олур.

Инди $0<\|\xi\|<c$ шәртини өдәјән ξ-ләр үчүн (24) системинин $x=\varphi(t,\xi)$ һәлләринә бахаг. Онда $\|\varphi(t,\xi)\|\leqslant c$ шәртини өдәјән t-ләр $(t\geqslant t_0)$ үчүн, (46) бәрабәрсизлијинә әсасән, $\Phi(t)=\omega(\varphi(t,\xi))$ функсијасынын төрәмәси

$$\dot\Phi(t) = \dot\omega(\varphi(t,\xi))\geqslant 2\alpha\Phi(t)$$

бәрабәрсизлијини өдәјир. Бурадан, $\|\varphi(t,\xi)\|\leqslant c$ шәртини өдәјән $t\geqslant t_0$ үчүн

$$\Phi(t)=\omega(\varphi(t,\xi))\geqslant\omega(\xi)e^{2\alpha(t-t_0)}$$

бәрабәрсизлији алыныр.

Бу бәрабәрсизликдән (23)-ә әсасән алырыг ки,

$$\|\varphi(t,\xi)\|^2 \geqslant \frac{1}{\nu}\omega(\varphi(t,\xi)) \geqslant \frac{1}{\nu} \omega(\xi)e^{2\alpha(t-t_0)}$$

вә ја

$$\|\varphi(t,\xi)\|\geqslant\sqrt{\frac{1}{\nu}\omega(\xi)}\,e^{\alpha(t-t_0)},\quad t\geqslant t_0.$$

Алынмыш бәрабәрсизликдән ајдындыр ки, $0<\|\xi\|<c$ шәртини өдәјән ξ үчүн елә $T=T(\xi)$ аны вар ки, $t\geqslant T(\xi)$ олдугда

$$\|\varphi(t,\xi)\|\geqslant c.$$

Бу исә $x=0$ таразлыг вәзијјәтинин тамам дајаныгсызлығы демәкдир.

Мисал 3.

$$\begin{cases}\dot x_1 = x_1 - x_2 + t x_1^2 x_2,\\ \dot x_2 = x_1+x_2+x_1^2x_2^2\end{cases}$$

системиндә биринчи јахынлашмалар системинин матрисинин характеристик әдәдләри $\lambda_1=1-i$, $\lambda_2=1+i$ олдуғундан, бахылан системин $x_1=0$, $x_2=0$, таразлыг вәзијјәти тамам дајаныгсыздыр.

Гејд. (6) системи јалныз дајаныглы олдугда, (24) системинин $x=0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглығыны биринчи јахынлашмалар үсулу илә арашдыраркән јухарыда исбат етдијимиз теоремләр јарамыр. Бу заман (24) системинин $x=0$ һәлли дајаныглы вә ја дајаныгсыз ола биләр. Буну ашағыдакы мисалларла изаһ едәк.

Мисал 4.

$$\begin{cases}\dot x_1 = x_2 + 2x_2^3,\\ \dot x_2 = -x_1 - 2x_1^3\end{cases} \qquad (47)$$

системинә ујғун биринчи јахынлашмалар системи

$$\begin{cases}\dot x_1 = x_2,\\ \dot x_2 = -x_1\end{cases} \qquad (48)$$

олур. Асанлыгла јохламаг олар ки, (48) системи дајаныглыдыр, лакин асимптотик дајаныглы дејил.

Мүсбәт мүәјјән $\omega(x_1, x_2)= x_1^2+x_2^2+x_1^4+x_2^4$ функсијасынын (47) системинә әсасән төрәмәси $\dot\omega_{(47)}(x_1, x_2)\equiv 0$ олдуғундан, 5-чи теоремә әсасән, бу системин $x_1=0$, $x_2=0$ таразлыг вәзијјәти дајаныглыдыр.

Мисал 5. Ајдындыр ки, (48) системи һәм дә

$$\begin{cases}\dot x_1 = x_2 + x_1(x_1^2+x_2^2),\\ \dot x_2 = -x_1 + x_2(x_1^2+x_2^2)\end{cases} \qquad (49)$$

системинин биринчи јахынлашмалар системидир. Мүсбәт мүәјјән $\omega(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2$ функсијасынын (49) системинә әсасән төрәмәси $\dot\omega_{(49)}(x_1, x_2)=2(x_1^2+x_2^2)^2$ мүсбәт мүәјјән олдуғундан, (48) системинин дајаныглы олмасына бахмајараг, Четајев теореминә әсасән (49) системинин $x_1=0$, $x_2=0$ таразлыг вәзијјәти дајаныгсыздыр.

Бу мисаллар көстәрир ки, верилмиш системин таразлыг вәзијјәтини арашдырмаг үчүн Лјапунов функсијалары үсулу даһа үмумидир.

Чалышмалар

1.

$$\begin{cases}\dot x_1 = x_1 + 3x_2 - 3x_3,\\ \dot x_2 = 3x_2 - 2{,}4x_3,\\ \dot x_3 = 8x_1 - 6x_3\end{cases}$$

системинин дајаныглығыны арашдырын.

Ҹаваб: Асимптотик дајаныглы.

2. α, β-нын һансы гијмәтләриндә

$$\begin{cases} \dot x_1 = -x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3, \\ \dot x_2 = \alpha x_1 - x_2 - \alpha x_3, \\ \dot x_3 = -\beta x_1 - \alpha x_2 - x_3 \end{cases}$$

системи асимптотик дајаныглыдыр.

Ҹаваб: $1 + \beta^2 - 2\alpha^2 > 0$.

3. Ашағыдакы мисалларда тривиал һәллин дајаныглығыны Гурвич вә ја Михајлов шәртинин көмәклији илә көстәрин:

а) $x^{IV} + 7\dddot x + 12\ddot x + 23\dot x + 10x = 0$,

б) $x^{IV} + 2\dddot x + 6\ddot x + 3\dot x + 5x = 0$,

в) $x^{V} + x^{IV} + 10\dddot x + 8\ddot x + 24\dot x + 15x = 0$.

4. a вә b әдәдләринин һансы гијмәтләриндә

$$\dddot x + 3\ddot x + a\dot x + bx = 0$$

тәнлијинин тривиал һәлли асимптотик дајаныглыдыр.

Ҹаваб: $b > 0$, $3a > b$.

5. $\omega(x_1, x_2) = \frac{17}{4}x_1^2 - \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{1}{7}x_2^2$ функсијасы васитәсилә

$$\begin{cases} \dot x_1 = -6x_1 - x_2, \\ \dot x_2 = -4x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

системинин асимптотик дајаныглы олдуғуну көстәрин.

6. а)

$$\begin{cases} \dot x_1 = -x_1 + 2x_2, \\ \dot x_2 = -x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

системи үчүн Лјапунов функсијасы гурун.

б) 8-чи теоремин исбат гајдасы илә

$$\begin{cases} \dot x_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot x_2 = -x_2 \end{cases}$$

системи үчүн Лјапунов функсијасыны гурун.

Ҹаваб: $\omega(x_1, x_2) = 0{,}5x_1^2 + 0{,}5x_1x_2 + 0{,}75x_2^2$.

7. $\omega(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ функсијасы васитәсилә

$$\begin{cases} \dot x_1 = -3x_1 + x_2 - 6x_1^3, \\ \dot x_2 = -x_1 - x_2 - 2x_1^2x_2 \end{cases}$$

системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин асимптотик дајаныглығыны арашдырын.

8. Биринчи јахынлашмалар үсулу илә ашағыда верилмиш системләрин таразлыг вәзијјәтләринин дајаныглығыны арашдырын:

а)

$$\begin{cases} \dot x_1 = -x_1 + x_2 + x_1x_2 - 7, \\ \dot x_2 = x_1 - x_2 + x_1x_2 - 13. \end{cases}$$

Ҹаваб: (5, 2) дајаныгсыз, (−2, −5) асимптотик дајаныглы.

б)

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_1 - 2x_2 + (x_1 - 2x_2)^2, \\ \dot x_2 = 3x_1 - 4x_2 + x_1x_2. \end{cases}$$

Ҹаваб: (0, 0) асимптотик дајаныглы, (−2, −1) дајаныгсыз, (1, 1) дајаныгсыз, $\left(-4, -\frac{3}{2}\right)$ асимптотик дајаныглы.

в)

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_1 - 0{,}5x_2 + (x_1 - 0{,}5x_2)^2, \\ \dot x_2 = 2x_1 + 3x_2 - 2x_1x_2 - 3. \end{cases}$$

Ҹаваб: (1,5; 5) асимптотик дајаныглы, (0,5; 1) тамам дајаныгсыз, (1,5; 3) дајаныгсыз, (−0,5; 1) дајаныгсыз.

9.

$$\begin{cases} \dot x_1 = 2x_1 - 3x_2 + (x_2 + 2t)\sin(x_1 - t) + \\ \qquad + (x_1 - t)^2\cos(x_2 + 2t) - 8t + 1, \\ \dot x_2 = 4x_1 - 3x_2 + (x_2 + 2t)^2 - 10t - 2 \end{cases}$$

системинин $x_1 = t$, $x_2 = -2t$ һәллинин асимптотик дајаныглы олдуғуну биринчи јахынлашмалар үсулу илә көстәрин.

10. a параметринин һансы гијмәтләриндә

$$\begin{cases} \dot x_1 = e^{x_1 - ax_2} - 1, \\ \dot x_2 = ax_1 - 2x_2 - x_1^2 + 2x_2^2 \end{cases}$$

системинин (0, 0) таразлыг вәзијјәти асимптотик дајаныглыдыр?

Ҹаваб: $a^2 > 2$.

11. $\omega(x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4$ функсијасынын көмәји илә

$$\begin{cases} \dot x_1 = 2x_1^3x_2^2 + x_1^5, \\ \dot x_2 = 2x_1^2x_2^3 + x_2^5 \end{cases}$$

системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныгсыз олдуғуну көстәрин.

12. Биринчи јахынлашмалар үсулу вә $\omega(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ функсијасынын көмәји илә

$$\begin{cases} \dot x_1 = 2x_2 + 3x_1^3(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot x_2 = -2x_1 + 3x_2^3(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

системинин $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныгсыз олдуғуну көстәрин.

13. Биринчи јахынлашмалар үсулу вә $\omega(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1^6 + x_2^2 + x_2^6$ функсијасынын көмәји илә

$$\begin{cases} \dot x_1 = 2x_2 + 6x_2^5, \\ \dot x_2 = -2x_1 - 6x_1^5 \end{cases}$$

системинин $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ таразлыг вәзијјәтинин дајаныглы олдуғуну көстәрин.

VIII ФӘСИЛ

ИКИТӘРТИБЛИ ТӘНЛИКЛӘР НӘЗӘРИЈЈӘСИНИН БӘ'ЗИ МӘСӘЛӘЛӘРИ

Бу фәсилдә әввәлчә хәтти тәнликләрин һәлләринин бә'зи хассәләри, онлар үчүн сәрһәд мәсәләләри, Грин функсијасы өјрәнилир, мәхсуси әдәд вә мәхсуси функсија һаггында теоремләр исбат олунур.

Сонра исә садә гејри-хәтти сәрһәд мәсәләси вә Бессел тәнлији һаггында гыса мә'лумат верилир.

§ 1. ИКИТӘРТИБЛИ ХӘТТИ БИРЧИНС ТӘНЛИЈИН САДӘ ФОРМАЛАРЫ

Әввәлчә үмуми шәкилдә верилмиш икитәртибли

$$p_0(t)\ddot x + p_1(t)\dot x + p_2(t)x = 0 \qquad (1)$$

хәтти бирчинс тәнлијини арашдыраг.

Исбат олунмуш варлыг вә јеканәлик теоремләринә әсасән (IV фәсил, §§ 5, 6) алырыг ки, $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ функсијалары верилмиш $t = t_0$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында кәсилмәздирсә вә $p_0(t_0) \neq 0$ исә, (1) тәнлијинин

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot x(t_0) = x_1$$

башланғыч шәртләрини өдәјән јеканә һәлли вар.

Тутаг ки, $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ функсијалары $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәздир вә $p_0(t) \neq 0$. Онда (1) тәнлијинин һәлләри һәмин парчада тә'јин олунуб.

1. (1) тәнлији ахтарылан функсија вә онун төрәмәләринә нәзәрән бирчинс олдуғундан, $x = xu$ әвәзләмәси илә онун тәртибини азалдыб (IV фәсил, § 4)

$$p_0(t)\dot u + p_0(t)u^2 + p_1(t)u + p_2(t) = 0$$

Риккати тәнлијинә кәтирмәк олар.

Гејд едәк ки,

$$\dot y = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$$

Риккати тәнлијини дә $P(t)$, $\dot P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ функсијалары кәсилмәз вә $P(t) \neq 0$ олдугда

$$y = -\frac{1}{P(t)}\frac{\dot x}{x}$$

әвәзләмәси илә

$$P(t)\ddot x - [\dot P(t) + P(t)Q(t)]\dot x + R(t)P^2(t)x = 0$$

шәклиндә олан икитәртибли хәтти бирчинс тәнлијә кәтирмәк олар.

2. Тутаг ки, (1) тәнлијиндә $p_0(t)$, $p_1(t)$ әмсалларынын кәсилмәз төрәмәси вар. Тәнликдә $x = \alpha(t)y$ әвәзләмәси апараг вә $\alpha(t)$ функсијасыны елә сечәк ки, алынан јени тәнликдә $\dot y$-ин әмсалы сыфыр олсун. Бу заман $\alpha(t)$-јә нәзәрән

$$2p_0(t)\dot\alpha + p_1(t)\alpha = 0$$

тәнлији алыныр. Онун

$$\alpha(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right)$$

һәллини көтүрсәк, (1) тәнлији

$$\ddot y + Q(t)y = 0 \qquad (2)$$

шәклинә дүшәр; бурада

$$Q(t) = \frac{2\dot p_0(t)p_1(t) - 2p_0(t)\dot p_1(t) - p_1^2(t)}{4p_0^2(t)} + \frac{p_2(t)}{p_0(t)}.$$

3. Ајдындыр ки, (1) тәнлијиндә $p_1(t) \equiv \dot p_0(t)$ оларса, ону

$$\frac{d}{dt}\left(p_0(t)\frac{dx}{dt}\right) + p_2(t)x = 0 \qquad (3)$$

өз-өзүнә гошма шәкилдә јазмаг олар.

Көстәрәк ки, (1) шәклиндә олан тәнлији һәмишә өз-өзүнә гошма шәклә кәтирмәк олар. Бунун үчүн (1) тәнлијинин һәр тәрәфини һәләлик намә'лум олан $\mu = \mu(t)$ функсијасына вураг:

$$\mu(t)p_0(t)\ddot x + \mu(t)p_1(t)\dot x + \mu(t)p_2(t)x = 0.$$

Ајдындыр ки, $\mu(t)$ функсијасыны

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)p_0(t))=\mu(t)p_1(t)$$

шәртиндән сечсәк, алынмыш тәнлик (3) шәклиндә олар. Асанлыгла јохламаг олар ки,

$$\mu(t)=\frac{1}{p_0(t)}\exp\left(\int\frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right)$$

функсијасы бу шәрти өдәјир. Онда ујғун өз-өзүнә гошма тәнлик

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}\right)+q(t)x=0 \qquad (4)$$

олар; бурада

$$p(t)=\exp\left(\int\frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right),\quad q(t)=\frac{p_2(t)}{p_0(t)}\exp\left(\int\frac{p_1(t)}{p_0(t)}\,dt\right). \qquad (5)$$

Беләликлә, (1) тәнлијини һәмишә (4) тәнлијинә кәтирмәк олар вә бу заман $p(t)>0$. Өз-өзүнә гошма (4) тәнлијиндә t сәрбәст дәјишәнини јени

$$\tau=\int_a^t\frac{ds}{p(s)} \qquad (6)$$

дәјишәни илә əвәз едәк. $p(t)>0$ олдуғундан, τ дәјишәни t-нин чидди монотон артан функсијасы олур. Буна көрә дә (6) әвәзләмәси илә верилән функсијанын јекано $t=\varphi(\tau)$ тәрси вар. Онда $\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{p(t)}\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)=$ $=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{p(t)}\frac{d^2x}{d\tau^2}$ вә (4) тәнлији

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}+Q(\tau)x=0 \qquad (7)$$

шәклинә дүшәр; бурада

$$Q(\tau)=p(t)q(t)=p(\varphi(\tau))q(\varphi(\tau)).$$

(6) әвәзләмәсинә *Лиувилл әвәзләмәси* дејилир.

Ашағыда (1) тәнлији үчүн арашдырылан мәсәләләрин хүсусијјәтләриндән асылы олараг бу тәнлијин (2), (4), (7) каноник шәкилләриндән биринә бахылыр.

§ 2. ҺӘЛЛИН ХАССӘЛӘРИ

Икитәртибли хәтти бирчинс тәнлијин тривиал олмајан һәлләринин бә'зи хассәләри илә таныш олаг.

Теорем 1. *$x=x_1(t)$ функсијасы (1) тәнлијинин t_0 нөгтәсиндә сыфра чеврилән һәллидирсә, һәмин тәнлијин бу нөгтәдә сыфра чеврилән һәр бир $x=x(t)$ һәлли*

$$x(t)=cx_1(t)$$

шәклиндәдир; бурада c сабитдир.

Исбаты. $x_1(t)$ вә $x(t)$ һәлләри t_0 нөгтәсиндә сыфра чеврилдијиндән, бу һәлләрдән дүзәлмиш

$$W(t)=\begin{vmatrix}x(t) & x_1(t)\\ \dot x(t) & \dot x_1(t)\end{vmatrix}$$

Вронски детерминанты һәмин нөгтәдә сыфра чеврилир. Онда Остроградски—Лиувилл—Јакоби дүстуруна әсасән $W(t)=0$, $t\in[\alpha,\beta]$ олур вә бурадан да алынып ки, $x_1(t)$, $x(t)$ һәлләри хәтти асылыдыр.

Теорем 2. *(1) тәнлијинин һәлләринин сыфырлары садәдир, jә'ни тәнлијин һәр һансы $x(t)$ һәлли үчүн $x(t_0)=0$ исә, $\dot x(t_0)\neq0$.*

Исбаты. Әксини фәрз едәк: Тутаг ки, һәр һансы $x(t)$ һәлли $x(t_0)=0$, $\dot x(t_0)=0$ шәртләрини өдәјир. Тәнлијин тривиал һәлли дә һәмин шәртләри өдәдијиндән, һәллин јеканәлијинә әсасән, $x(t)\equiv0$ олар. Бу исә $x(t)$-нин тривиал олмајан һәлл олмасына зиддир.

Теорем 3. *(1) тәнлијинин һәлләринин анчаг изолә едилмиш (тәчрид олунмуш) сыфырлары ола биләр, jә'ни $t=t_0$ нөгтәси һәр һансы $x=x(t)$ һәллинин сыфыры исә, елә $\delta>0$ әдәди вар ки, $(t_0-\delta,\ t_0+\delta)$ интервалында һәмин һәллин t_0-дан фәргли сыфыры јохдур.*

Исбаты. Әксини фәрз едәк, тутаг ки, $t=t_0$ һәр һансы $x=x(t)$ һәллинин изолә олунмајан сыфырыдыр. Онда мүсбәт, монотон азалан вә сыфра јахынлашан $\{\delta_n\}$ ардычыллығы үчүн $(t_0-\delta_n,\ t_0+\delta_n)$ интервалында $x(t)$ һәллинин t_0-дан фәргли t_n сыфыры вар: $x(t_n)=0$, $n=1, 2, \ldots$. Дикәр тәрәфдән $|t_n-t_0|<\delta_n$ олдуғундан, $\lim_{n\to\infty}t_n=t_0$. Бурадан, төрәмәнин тә'рифинә әсасән

$$\dot x(t_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(t_n)-x(t_0)}{t_n-t_0}=0.$$

Демәли, $x(t)$ һәлли үчүн $x(t_0)=0$, $\dot x(t_0)=0$. Бу исә сыфырларын садәлији һаггында теоремә зиддир.

Нәтичә 1. *Һәр бир сонлу $[\alpha,\beta]$ парчасында (1) тәнлијинин истәнилән һәллинин анчаг сонлу сајда сыфыры ола биләр.*

Теорем 4 (Валле-Пуссен). *Тутаг ки, $[\alpha, \beta]$ парчасында $|Q(t)| < M$, $M > 0$. Онда (2) тәнлијинин һәр бир һәллинин ики ардычыл сыфыры (әкәр варса) арасындакы мәсафә $\sqrt{\frac{6}{M}}$ әдәдиндән кичик дејил.*

Исбаты. Үмумилији позмадан фәрз етмәк олар ки, $t=0$ вә $t=h$ нөгтәләри (2) тәнлијинин һәр һансы $y(t)$ һәллинин ики ардычыл сыфырыдыр.

Һиссә-һиссә интегралламагла јохламаг олар ки,

$$h\dot{y}(t)=\int_0^t s\ddot{y}(s)ds-\int_t^h (h-s)\ddot{y}(s)ds$$

ејнилији доғрудур. Бу ејниликдә $y(t)$ функсијасынын (2) тәнлијинин һәлли олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$h\dot{y}(t)=-\int_0^t sQ(s)y(s)ds+\int_t^h (h-s)Q(s)y(s)ds. \qquad (8)$$

Тутаг ки,

$$\max_{0\le t\le h}|\dot{y}(t)|=\dot{y}(\tau)=\mu, \quad \tau\in[0,h].$$

Ајдындыр ки, $\mu>0$. Доғрудан да, $\mu=0$ олса, $\dot{y}(t)=0$, $t\in[0,h]$ вә $y(0)=0$ олдуғундан, $y(t)=0$, $t\in[0,h]$.

$y(t)$ функсијасына $[0,s]$ вә $[s,h]$ парчаларында Лагранжын сонлу артым дүстуруну тәтбиг етмәклә

$$|y(s)|\le\mu s, \quad |y(s)|\le\mu(h-s)$$

бәрабәрсизликләрини аларыг. Бу көстәрир ки,

$$|(h-s)y(s)|\le\mu s(h-s), \quad |sy(s)|\le\mu s(h-s), \quad 0\le s\le h$$

бәрабәрсизликләри өдәнир.

Алынан бәрабәрсизликләрә әсасән (8) ејнилијиндән, ихтијари $t\in[0,h]$ үчүн

$$h|\dot{y}(t)|\le\mu M\int_0^h s(h-s)ds=\mu M\frac{h^3}{6}$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Бурадан, хүсуси һалда $t=\tau$ көтүрсәк, $6\le Mh^2$ олар вә демәли, көкләр арасындакы h мәсафәси үчүн $h\ge\sqrt{\frac{6}{M}}$ бәрабәрсизлији алынар. Теорем исбат олунду.

Теорем 5. *Тутаг ки, (4) тәнлијиндә а) $p(t)$, $q(t)$ әмсалларынын $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәз төрәмәләри вар вә $q(t)\ne 0$;*
б) $p(t)\,q(t)$ һасили азалмајандыр (артмајандыр).

Онда (4) тәнлијинин һәр һансы $x=x(t)$ һәллинин $[\alpha, \beta]$ парчасында артан истигамәтдә дүзүлмүш $t_1, t_2, t_3, \ldots$ сыфырлары үчүн

$$\max_{t_1\le t\le t_2}|x(t)|\ge\max_{t_2\le t\le t_3}|x(t)|\ge\cdots$$
$$\cdots\left(\max_{t_1\le t\le t_2}|x(t)|\le\max_{t_2\le t\le t_3}|x(t)|\le\cdots\right)$$

бәрабәрсизликләри доғрудур.

Исбаты. $x=x(t)$ һәлли васитәсилә

$$\varphi(t)=x^2(t)+\frac{1}{p(t)\,q(t)}(p(t)\,\dot{x}(t))^2$$

функсијасыны дүзәлдәк. Бурадан, $x(t)$ функсијасынын (4) тәнлијинин һәлли олдуғуну нәзәрә алараг асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\dot{\varphi}(t)=-\left[\frac{\dot{x}(t)}{q(t)}\right]^2\frac{d}{dt}(p(t)q(t)).$$

Теоремин шәртинә әсасән $\frac{d}{dt}(p(t)q(t))\ge 0\left(\frac{d}{dt}(p(t)p(t))\le 0\right)$ олдуғундан, $\dot{\varphi}(t)\le 0\ (\dot{\varphi}(t)\ge 0)$ олур, јә'ни $\varphi(t)$ функсијасы артмајандыр (азалмајандыр). $x=x(t)$ һәллинин максимум вә минимум гијмәтләр алдығы нөгтәләрдә $\dot{x}(t)=0$ олдуғундан, бу нөгтәләрдә $\varphi(t)=x^2(t)$. Дикәр тәрәфдән, $\varphi(t)$ функсијасы артмајан (азалмајан) олдуғу үчүн, һәллин максимумларынын вә минимумларынын квадратлары артмајандырлар (азалмајандырлар). Бурадан алырыг ки, $|x(t)|$ функсијасынын максимумлары артмајандырлар (азалмајандырлар). Теорем исбат олунду.

(4) тәнлији илә јанашы

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy}{dt}\right)+q_1(t)\,y=0 \qquad (4')$$

тәнлијинә бахаг.

Теорем 6 (Штурм). *Тутаг ки, $p(t)$, $\dot{p}(t)$, $q(t)$, $q_1(t)$ функсијалары $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәздир вә бу парчада*

$$q_1(t)\ge q(t) \qquad (9)$$

шәрти өдәнир. Онда (4) тәнлијинин һәр бир һәллинин ики ардычыл сыфыры арасында (4′) тәнлијинин ихтијари һәллинин һеч олмаса бир сыфыры вар.

Исбаты. Тутаг ки, $x(t)$ функсијасы (4) тәнлијинин t_1, t_2 $(\alpha\le t_1<t_2\le\beta)$ нөгтәләриндә сыфра чеврилән һәлли, $y(t)$ исә (4′) тәнлијинин ихтијари һәллидир. Демәли, $[\alpha, \beta]$ парчасында

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx(t)}{dt}\right)+q(t)x(t)=0,\quad \frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy(t)}{dt}\right)+q_1(t)y(t)=0$$

ејниликләри өдәнир. Бу ејниликләрдән биринчисини $y(t)$-јә, икинчисини исә $x(t)$-јә вуруб тәрәф-тәрәфә чыхсаг,

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)p(t)\frac{dx(t)}{dt}-x(t)p(t)\frac{dy(t)}{dt}\right]=(q_1(t)-q(t))x(t)y(t)$$

ејнилијини аларыг. Алынан ејнилији t_1-дән t_2-јә гәдәр интегралла јыб $x(t_1)=0$, $x(t_2)=0$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$y(t_2)p(t_2)\dot x(t_2)-y(t_1)p(t_1)\dot x(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}(q_1(t)-q(t))x(t)y(t)\,dt \qquad (10)$$

бәрабәрлијини аларыг.

Үмумилији позмадан (t_1, t_2) интервалында $x(t)>0$ гәбул етмәк олар. Онда $\dot x(t_1)>0$, $\dot x(t_2)<0$ олур.

Теореми исбат етмәк үчүн ашағыдакы һаллара бахаг.

1) $[t_1, t_2]$ парчасында $q_1(t)\not\equiv q(t)$. Бурадан (9) шәртинә әсасән аларыг ки, һеч олмаса бир $\bar t\in[t_1,t_2]$ нөгтәси вар ки, $q_1(\bar t)>q(\bar t)$ олур. Дикәр тәрәфдән $q(t)$, $q_1(t)$ функсијалары кәсилмәз олдуғундан, $\bar t$-ин $[t_1, t_2]$парчасына дахил олан кичик әтрафында да $q_1(t)>q(t)$ бәрабәрсизлији өдәнәр. Көстәрәк ки, бу һалда $y(t)$ һәллинин (t_1,t_2) интервалында һеч олмаса бир сыфыры вар. Әксини фәрз едәк, тутаг ки, (t_1,t_2) интервалында $y(t)$ һәлли сыфра чеврилмир. Үмумилији позмадан бу интервалда $y(t)>0$ гәбул едәк. Онда (10) бәрабәрлијинин сол тәрәфи мүсбәт олмајан әдәд ($y(t)$ парчанын учларында сыфра чеврилә биләр), сағ тәрәфи исә мүсбәт әдәд олур. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, (4') тәнлијинин $y(t)$ һәллинин (t_1, t_2) интервалында һеч олмаса бир сыфыры вар.

2) $[t_1,t_2]$ парчасында $q_1(t)\equiv q(t)$. Онда $[t_1,t_2]$ парчасында (4) вә (4') тәнликләри үст-үстә дүшүрләр. Бу һалда ја $y(t)=cx(t)$ олмалыдыр, јахуд да $y(t)$ һәллинин (t_1,t_2) интервалында һеч олмаса бир сыфыры вар. Әкс һалда, (t_1,t_2) интервалында $y(t)>0$ гәбул етсәк, (10) бәрабәрлијиндән зиддијјәт аларыг. Доғрудан да, бу заман (10) бәрабәрлијинин сағ тәрәфи сыфыр, сол тәрәфи исә мәнфи олур. Теорем исбат олунду.

Нәтичә 1. *Тутаг ки, Штурм теореминин шәртләри өдәнир вә (t_1,t_2) интервалында $q_1(t)\not\equiv q(t)$. Онда (4') тәнлијинин $y(t_1)=0$ шәртини өдәјән ихтијари $y(t)$ һәллинин (t_1,t_2) интервалында да һеч олмаса бир сыфыры вар.*

Доғрудан да, бахылан һалда (10) бәрабәрлији

$$y(t_2)p(t_2)\dot x(t_2)=\int_{t_1}^{t_2}(q_1(t)-q(t))x(t)y(t)\,dt \qquad (11)$$

шәклинә дүшүр вә (t_1,t_2) интервалында $x(t)>0$, $y(t)>0$ гәбул етсәк, (11) бәрабәрлијинин сол тәрәфи мәнфи вә ја сыфыр, сағ тәрәфи исә мүсбәт олар. Алынан зиддијјәт нәтичәнин доғрулуғуну көстәрир.

Нәтичә 2. *(4) тәнлијинин һәр һансы һәллинин ики гоншу сыфыры арасында, һәмин тәнлијин бу һәлл илә хәтти асылы олмајан һәллинин јеканә сыфыры вар.*

Бу заман дејирләр ки, (4) тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләринин сыфырлары бир-бирини *гаршылыглы бөлүр*.

Нәтичәни Штурм теореминдә $q_1(t)\equiv q(t)$ көтүрмәклә исбат етмәк олар.

Икитәртибли хәтти бирчинс тәнлијин һәр һансы һәллинин верилмиш $[\alpha,\beta]$ парчасында ән азы ики сыфыры варса, бу һәлл $[\alpha,\beta]$ парчасында *рәгс едән* адланыр. Әкс һалда, дејирләр ки, һәлл $[\alpha,\beta]$ парчасында рәгс етмәјәндир.

Нәтичә 3. *Тутаг ки, $[\alpha,\beta]$ парчасында $q(t)\leqslant 0$. Онда (4) тәнлијинин һәлләри һәмин парчада рәгс етмәјәндир.*

Исбаты. Әксини фәрз едәк, тутаг ки, $q(t)\leqslant 0$ олмасына бахмајараг, (4) тәнлијинин тривиал олмајан елә һәлли вар ки, бу һәллин бахылан парчада һеч олмаса ики t_1, t_2 сыфырлары вар. Онда Штурм теореминә әсасән

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy}{dt}\right)=0$$

тәнлијинин истәнилән һәллинин $[t_1,t_2]$ парчасында һеч олмаса бир сыфыры вар. Лакин $y=c\,(c\ne0)$ бу тәнлијин һеч бир нөгтәдә сыфра чеврилмәјән һәлли олдуғундан, алынан зиддијјәт нәтичәнин доғрулуғуну көстәрир.

Нәтичә 4. *Тутаг ки, (2) тәнлијиндә $Q(t)$ функсијасы $[\alpha,\beta]$ парчасында кәсилмәз, артан функсијадыр вә $t_1, t_2, t_3,\ldots$ һәмин тәнлијин һәр һансы $y=y(t)$ һәллинин артан истигамәтдә дүзүлмүш сыфырларыдыр. Онда*

$$0<t_2-t_1<t_3-t_2<\cdots$$

Исбаты. $t_2-t_1=h$ ишарә едәк. Ајдындыр ки, $z(t)=y(t-h)$ функсијасы

$$\ddot z+Q(t-h)z=0 \qquad (2')$$

тәнлијинин һәллидир вә t_2, t_2+h, $t_3+h,\ldots$ бу һәллин сыфырларыдыр.

Шәртә көрә $Q(t)>Q(t-h)$ олдуғундан, (2) вә (2') тәнликләрини мүгајисә етсәк, 1-чи нәтичәјә әсасән $t_2+h<t_3$ олар, јә'ни $t_2-t_1<t_3-t_2$.

Ејни гајда илә $t_3-t_2<t_4-t_3$ вә с. олдуғуну исбат етмәк олар.

Нәтиҹә 5. *Тутаг ки, (2) тәнлијиндә $Q(t)$ функсијасы $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәздир вә*

$$0 < m \leqslant Q(t) \leqslant M \qquad (12)$$

шәрти өдәнир. Онда (2) тәнлијинин һәр һансы һәллинин ики ардычыл сыфыры арасындакы мәсафә

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leqslant h \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{m}} \qquad (13)$$

бәрабәрсизлијини өдәјир.

Исбаты. Штурм теоремини тәтбиг етмәк үчүн (2) тәнлијини

$$\ddot{z} + mz = 0, \qquad (14)$$

$$\ddot{u} + Mu = 0 \qquad (15)$$

тәнликләри илә мүгајисә едәк.

Тутаг ки, $t_1, t_2 (t_1 < t_2)$ нөгтәләри (2) тәнлијинин һәр һансы $y(t)$ һәллинин ики ардычыл сыфырыдыр.

Ајдындыр ки, (14) вә (15) тәнликләринин $t = t_1$ нөгтәсиндә сыфра чеврилән һәлләри, ујғун олараг

$$z = A \sin \sqrt{m}(t - t_1), \ u = A_1 \sin \sqrt{M}(t - t_1)$$

шәклиндәдир; бурада A, A_1 ихтијари сабитләрдир. Бу һәлләр t_1-дән сағда илк дәфә ујғун олараг

$$\bar{t}_2 = t_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}, \ \bar{\bar{t}}_2 = t_1 + \frac{\pi}{\sqrt{M}}$$

нөгтәләриндә сыфра чеврилирләр. Штурм теоремини (2) вә (14) тәнликләринә тәтбиг етдикдә $t_2 \leqslant \bar{t}_2 = t_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ бәрабәрсизлији, (15) вә (2) тәнликләринә тәтбиг етдикдә исә $\bar{\bar{t}}_2 = t_1 + \frac{\pi}{\sqrt{M}} \leqslant t_2$ бәрабәрсизлији алыныр. Бурадан $h = t_2 - t_1 \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ вә $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leqslant t_2 - t_1 = h$ олдуғундан, нәтиҹәнин исбаты алыныр.

Бу нәтиҹәјә әсасән алырыг ки, (12) шәрти узунлуғу $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$-дән кичик олмајан $[\alpha_1, \beta_1]$ ($[\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha, \beta]$) парчасында өдәнирсә, (2) тәнлијинин ихтијари һәллинин бу парчада һеч олмаса бир сыфыры вар. Она көрә дә тәнлијин ихтијари һәллинин $[\alpha, \beta]$ парчасындакы сыфырларынын сајы $\left[\frac{(\beta - \alpha)\sqrt{m}}{\pi}\right]$ әдәдиндән аз дејил; бурада $[z]$ илә z-ин там һиссәси ишарә олунмушдур.

§ 3. СӘРҺӘД МӘСӘЛӘСИ. ГРИН ФУНКСИЈАСЫ

Мә'лумдур ки, $n (n \geqslant 1)$ тәртибли тәнлијин үмуми һәлли n ихтијари сабитдән асылыдыр. Она көрә дә дејирләр ки, n тәртибли ади диференсиал тәнлијин сәрбәстлик дәрәҹәси n-дир.

Индијә гәдәр үмуми һәллдән тәнлијин мүәјјән хүсуси һәллини алмаг үчүн башланғыч шәртләрдән истифадә олунурду. Јә'ни ахтарылан функсија вә онун төрәмәләри сәрбәст дәјишәнин ејни бир гијмәтиндә верилирди. Лакин бир чох мәсәләләрдә алынан тәнлијин елә һәллини тапмаг тәләб олунур ки, бу һәлл сәрбәст дәјишәнин мүхтәлиф гијмәтләриндә верилмиш шәртләри өдәсин. Бу исә сәрһәд мәсәләси илә бағлыдыр.

Тутаг ки,

$$p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = 0 \qquad (1)$$

тәнлијинин

$$x(\alpha) = a_1, \ x(\beta) = a_2 \ (\alpha < \beta) \qquad (16)$$

шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы тәләб олунур; бурада α, β, a_1, a_2 верилмиш әдәдләрдир.

Бу мәсәләјә *сәрһәд мәсәләси*, (16) шәртләринә исә *сәрһәд шәртләри* дејилир.

Ајдындыр ки, (1), (16) сәрһәд мәсәләсини һәлл етмәк, һәндәси олараг, (1) тәнлијинин $(\alpha, a_1), (\beta, a_2)$ нөгтәләриндән кечән интеграл әјрисини тапмаг демәкдир.

(1) тәнлији үчүн (16)-дан үмуми олан

$$\begin{cases} a_{11}x(\alpha) + a_{12}\dot{x}(\alpha) + b_{11}x(\beta) + b_{12}\dot{x}(\beta) = a_1, \\ a_{21}x(\alpha) + a_{22}\dot{x}(\alpha) + b_{21}x(\beta) + b_{22}\dot{x}(\beta) = a_2 \end{cases} \qquad (17)$$

сәрһәд шәртләри дә вермәк олар.

$$\begin{cases} a_{11}x(\alpha) + a_{12}\dot{x}(\alpha) + b_{11}x(\beta) + b_{12}\dot{x}(\beta) = 0, \\ a_{21}x(\alpha) + a_{22}\dot{x}(\alpha) + b_{21}x(\beta) + b_{22}\dot{x}(\beta) = 0 \end{cases} \qquad (17')$$

сәрһәд шәртләринә *бирҹинс сәрһәд шәртләри*, (1) тәнлијинин бирҹинс сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә исә *бирҹинс сәрһәд мәсәләси* дејилир.

Садә мисаллар көстәрир ки, (1) тәнлијинин әмсаллары мүәјјән шәртләри өдәдикдә Коши мәсәләсинин јеканә һәлли вар, лакин сәрһәд мәсәләсинин һәлли јохдур вә ја сонсуз сајдадыр.

Мисал 1. $\ddot{x} + x = 0$ тәнлијинин $x(0) = 0, \ x(\pi) = 1$ сәрһәд шәртләрини өдәјән һәлли јохдур. Доғрудан да, тәнлијин үмуми һәлли

$$x = A \sin t + B \cos t$$

шәклиндә, $x(0)=0$ шәртини өдәјән һәлләри исә $x = A\sin t$ шәклиндәдир. Ајдындыр ки, бу һәлләр ичәрисиндә $x(\pi)=1$ шәртини өдәјәни јохдур.

Асанлыгла јохламаг олар ки, ихтијари A үчүн $x = A\sin t$ функсијасы бахылан тәнлијин $x(0)=0$, $x(\pi)=0$ шәртләрини өдәјән һәллидир. Лакин тәнлијин $x(0)=0$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ шәртини өдәјән јеканә $x=\sin t$ һәлли вар.

Мә'лумдур ки, $x_1(t), x_2(t)$ функсијалары (1) тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләри исә, онун үмуми һәлли

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \qquad (18)$$

шәклиндәдир вә демәли, (17) шәртләрини өдәјән һәлл дә (әкәр варса) бу һәлләр ичәрисиндәдир, бурада c_1, c_2 ихтијари сабитләрдир. Бу сабитләри елә сечәк ки, (18) һәлли (17) шәртләрини өдәсин. Онда c_1, c_2 мәчһулларына нәзәрән

$$\begin{cases} A_{11}c_1 + A_{12}c_2 = a_1, \\ A_{21}c_1 + A_{22}c_2 = a_2 \end{cases} \qquad (19)$$

чәбри тәнликләр системи алыныр; бурада

$$A_{i1} = a_{i1}x_1(\alpha) + a_{i2}\dot{x}_1(\alpha) + b_{i1}x_1(\beta) + b_{i2}\dot{x}_1(\beta),$$

$$A_{i2} = a_{i1}x_2(\alpha) + a_{i2}\dot{x}_2(\alpha) + b_{i1}x_2(\beta) + b_{i2}\dot{x}_2(\beta), \quad i = 1, 2.$$

Садәлик үчүн

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & a_1 \\ A_{21} & A_{22} & a_2 \end{pmatrix}$$

ишарә едәк. Чәбрдән мә'лум олан Кронекер—Капелли теореминә әсасән (19) системинин ујушан олуб-олмамасы илә әлагәдар олараг алырыг ки,

а) $\det A \neq 0$ исә, (19) системинин јеканә һәлли вар вә демәли, (1) тәнлијинин (ихтијари a_1, a_2 әдәдләри үчүн), (17) шәртләрини өдәјән јеканә һәлли вар.

Бурадан һәм дә алыныр ки, $\det A \neq 0$ исә, бирчинс сәрһәд мәсәләсинин јеканә тривиал һәлли вар вә әксинә, бирчинс сәрһәд мәсәләсинин јеканә тривиал һәлли варса, $\det A \neq 0$. Jә'ни (1) тәнлијинин (17) шәртләрини өдәјән јеканә һәлли вар;

б) $\det A = 0$ вә a_1, a_2 әдәдләринин һәр икиси сыфыр дејил. Онда A матрисинин рангы $\overline{A}$ матрисинин рангына бәрабәр олдугда (19) системинин сонсуз сајда һәлли вар вә демәли, (1) тәнлијинин (17) шәртләрини өдәјән сонсуз сајда һәлли вар; A матрисинин рангы $\overline{A}$ матрисинин рангына бәрабәр олмадыгда исә (19) системи ујушан дејил вә демәли, (1) тәнлијинин (17) шәртләрини өдәјән һәлли јохдур;

в) $\det A = 0$ олдугда (1) тәнлијинин (17') бирчинс сәрһәд шәртләрини өдәјән сонсуз сајда тривиал олмајан һәлли вар.

Бирчинс олмајан

$$p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = f(t) \qquad (20)$$

тәнлијинә бахаг. Бу тәнлијин (17') бирчинс сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллинин гурулмасында Грин функсијасы мүһүм рол ојнајыр. Она көрә дә әввәлчә Грин функсијасына тә'риф верәк.

Тутаг ки, $R = \{\alpha \leqslant t \leqslant \beta;\ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}$ квадратында тә'јин олунмуш $G(t, \tau)$ функсијасы ашағыдакы шәртләри өдәјир:

1. $G(t, \tau)$ функсијасы R квадратында кәсилмәздир, һәр бир $\tau \in (\alpha, \beta)$ үчүн $(\alpha, \tau), (\tau, \beta)$ интервалларында t—јә нәзәрән ики тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри вар вә бу интервалларда (1) тәнлијини өдәјир;

2. $G_t(t, \tau)$ төрәмәси $t = \tau$ нөгтәсиндә биринчи нөв кәсилмәјә маликдир вә

$$G_t(\tau + 0, \tau) - G_t(\tau - 0, \tau) = \frac{1}{p_0(\tau)}; \qquad (21)$$

3. $G(t, \tau)$ функсијасы t-јә нәзәрән (17') бирчинс сәрһәд шәртләрини өдәјир.

Белә $G(t, \tau)$ функсијасына (1), (17') сәрһәд мәсәләсинин вә ја $L(x) = p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x$ диференсиал операторунун (17') шәртләрини өдәјән *Грин функсијасы* дејилир.

Грин функсијасынын варлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 7. *Тутаг ки, (1) тәнлијинин (17') бирчинс сәрһәд шәртләрини өдәјән анчаг тривиал һәлли вар. Онда (1), (17') мәсәләсинин Грин функсијасы вар.*

Исбаты. Тутаг ки, $x_1(t), x_2(t)$ функсијалары (1) тәнлијинин $[\alpha, \beta]$ парчасында хәтти асылы олмајан һәлләридир.

Тә'рифә көрә Грин функсијасы һәр бир $\tau \in (\alpha, \beta)$ үчүн (α, τ), (τ, β) интервалларында (1) тәнлијинин һәлли олдуғундан,

$$G(t, \tau) = \begin{cases} c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), & t \in [\alpha, \tau], \\ \overline{c}_1 x_1(t) + \overline{c}_2 x_2(t), & t \in [\tau, \beta] \end{cases}$$

олмалыдыр; бурада $c_1, c_2, \overline{c}_1, \overline{c}_2$ һәләлик намә'лум сабитләрдир.

Шәртә көрә $G(t, \tau)$ функсијасы R квадратында кәсилмәз олдуғундан,

$$c_1 x_1(\tau) + c_2 x_2(\tau) = \overline{c}_1 x_1(\tau) + \overline{c}_2 x_2(\tau)$$

олар. Дикәр тәрәфдән, (21) шәртинә әсасән

$$\overline{c}_1 \dot{x}_1(\tau) + \overline{c}_2 \dot{x}_2(\tau) - c_1 \dot{x}_1(\tau) - c_2 \dot{x}_2(\tau) = \frac{1}{p_0(\tau)}.$$

Ајдындыр ки, $\overline{c}_1 - c_1 = \gamma_1, \overline{c}_2 - c_2 = \gamma_2$ ишарә етсәк, сонунчу ики мүнасибәтдән γ_1, γ_2 мәчһулларына нәзәрән хәтти, бирчинс олмајан

$$\begin{cases} x_1(\tau)\gamma_1 + x_2(\tau)\gamma_2 = 0,\\ \dot{x}_1(\tau)\gamma_1 + \dot{x}_2(\tau)\gamma_2 = \dfrac{1}{p_0(\tau)} \end{cases} \qquad (22)$$

чәбри тәнликләр системини аларыг.

Бу системин әмсалларындан дүзәлдилмиш детерминант (1) тәнлијинин хәтти асылы олмајан $x_1(t)$, $x_2(t)$ һәлләриндән дүзәлдилмиш $W(t)$ Вронски детерминантынын $t=\tau$ нөгтәсиндәки гијмәтинә бәрабәр олдуғундан, сыфырдан фәрглидир. Одур ки, (22) системинин јеканә

$$\gamma_1(\tau) = -\frac{x_2(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)}, \quad \gamma_2(\tau) = \frac{x_1(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)}$$

һәлли вар.

Онда $\bar{c}_1 = c_1 + \gamma_1(\tau)$, $\bar{c}_2 = c_2 + \gamma_2(\tau)$. Демәли,

$$G(t,\tau) = \begin{cases} c_1x_1(t) + c_2x_2(t), & t\in[\alpha,\tau],\\ (c_1+\gamma_1(\tau))\,x_1(t) + (c_2+\gamma_2(\tau))\,x_2(t), & t\in[\tau,\beta]. \end{cases}$$

Тә'рифә көрә $G(t,\tau)$ функсијасы сәрһәд шәртләрини өдәмәлидир. Бу шәртләрә әсасән c_1, c_2 мәчһулларына нәзәрән

$$\begin{cases} A_{11}c_1 + A_{12}c_2 = -[b_{11}x_1(\beta) + b_{12}\dot{x}_1(\beta)]\gamma_1 - [b_{11}x_2(\beta) + b_{12}\dot{x}_2(\beta)]\gamma_2,\\ A_{21}c_1 + A_{22}c_2 = -[b_{21}x_1(\beta) + b_{22}\dot{x}_1(\beta)]\gamma_1 - [b_{21}x_2(\beta) + b_{22}\dot{x}_2(\beta)]\gamma_2 \end{cases}$$

системини аларыг.

Теоремин шәртинә көрә бирчинс сәрһәд мәсәләсинин јеканә тривиал һәлли вар. Демәли, $\det A \neq 0$. Одур ки, сонунчу системдән $c_1(\tau)$, $c_2(\tau)$ јеканә гајда илә тә'јин олунур. Бу гијмәтләри јухарыда нәзәрә алсаг, $\bar{c}_1(\tau)$, $\bar{c}_2(\tau)$ мәчһуллары да тә'јин олунар вә беләликлә,

$$G(t,\tau) = \begin{cases} c_1(\tau)x_1(t) + c_2(\tau)x_2(t), & t\in[\alpha,\tau],\\ \bar{c}_1(\tau)x_1(t) + \bar{c}_2(\tau)x_2(t), & t\in[\tau,\beta] \end{cases}$$

функсијасы (1), (17′) мәсәләсинин Грин функсијасы олур. Теорем исбат олунду.

Теорем 8. *Тутаг ки, $G(t,\tau)$ функсијасы (1), (17′) мәсәләсинин Грин функсијасыдыр вә $f(t)$ функсијасы $[\alpha,\beta]$ парчасында кәсилмәздир. Онда*

$$x(t) = \int_\alpha^\beta G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau \qquad (23)$$

дүстуру илә тә'јин олунан $x(t)$ функсијасы (20) тәнлијинин (17′) шәртләрини өдәјән һәллидир.

Бу дүстура *Грин дүстуру* дејилир.

Исбаты. Грин дүстуру илә тә'јин олунан $x(t)$ функсијасынын (17′) шәртләрини өдәмәси, $G(t,\tau)$ функсијасынын t аргументинә нәзәрән һәмин шәртләри өдәмәсиндән ајдындыр.

Көстәрәк ки, $x(t)$ функсијасы һәм дә (20) тәнлијини өдәјир. Бунун үчүн Грин дүстуруну

$$x(t) = \int_\alpha^t G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau + \int_t^\beta G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$$

шәклиндә јазаг вә $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ төрәмәләрини һесаблајаг:

$$\dot{x}(t) = G(t,t)f(t) + \int_\alpha^t G_t(t,\tau)f(\tau)\,d\tau - G(t,t)f(t) +$$

$$+ \int_t^\beta G_t(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = \int_\alpha^\beta G_t(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

$$\ddot{x}(t) = G_t(t,t-0)f(t) + \int_\alpha^t G_{tt}(t,\tau)f(\tau)\,d\tau - G_t(t,t+0)f(t) +$$

$$+ \int_t^\beta G_{tt}(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = [G_t(t,t-0) - G_t(t,t+0)]f(t) +$$

$$+ \int_\alpha^\beta G_{tt}(t,\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Бурада $G_t(t,t-0) = G_t(t+0,t)$ вә $G_t(t,t+0) = G_t(t-0,t)$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (21) шәртинә әсасән аларыг ки,

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{p_0(t)}f(t) + \int_\alpha^\beta G_{tt}(t,\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Одур ки, Грин дүстуру илә тә'јин олунан $x(t)$ функсијасы үчүн

$$L[x(t)] \equiv p_0(t)\ddot{x}(t) + p_1(t)\dot{x}(t) + p_2(t)x(t) =$$

$$= f(t) + \int_\alpha^\beta [p_0(t)G_{tt}(t,\tau) + p_1(t)G_t(t,\tau) + p_2(t)G(t,\tau)]\,f(\tau)d\tau$$

мүнасибәтини аларыг.

Шәртә көрә ихтијари $\tau\in(\alpha,\beta)$ үчүн $G(t,\tau)$ функсијасы (α,τ), (τ,β) интервалларында (1) тәнлијинин һәлли олдуғундан, бурадан

$$L[x(t)] \equiv f(t)$$

еjнилијини аларыг. Теорем исбат олунду.

Мисал 2. $(2t+1)\ddot{x} + 4t\dot{x} - 4x = f(t)$ тәнлијинин

$$x(0) - e^2x(1) = 0, \quad x(0) = 0$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллини тапаг. Бунун үчүн әввәлчә

$$(2t+1)\ddot{x}+4t\dot{x}-4x=0$$

бирчинс тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләрини тапаг. Тәнлијин бир хүсуси һәллини

$$x=at^n+bt^{n-1}+\ldots$$

шәклиндә ахтараг. Ону тәнликдә јазыб t-нин ејни дәрәчәләринин әмсалларыны тутушдурсаг, аларыг ки, $n=1$, јә'ни тәнлијин

$$x=at+b$$

шәклиндә һәлли вар. Һәллин бу ифадәсини тәнликдә јазыб, әмсаллары тутушдурмагла a, b-ни тә'јин едирик: $a=1, b=0$. Демәли, $x_1(t)=t$ бирчинс тәнлијин һәллидир.

Тапылан $x_1(t)=t$ һәллинин көмәји илә тәнлијин тәртибини азалдараг онун $x_2(t)=e^{-2t}$ һәллини дә гура биләрик. Ајдындыр ки, $x(t)=t$, $x_2(t)=e^{-2t}$ һәлләри хәтти асылы дејилләр. Она көрә дә бахылан мәсәләнин Грин функсијасыны

$$G(t,\tau)=\begin{cases}c_1t+c_2e^{-2t}, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ \bar{c}_1t+\bar{c}_2e^{-2t}, & \tau\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

шәклиндә ахтармаг лазымдыр.

$p_0(t)=2t+1$, $W(t)=-(2t+1)e^{-2t}$ олдуғундан, аларыг ки,

$$\bar{c}_1-c_1=\gamma_1=\frac{1}{(2\tau+1)^2},\quad \bar{c}_2-c_2=\gamma_2=-\frac{\tau e^{2\tau}}{(2\tau+1)^2}.$$

Бурадан

$$\bar{c}_1=c_1+\frac{1}{(2\tau+1)^2},\quad \bar{c}_2=c_2-\frac{\tau e^{2\tau}}{(2\tau+1)^2}.$$

Бу гијмәтләри Грин функсијасынын ифадәсиндә јеринә јазыб сәрһәд шәртләрини нәзәрә алсаг, c_1, c_2 мәчһулларына нәзәрән

$$\begin{cases}c_1-\dfrac{\tau e^{2(\tau-1)}}{(2\tau+1)^2}+\dfrac{1}{(2\tau+1)^2}=0,\\ c_1-2c_2=0\end{cases}$$

системини аларыг. Бурадан c_1, c_2 мәчһулларыны тә'јин едиб үмуми нәзәријјәдәки гајда илә

$$G(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\tau e^{2(\tau-1)}-1}{(2\tau+1)^2}\,t+\dfrac{\tau e^{2(\tau-1)}-1}{2(2\tau+1)^2}\,e^{-2t}, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\[2mm] \dfrac{\tau e^{2(\tau-1)}}{(2\tau+1)^2}\,t+\dfrac{\tau(e^{-2}-2)e^{2\tau}-1}{2(2\tau+1)^2}\,e^{-2t}, & \tau\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

Грин функсијасыны гура биләрик. Онда теоремә әсасән

$$x(t)=\int_0^1 G(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$$

функсијасы бахылан мәсәләнин һәлли олар.

§ 4. МӘХСУСИ ӘДӘД ВӘ МӘХСУСИ ФУНКСИЈА ҺАГГЫНДА

Тутаг ки,

$$\ddot{x}+\{\lambda-q(t)\}x=0 \qquad (24)$$

тәнлијинин

$$\begin{cases}a_{11}x(\alpha)+a_{12}\dot{x}(\alpha)=0,\\ b_{21}x(\beta)+b_{22}\dot{x}(\beta)=0\end{cases} \qquad (25)$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллини тапмаг тәләб олунур; бурада λ параметр, $q(t)$ функсијасы $[\alpha,\beta]$ парчасында кәсилмәз һәгиги функсијадыр, a_{11}, a_{12}, b_{21}, b_{22} һәгиги әдәдләрдир вә

$$a_{11}^2+a_{12}^2>0,\qquad b_{21}^2+b_{22}^2>0$$

шәртләри өдәнир. Ајдындыр ки, (24), (25) мәсәләсинин һәмишә тривиал һәлли вар, лакин λ параметринин бә'зи гијмәтләри үчүн һәмин мәсәләнин тривиал олмајан һәлли ола биләр. λ параметринин (24), (25) мәсәләсинин тривиал олмајан һәллинин варлығыны тә'мин едән гијмәтләринә бу мәсәләнин *мәхсуси әдәдләри*, ујғун һәлләрә исә *мәхсуси функсијалары* дејилир. Она көрә дә (24), (25) мәсәләсинә *мәхсуси әдәд вә мәхсуси функсија һаггында* мәсәлә вә ја *Штурм—Лиувилл мәсәләси* дејилир.

Әввәлчә

$$\ddot{x}+\lambda x=0 \qquad (26)$$

тәнлијинин

$$x(0)=0,\ x(\pi)=0 \qquad (27)$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә бахаг.

Штурм теореминә әсасән (нәтичә 3) аларыг ки, $\lambda\leqslant 0$ олдугда (26), (27) мәсәләсинин тривиал олмајан һәлли јохдур. Буна көрә дә (26), (27) мәсәләсинин анчаг $\lambda>0$ олдугда тривиал олмајан һәлли ола биләр. Ајдындыр ки, $\lambda>0$ олдугда (26) тәнлијинин үмуми һәлли

$$x=c_1\cos\sqrt{\lambda}\,t+c_2\sin\sqrt{\lambda}\,t$$

шәклиндәдир вә (27) шәртләриндән биринчисинә әсасән аларыг ки, $c_1=0$. Демәли (26), (27) мәсәләсинин һәлли

$$x=c_2\sin\sqrt{\lambda}\,t$$

260—20

аиләсиндән сечилмәлидир. Дикәр тәрәфдән (27) шәртләринин икинчисиндән алырыг ки,

$$c_2 \sin \sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

олмалыдыр. Бурадан aјдындыр ки, (26), (27) мәсәләсинин тривиал олмаjан һәллинин варлығы үчүн $c_2 \neq 0$ олмалыдыр вә λ параметрини елә сечмәк лазымдыр ки,

$$\sin \sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

олсун. Бунун үчүн

$$\sqrt{\lambda}\,\pi = \kappa\pi, \ \kappa = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

олмалыдыр. Демәли,

$$\lambda = \kappa^2, \ \kappa = 1, 2, \ldots$$

олдугда (26), (27) мәсәләсинин тривиал олмаjан һәлли вар.

Беләликлә, $\lambda_\kappa = \kappa^2$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ әдәдләри (26), (27) мәсәләсинин мәхсуси әдәдләри, $x_\kappa(t) = c_\kappa \sin \kappa t$ исә уjғун мәхсуси функсиjалары олур; бурада c_κ ихтиjари сабитдир. Бурадан көрүнүр ки, (26), (27) мәсәләсинин сонсуз саjда мәхсуси әдәдләри вә мәхсуси функсиjалары вар.

Аjдындыр ки, $x_1(t) = c_1 \sin t$ $(c_1 \neq 0)$ мәхсуси функсиjасы $[0, \pi]$ парчасынын анчаг уч нөгтәләриндә, $x_2 = c_2 \sin 2t$ $(c_2 \neq 0)$ мәхсуси функсиjасы $[0, \pi]$ парчасында үч нөгтәдә (уч нөгтәләр дә дахил олмагла) сыфра чеврилир вә с. $x_l(t) = c_l \sin lt$ $(c_l \neq 0)$ мәхсуси функсиjасы $[0, \pi]$ парчасында $l + 1$ нөгтәдә сыфра чеврилир.

Көстәрмәк олар ки, $\kappa \neq m$ олдугда

$$\int_0^\pi x_\kappa(t)\, x_m(t)\, dt = 0, \ \kappa, m = 1, 2, \ldots$$

Бу заман деjирләр ки, (26), (27) мәсәләсинин ики мүхтәлиф мәхсуси әдәдинә уjғун олан мәхсуси функсиjалар *ортогоналдыр*.

Бундан башга, $x_\kappa(t) = c_\kappa \sin \kappa t$ мәхсуси функсиjасында $c_\kappa = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ гәбул етсәк, асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\int_0^\pi x_\kappa^2(t)\, dt = 1, \ \kappa = 1, 2, \ldots$$

Онда $x_\kappa(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \kappa t$ мәхсуси функсиjасына *нормаллашдырылмыш* мәхсуси функсиjа деjилир.

Аjдындыр ки, нормаллашдырылмыш

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin t, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2t, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \kappa t, \ldots$$

мәхсуси функсиjалары ортогоналдырлар. Belә мәхсуси функсиjалар системинә (26), (27) мәсәләсинин ортонормал мәхсуси функсиjалар системи деjилир.

Уjғун анлаjышлар даһа үмуми олан (24), (25) мәсәләси үчүн дә доғрудур.

Теорем 9. *Тутаг ки, λ_1, λ_2 әдәдләри (24), (25) мәсәләсинин мүхтәлиф мәхсуси әдәдләри, $x(t, \lambda_1)$, $x(t, \lambda_2)$ исә уjғун мәхсуси функсиjаларыдыр. Онда*

$$\int_\alpha^\beta x(t, \lambda_1)\, x(t, \lambda_2)\, dt = 0.$$

Исбаты. Шәртә көрә $[\alpha, \beta]$ парчасында

$$\ddot{x}(t, \lambda_1) + \{\lambda_1 - q(t)\}\, x(t, \lambda_1) = 0,$$
$$\ddot{x}(t, \lambda_2) + \{\lambda_2 - q(t)\}\, x(t, \lambda_2) = 0$$

еjниликләри өдәнир. Бу еjниликләрдән биринчисини $x(t, \lambda_2)$-jә, икинчисини $x(t, \lambda_1)$-ә вуруб тәрәф-тәрәфә чыхсаг,

$$x(t, \lambda_2)\, \ddot{x}(t, \lambda_1) - x(t, \lambda_1)\, \ddot{x}(t, \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)\, x(t, \lambda_1)\, x(t, \lambda_2) = 0$$

еjнилиjини аларыг. Бу еjнилиjи α-дан β-jа гәдәр интеграллаjараг

$$x(t, \lambda_2)\, \ddot{x}(t, \lambda_1) - x(t, \lambda_1)\, \ddot{x}(t, \lambda_2) = (x(t, \lambda_2)\dot{x}(t, \lambda_1) - x(t, \lambda_1)\dot{x}(t, \lambda_2))^{\cdot}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$x(\beta, \lambda_2)\, \dot{x}(\beta, \lambda_1) - x(\beta, \lambda_1)\, \dot{x}(\beta, \lambda_2) - [x(\alpha, \lambda_2)\, \dot{x}(\alpha, \lambda_1) - x(\alpha, \lambda_2)\, \dot{x}(\alpha, \lambda_1)] + (\lambda_1 - \lambda_2) \int_\alpha^\beta x(t, \lambda_1)\, x(t, \lambda_2)\, dt = 0 \qquad (28)$$

бәрабәрлиjини аларыг.

Сәрһәд шәртләринин биринчисинә әсасән

$$a_{11}\, x(\alpha, \lambda_1) + a_{12}\, \dot{x}(\alpha, \lambda_1) = 0,$$
$$a_{11}\, x(\alpha, \lambda_2) + a_{12}\, \dot{x}(\alpha, \lambda_2) = 0.$$

Шәртә көрә $a_{11}^2 + a_{12}^2 > 0$ олдуғундан, бурадан алырыг ки,

$$x(\alpha, \lambda_1)\, \dot{x}(\alpha, \lambda_2) - x(\alpha, \lambda_2)\dot{x}(\alpha, \lambda_1) = 0$$

олмалыдыр. Еjни гаjда илә сәрһәд шәртләринин икинчисинә әсасән көстәрмәк олар ки,

$$x(\beta, \lambda_2)\, \dot{x}(\beta, \lambda_1) - x(\beta, \lambda_1)\, \dot{x}(\beta, \lambda_2) = 0.$$

Онда (28) бәрабәрлији

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_{\alpha}^{\beta} x(t,\lambda_1)x(t,\lambda_2)\,dt=0 \qquad (29)$$

шәклинә дүшүр. Бурадан теоремин доғрулуғу алыныр.

Исбат олунан теорем көстәрир ки, (24), (25) *мәсәләсинин ики мүхтәлиф мәхсуси әдәдинә ујғун олан мәхсуси функсијалары ортогоналдыр.*

Теорем 10. *(24), (25) мәсәләсинин мәхсуси әдәдләри һәгигидир.*

Исбаты. Әксини фәрз едәк, тутаг ки, $\lambda_1=u+iv,\ \neq 0$ әдәди (24), (25) мәсәләсинин мәхсуси әдәди, $x(t,\lambda_1)$ исә ујғун мәхсуси функсијадыр. Шәртә көрә $q(t)$ һәгиги функсија, a_{11}, a_{12}, b_{21}, b_{22} һәгиги әдәдләр олдуғундан, $\overline{\lambda}_1=u-iv$ әдәди дә мәхсуси әдәддир вә ујғун мәхсуси функсија $x(t,\overline{\lambda}_1)=\overline{x}(t,\lambda_1)$ олур. Онда $\lambda_1\neq\overline{\lambda}_1$ олдуғундан (29) бәрабәрлијиндән алырыг:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t,\lambda_1)\overline{x}(t,\lambda_1)\,dt=\int_{\alpha}^{\beta}|x(t,\lambda_1)|^2\,dt=0.$$

Бурадан $x(t,\lambda_1)\equiv 0$ олдуғу алыныр ки, бу да λ_1 әдәдинин мәхсуси әдәд олмасы шәртинә зиддир. Теорем исбат олунду.

Инди исә (25) сәрһәд шәртләри

$$x(\alpha)=0,\quad x(\beta)=0 \qquad (30)$$

шәклиндә олан һал үчүн (24), (30) мәсәләсинин мәхсуси әдәдләринин варлығыны өјрәнәк.

(24) тәнлијинин $x(\alpha)=0,\ \dot{x}(\alpha)=1$ шәртләрини өдәјән һәллини $x=\varphi(t,\lambda)$ илә ишарә едәк.

Лемма 1. *Тутаг ки, t_0 $(\alpha<t_0<\beta)$ нөгтәси $x=\varphi(t,\lambda_0)$ һәллинин сыфырыдыр. Онда кафи гәдәр кичик $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә елә $\sigma>0$ әдәди тапмаг олар ки, $|\lambda-\lambda_0|<\sigma$ шәртини өдәјән λ-лар үчүн $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин $(t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon)$ интервалында јеканә сыфыры вар.*

Исбаты. Сыфырларын садә олмасы һаггында теоремә әсасән (теорем 2), $\varphi(t_0,\lambda_0)=0$, $\varphi_t(t_0,\lambda_0)\neq 0$. Мүәјјәнлик үчүн $\varphi_t(t_0,\lambda_0)>0$ олан һала бахаг. Онда, $\varphi_t(t,\lambda_0)$ кәсилмәз олдуғундан, кифајәт гәдәр кичик $\varepsilon>0$ үчүн $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ интервалында да $\varphi_t(t,\lambda_0)>0$ олур. Бурадан алыныр ки,

$$\varphi(t_0-\varepsilon,\lambda_0)<0,\ \varphi(t_0+\varepsilon,\lambda_0)>0.$$

Һәллин параметрә нәзәрән кәсилмәзлији һаггында теоремә әсасән $\varphi(t,\lambda)$, $\varphi_t(t,\lambda)$ функсијалары t вә λ-ја нәзәрән кәсилмәздирләр. Одур ки, сечилмиш $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә елә $\sigma>0$ әдәди тапмаг олар ки, $|\lambda-\lambda_0|<\sigma$ олдугда $\varphi(t,\lambda)$ һәлли $\varphi(t_0-\varepsilon,\lambda)<0$, $\varphi(t_0+\varepsilon,\lambda)>0$ шәртләрини өдәјәр вә $(t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon)$

интервалында $\varphi_t(t,\lambda)>0$ олар. Демәли, $|\lambda-\lambda_0|<\sigma$ шәртини өдәјән λ-лар үчүн $\varphi(t,\lambda)$ һәлли $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ интервалында артан функсијадыр вә интервалын учларында мүхтәлиф ишарәли гијмәтләр алыр. Онда Коши теоремнә әсасән $\varphi(t,\lambda)$ функсијасынын $(t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon)$ интервалында јеканә сыфыры вар. Лемма исбат олунду.

Исбат олунан лемма көстәрир ки, $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин сыфырларыны $t(\lambda)$ илә ишарә етсәк, $t=t(\lambda)$ функсијасы кәсилмәздир.

Нәтичә. *Тутаг ки, $t_1,t_2,\dots,t_m$ нөгтәләри $\varphi(t,\overline{\lambda})$ һәллинин $\alpha<t_1<t_2<\dots<t_m\leqslant\beta$ шәртини өдәјән сыфырларыдыр. Әкәр $t_m=\beta$ оларса, елә $\rho>0$ әдәди тапмаг олар ки, $\lambda\in(\overline{\lambda},\overline{\lambda}+\rho)$ үчүн $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин (α,β) интервалында дүз m сајда сыфыры вар.*

Исбаты. Леммаја әсасән, кифајәт гәдәр кичик $\varepsilon>0$ әдәдинә көрә елә $\rho_1>0$ әдәди тапмаг олар ки, $\lambda\in(\overline{\lambda},\overline{\lambda}+\rho_1)$ олдугда $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин $(t_1-\varepsilon,t_1+\varepsilon),\dots,(t_{m-1}-\varepsilon,\ t_{m-1}+\varepsilon)$ интервалларынын һәр бириндә јеканә сыфыры вар.

Леммаја вә Штурм теоремнә әсасән $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин $(t_m-\varepsilon,t_m)(t_m=\beta)$ интервалында да јеканә сыфыры вар.

Демәли, $\lambda\in(\overline{\lambda},\overline{\lambda}+\rho_1)$ олдугда $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин (α,β) интервалында сыфырларынын сајы m-дән аз дејил. $|\varphi(t,\overline{\lambda})|$ функсијасынын

$$[\alpha+\varepsilon,t_1-\varepsilon],[t_1+\varepsilon,t_2-\varepsilon],\dots,[t_{m-1}+\varepsilon,t_m-\varepsilon] \qquad (31)$$

парчаларында алдығы гијмәтләрин ән кичијини d илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, $d>0$ вә $0<\sigma<d$ шәртини өдәјән ихтијари $\sigma>0$ әдәди үчүн елә $\rho_2>0$ әдәди вар ки, $t\in[\alpha,\beta],\lambda\in(\overline{\lambda},\ \overline{\lambda}+\rho_2)$ олдугда

$$|\varphi(t,\lambda)-\varphi(t,\overline{\lambda})|<\sigma \qquad (32)$$

шәрти өдәнир.

$\rho=\min(\rho_1,\rho_2)$ ишарә едәк. Онда $\lambda\in(\overline{\lambda},\overline{\lambda}+\rho)$ үчүн $\varphi(t,\lambda)$ һәлләри (32) бәрабәрсизлијини өдәдијиндән (31) парчаларынын һәр бириндә

$$|\varphi(t,\lambda)|\geqslant d-\sigma>0.$$

Демәли, $\lambda\in(\overline{\lambda},\overline{\lambda}+\rho)$ олдугда $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин бу парчаларда сыфыры јохдур.

Беләликлә, $\lambda\in(\overline{\lambda},\overline{\lambda}+\rho)$ олдугда $\varphi(t,\lambda)$ һәллинин (α,β) интервалында дүз m сајда сыфыры вар вә λ артдыгча бу сыфырлар сола доғру сүрүшүрләр.

Теорем 11. (24), (30) *мәсәләсинин артан истигамәтдә дүзүлмүш сонсуз сајда $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m,\dots$ мәхсуси әдәдләри вар вә λ_m мәхсуси әдәдинә ујғун олан $x_m(t)$ мәхсуси функсијасынын (α,β) интервалында m сајда сыфыры вар.*

Исбаты. Штурм теореминдән алынан 3-чү нәтиҹәјә әсасән $\lambda - q(t) \leqslant 0$, $t \in [\alpha, \beta]$ шәртини өдәјән λ-лар үчүн (24) тәнлијинин $\varphi(t, \lambda)$ һәлләринин (α, β) интервалында сыфыры јохдур.

Тутаг ки, $\max\limits_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} |q(t)| = c$. Онда $\lambda - c > 0$ олдугда

$$\ddot{y} + (\lambda - c) y = 0 \qquad (33)$$

тәнлијинин $y(\alpha) = 0$ шәртини өдәјән һәлләри

$$y(t, \lambda) = A \sin \left[\sqrt{\lambda - c}\,(t - \alpha)\right]$$

шәклиндәдир; бурада A ихтијари сабитдир. Ајдындыр ки, λ мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда $y(t, \lambda)$ һәллинин сыфырларынын сајы сонсуз олараг артыр. Дикәр тәрәфдән, $\lambda - q(t) \geqslant \lambda - c$ олдуғундан, Штурм теореминә әсасән, (24) тәнлијинин $\varphi(t, \lambda)$ һәлләринин дә (α, β) интервалында сыфырларынын сајы λ мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда сонсуз артыр.

Һәр һансы m тәбии әдәди көтүрүб λ параметринин елә гијмәтләринә бахаг ки, бу гијмәтләр үчүн $\varphi(t, \lambda)$ һәллинин $(\alpha, \beta]$ јарыминтервалында јерләшән дүз m сајда сыфыры олсун. Белә λ-лар чохлуғунун дәгиг јухары сәрһәдини λ_m илә ишарә едәк.

Көстәрәк ки, $\varphi(t, \lambda_m)$ һәллинин (α, β) интервалында дүз m сајда сыфыры вар.

Доғрудан да, тутаг ки, $\varphi(t, \lambda_m)$ һәллинин (α, β) интервалында $m - 1$ сајда сыфыры вар. Онда бу һәллин m-чи сыфыры β олмалыдыр вә леммадан алынан нәтиҹәјә әсасән елә $\rho > 0$ әдәди вар ки, $\lambda \in (\lambda_m, \lambda_m + \rho)$ үчүн $\varphi(t, \lambda)$ һәллинин (α, β) интервалында дүз m сајда сыфыры олар. Бу исә λ_m-ин тә'јининә зиддир. Демәли, $\varphi(t, \lambda_m)$ һәллинин (α, β) интервалында сыфырларынын сајы m-дән аз дејил.

Тутаг ки, $\varphi(t, \lambda_m)$ һәллинин (α, β) интервалында $m + l$ $(l \geqslant 1)$ сыфыры вар. Бу һәллин $(m + l)$-чи сыфыры үчүн $t_{m+l}(\lambda_m) < \beta$ олур. Һәллин сыфырлары λ-дан кәсилмәз асылы олдуғундан λ_m-ин елә кичик $(\lambda_m - \rho_1, \lambda_m + \rho_1)(\rho_1 > 0)$ әтрафы вар ки, бу әтрафда да $t_{m+l}(\lambda) < \beta$ шәрти өдәнир, бурада $t_{m+l}(\lambda)$ илә $\varphi(t, \lambda)$ һәллинин $(m + l)$-чи сыфыры ишарә олунмушдур. Бу исә јенә λ_m-ин тә'јининә зиддир. Демәли, $\varphi(t, \lambda_m)$ һәллинин (α, β) интервалында m сајда сыфыры вар.

Көстәрәк ки, $\varphi(\beta, \lambda_m) = 0$. Әксини фәрз едәк, тутаг ки, $\varphi(\beta, \lambda_m) \neq 0$. Онда $\varphi(t, \lambda)$ һәллинин λ-дан кәсилмәз асылылығына әсасән, елә $\rho_2 > 0$ әдәди вар ки, $\lambda \in (\lambda_m, \lambda_m + \rho_2)$ үчүн $\varphi(\beta, \lambda) \neq 0$ олур. Онда леммаја әсасән, белә λ-лар үчүн $\varphi(t, \lambda)$ һәллинин (α, β) интервалында m сајда сыфыры вар. Бурадан да, λ_m-ин дәгиг јухары сәрһәд олдуғуну нәзәрә алсаг, зиддијјәт алырыг. Демәли, $\varphi(\beta, \lambda_m) = 0$ олмалыдыр.

Беләликлә, λ_m әдәди (24), (30) мәсәләсинин мәхсуси әдәди, $x_m(t) = \varphi(t, \lambda_m)$ исә уjғун мәхсуси функсијасы олур вә бу функсијанын (α, β) интервалында дүз m сајда сыфыры вар. m ихтијари тәбии әдәд олдуғундан теорем исбат олунду.

§ 5. МӘХСУСИ ӘДӘДЛӘРИН ВӘ МӘХСУСИ ФУНКСИЈАЛАРЫН АСИМПТОТИКАСЫ

Бу параграфда (24), (25) Штурм—Лиувилл мәсәләсинин мәхсуси әдәдләринин вә мәхсуси функсијаларынын асимптотик ифадәләри тапылыр. Үмумилији позмадан, (25) сәрһәд шәртләриндә $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ гәбул едәк вә $a_{12} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$ олан һала бахаг. Онда (25) шәртләрини

$$\begin{cases} \dot{x}(0) - hx(0) = 0, \\ \dot{x}(\pi) + Hx(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (25')$$

шәклиндә јазмаг олар.

(24) тәнлијинин

$$x(0, \lambda) = 1, \quad \dot{x}(0, \lambda) = h$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини $x = \omega(t, \lambda)$ илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, бу һәлл (25′) сәрһәд шәртләриндән биринчисини өдәјир.

Мәгсәдимиз λ параметринин бөјүк гијмәтләри үчүн мәхсуси әдәдләри өјрәнмәкдир. Одур ки, $\lambda = \mu^2$ гәбул едиб (24) тәнлијини

$$\ddot{x} + \mu^2 x = q(t)\, x$$

шәклиндә јазаг. Бу тәнлијин сағ тәрәфинә мә'лум ифадә кими бахараг сабитләрин вариасијасы үсулуну тәтбиг етсәк, аларыг ки, $\omega(t, \lambda)$ функсијасы

$$\omega(t, \lambda) = \cos \mu t + \frac{h}{\mu} \sin \mu t + \frac{1}{\mu} \int_0^t q(s) \sin \mu (t - s)\, \omega(s, \lambda)\, ds \qquad (34)$$

интеграл тәнлијинин һәллидир.

Лемма 2. *$\lambda > 0$ олдугда λ вә t-дән асылы олмајан елә M әдәди вар ки,*

$$|\omega(t, \lambda)| \leqslant M.$$

Исбаты. Һәр бир $\lambda > 0$ үчүн $M_\lambda = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant \pi} |\omega(t, \lambda)|$ ишарә едәк. Шәртә көрә $\omega(t, \lambda)$ функсијасы (24) тәнлијинин һәлли олдуғундан M_λ әдәди сонлудур. Онда (34) мүнасибәтиндән ајдындыр ки,

$$|\omega(t, \lambda)| \leqslant 1 + \frac{|h|}{\mu} + \frac{1}{\mu} \int_0^\pi |q(t)|\, M_\lambda\, dt$$

бәрабәрсизлији доғрудур. Бурадан

$$M_\lambda \leqslant 1 + \frac{|h|}{\mu} + \frac{M_\lambda}{\mu}\int_0^\pi |q(t)|\,dt$$

бәрабәрсизлији алыныр. Тутаг ки, $\mu > \int_0^\pi |q(s)|\,ds$.

Онда сонунчу бәрабәрсизликдән

$$M_\lambda \leqslant \frac{\mu + |h|}{\mu - \int_0^\pi |q(t)|\,dt} = 1 + \frac{\int_0^\pi |q(t)|\,dt}{\mu - \int_0^\pi |q(t)|\,dt} + \frac{|h|}{\mu - \int_0^\pi |q(t)|\,dt}.$$

Бурадан ајдындыр ки, $\mu > 2\int_0^\pi |q(t)|dt$ оларса,

$$M_\lambda < 2 + |h|\left(\int_0^\pi |q(t)|\,dt\right)^{-1}.$$

Бу бәрабәрсизлијин сағ тәрәфи λ вә t-дән асылы олмадығындан алырыг ки, $\mu > 2\int_0^\pi |q(t)|\,dt$ олдугда M_λ әдәдләри јухарыдан мәһдуддур. $0 < \mu \leqslant 2\int_0^\pi |q(t)|\,dt$ олдугда исә M_λ әдәдләринин мәһдудлуғу $\omega(t,\lambda)$ функсијасынын λ параметринә нәзәрән кәсилмәз олмасындан алыныр. Одур ки, $M = \sup_\lambda M_\lambda$ ишарә етсәк, M сонлу әдәд олар. Лемма исбат олунду.

Леммадан алыныр ки,

$$\omega(t,\lambda) = \cos\mu t + O\left(\frac{1}{\mu}\right)^*. \qquad (35)$$

Инди λ параметрини елә сечәк ки, $\omega(t,\lambda)$ функсијасы (25′) шәртләриндән икинчисини дә өдәсин (ајдындыр ки, λ параметринин белә гијмәтләри (24), (25′) мәсәләсинин мәхсуси әдәдләри олур). Бунун үчүн (34) ејнилијинин t-јә нәзәрән төрәмәсини тапыб (35) мүнасибәтини дә нәзәрә алаг. Онда

$$\omega_t(t,\lambda) = -\mu\sin\mu t + h\cos\mu t + O(1) \qquad (36)$$

мүнасибәтини аларыг.

Алынмыш (35), (36) мүнасибәтләрини (25′) шәртләриндән икинчисиндә јазсаг, мәхсуси әдәдләри тә'јин етмәк үчүн

$$-\mu\sin\mu\pi + (h+H)\cos\mu\pi + O(1) = 0 \qquad (37)$$

тәнлијини аларыг.

$$\varphi(\mu) = -\mu\sin\mu\pi + (h+H)\cos\mu\pi + O(1)$$

ишарә едәк. Ајдындыр ки, $\varphi(\mu)$ функсијасы $(-\infty, +\infty)$ интервалында кәсилмәздир вә кифајәт гәдәр бөјүк n-ләр үчүн $\left[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right]$ парчасынын учларында мүхтәлиф ишарәли гијмәтләр алыр. Бурадан Коши теореминә әсасән алырыг ки, $\varphi(\mu)$ функсијасынын $\left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)$ интервалында һеч олмаса бир сыфыры вар. Бу исә көстәрир ки, (37) тәнлијинин кифајәт гәдәр бөјүк μ-ләр үчүн сонсуз сајда һәгиги көкләри вар. Ајдындыр ки, бу көкләр $\sin\mu\pi = 0$ тәнлијинин көкләринә јахын олмалыдыр. Одур ки, бөјүк μ-ләр үчүн (37) тәнлијинин көкләрини

$$\mu_n = n + \sigma_n \qquad (38)$$

шәклиндә көстәрмәк олар; бурада σ_n-ләр

$$-(n + \sigma_n)\sin\sigma_n\pi + (h+H)\cos\sigma_n\pi + O(1) = 0$$

мүнасибәтиндән тә'јин олунур. Бу бәрабәрлик исә $\sigma_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ олдугда доғрудур. Бу ифадәни (38)-дә јеринә јазсаг, (24), (25′) мәсәләсинин мәхсуси әдәдләринин квадрат көкләри үчүн

$$\mu_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (39)$$

асимптотикасыны аларыг.

Көстәрәк ки, $q(t)$ функсијасынын мәһдуд төрәмәси варса, (37) дүстуруну дәгигләшдирмәк олар. Бунун үчүн $\omega(t,\lambda)$ функсијасынын (34) ифадәсини вә бурадан алынан

$$\omega_t(t,\lambda) = -\mu\sin\mu t + h\cos\mu t + \int_0^t q(s)\cos\mu(t-s)\,\omega(s,\lambda)\,ds$$

төрәмәсини (25′) сәрһәд шәртләринин икинчисиндә јеринә јазыб груплашдыраг:

$$(-\mu + B)\sin\mu\pi + A\cos\mu\pi = 0, \qquad (40)$$

$$A = h + H + \int_0^\pi\left\{\cos\mu s + \frac{H}{\mu}\sin\mu s\right\} q(s)\,\omega(s,\lambda)\,ds,$$

* Бурада $f(x) = O((g(x))$ ишарәси, $x = a$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунан $f(x)$ вә $g(x)$ функсијалары үчүн $x \neq a$ олдугда $\frac{f(x)}{g(x)}$ нисбәтинин x дәјишәни a-ја јахынлашдыгда мәһдуд олдуғуну көстәрир.

$$B=\frac{hH}{\mu}+\int_0^{\pi}\left\{\sin\mu s+\frac{H}{\mu}\right\}q(s)\,\omega(s,\lambda)\,ds.$$

Бурада $\omega(t,\lambda)$ функсиjасынын (35) ифадәсини јеринә јазсаг

$$A=h+H+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)\cos 2\mu t\,dt+O\left(\frac{1}{\mu}\right),$$

$$B=\frac{hH}{\mu}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)\sin 2\mu t\,dt+O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

олар. $q(t)$ функсиjасынын мәһдуд төрәмәси олдуғундан һиссә-һиссә интеграллама ғла аларыг ки,

$$\int_0^{\pi}q(t)\cos 2\mu t\,dt=\frac{1}{2\mu}\,q(\pi)\sin 2\mu\pi-\frac{1}{2\mu}\int_0^{\pi}\dot q(t)\sin 2\mu t\,dt=O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$$\int_0^{\pi}q(t)\sin 2\mu t\,dt=-\frac{1}{2\mu}\Big[q(\pi)\cos 2\mu\pi-q(0)\Big]+$$

$$+\frac{1}{2\mu}\int_0^{\pi}\dot q(t)\cos 2\mu t\,dt=O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Беләликлә, A вә B әдәдләри үчүн

$$A=h+H+h_1+O\left(\frac{1}{\mu}\right),\quad B=O\left(\frac{1}{\mu}\right),\quad h_1=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)\,dt$$

мүнасибәтләри доғрудур. Бу гиjмәтләри (40) тәнлиjиндә нәзәрә алыб ону

$$\operatorname{tg}\mu\pi=\frac{h+H+h_1+O\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\mu+O\left(\frac{1}{\mu}\right)}$$

шәклиндә јазаг. Бурада $\mu_n=n+\sigma_n$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\operatorname{tg}\sigma_n\pi=\frac{h+H+h_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Демәли, кафи гәдәр бөjүк n-ләр үчүн

$$\pi\sigma_n=\frac{H+h+h_1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

олмалыдыр. Одур ки,

$$\mu_n=n+\frac{c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\ c=\frac{1}{\pi}\left(h+H+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}q(t)\,dt\right). \qquad (41)$$

Мәхсуси әдәдләр үчүн алынмыш (41) асимптотик дүстурундан истифадә едәрәк $x_n(t)=\omega(t,\lambda_n)$ мәхсуси функсиjасынын асимптотик ифадәсини тапаг. Бунун үчүн $\omega(t,\lambda)$ функсиjасынын (35) ифадәсини (34)-дә интеграл алтында јеринә јазаг вә $q(t)$ функсиjасынын мәһдуд төрәмәсини варлығыны нәзәрә алаг. Онда

$$\omega(t,\lambda)=\cos\mu t+\frac{h}{\mu}\sin\mu t+\frac{1}{\mu}\int_0^{t}q(s)\cos\mu s\sin\mu(t-s)\,ds+$$

$$+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)=\cos\mu t+\frac{h}{\mu}\sin\mu t+\frac{\sin\mu t}{2\mu}\int_0^{t}q(s)\,ds+O\left(\frac{1}{\mu^2}\right)$$

олар. Бурада $\mu=\mu_n$ көтүрүб (41) ифадәсини нәзәрә алсаг

$$x_n(t)=\omega(t,\lambda_n)=\cos nt-\frac{ct}{n}\sin nt+\frac{h}{n}\sin nt+$$

$$+\frac{\sin nt}{2n}\int_0^{t}q(s)\,ds+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Сонунчу мүнасибәтдә

$$\beta(t)=-ct+h+\frac{1}{2}\int_0^{t}q(s)\,ds \text{ гәбул етсәк}$$

$$x_n(t)=\cos nt+\frac{\beta(t)}{n}\sin nt+O\left(\frac{1}{n^2}\right). \qquad (42)$$

Беләликлә, (24), (25′) Штурм—Лиувилл мәсәләсинин мәхсуси әдәдләри вә мәхсуси функсиjалары үчүн (41) вә (42) асимптотик дүстурлары доғрудур.

Гејд едәк ки, (25) сәрһәд шәртләриндә a_{12}, b_{22} әдәдләриндән бири вә ја һәр икиси сыфыр олан һалларда да асимптотик дүстурлар алмаг олар.

§ 6. ГЕЈРИ-ХӘТТИ СӘРҺӘД МӘСӘЛӘСИ

Тутаг ки,

$$\ddot x=f(t,x) \qquad (43)$$

тәнлиjинин

$$x(\alpha)=A,\ x(\beta)=B \qquad (44)$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллини тапмаг тәләб олунур; бурада $\alpha,\beta\,(\alpha<\beta)$, A, B верилмиш һәгиги әдәдләрдир.

Бу мәсәләнин һәлли

$$x = y + \frac{B-A}{\beta-\alpha}t + \frac{\beta A - \alpha B}{\beta-\alpha} \qquad (45)$$

әвәзләмәси илә

$$\ddot{y} = F(t, y) \qquad (43')$$

тәнлијинин

$$y(\alpha) = 0, \; y(\beta) = 0 \qquad (44')$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир; бурада

$$F(t, y) = f\left(t, y + \frac{B-A}{\beta-\alpha}t + \frac{\beta A - \alpha B}{\beta-\alpha}\right).$$

Грин дүстурундан истифадә едәрәк көстәрәк ки, бахылан мәсәләнин һәллинин тапылмасы, мүәјјән интеграл тәнлијин һәллинин тапылмасы мәсәләсинә еквивалентдир.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, (бах: § 6 теорем 7)

$$G(t,\tau) = \begin{cases} -\dfrac{(t-\alpha)(\beta-\tau)}{\beta-\alpha}, & \alpha \leqslant t \leqslant \tau, \\ -\dfrac{(\tau-\alpha)(\beta-t)}{\beta-\alpha}, & \tau \leqslant t \leqslant \beta \end{cases}$$

функсијасы $\ddot{y} = 0$ тәнлијинин (44′) сәрһәд шәртләрини өдәјән Грин функсијасыдыр. (43′) тәнлијинин сағ тәрәфинә мә'лум функсија кими бахсаг, бу тәнлијин (44′) сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләси, Грин дүстуруна әсасән,

$$y(t) = \int_\alpha^\beta G(t,\tau) F(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

интеграл тәнлијинин һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир. Алынан интеграл тәнликдә (45) әвәзләмәсини нәзәрә алсаг, (43), (44) сәрһәд мәсәләсинин һәлли үчүн

$$x(t) = \varphi_0(t) + \int_\alpha^\beta G(t,\tau) f(\tau, x(\tau))\, d\tau \qquad (46)$$

интеграл тәнлијини аларыг; бурада

$$\varphi_0(t) = \frac{B-A}{\beta-\alpha}t + \frac{\beta A - \alpha B}{\beta-\alpha}.$$

Сәккизинчи теоремин исбат гајдасы илә асанлыгла көстәрмәк олар ки, (46) тәнлијинин һәр бир кәсилмәз һәлли (43), (44) сәрһәд мәсәләсинин һәллидир.

Теорем 12. *Тутаг ки, $f(t, x)$ функсијасы $D = \{\alpha \leqslant t \leqslant \beta; -\infty < x < +\infty\}$ золағында кәсилмәздир вә*

а) $|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant K|x-y|$,

б) $K(\beta-\alpha)^2 < 8$

шәртләри өдәнир. Онда (43) тәнлијинин (44) сәрһәд шәртләрини өдәјән јеканә һәлли вар.

Исбаты. $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәз олан функсијалар чохлуғуну $C[\alpha, \beta]$ илә ишарә едәк вә бу чохлугда

$$A(\varphi(t)) = \varphi_0(t) + \int_\alpha^\beta G(t,\tau) f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

операторуна бахаг.

Грин функсијасы вә $f(t, x)$ функсијасы кәсилмәз олдуғундан һәр бир $\varphi(t) \in C[\alpha, \beta]$ функсијасы үчүн

$$\psi(t) \equiv A(\varphi(t)) = \varphi_0(t) + \int_\alpha^\beta G(t,\tau) f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$$

функсијасы $[\alpha, \beta]$ парчасында кәсилмәздир. Демәли, A оператору $C[\alpha, \beta]$ чохлуғунда тә'сир едир.

Теоремин а) шәртинә әсасән ихтијари ики $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in C[\alpha, \beta]$ функсијалары үчүн

$$|A(\varphi_2(t)) - A(\varphi_1(t))| \leqslant K \int_\alpha^\beta |G(t,\tau)|\,|\varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau)|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant K \sup_{\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta} |\varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau)| \int_\alpha^\beta |G(t,\tau)|\, d\tau \qquad (47)$$

бәрабәрсизлији өдәнир.

Грин функсијасынын ифадәсинә әсасән

$$\int_\alpha^\beta |G(t,\tau)|\, d\tau = \int_\alpha^t |G(t,\tau)|\, d\tau + \int_t^\beta |G(t,\tau)|\, d\tau =$$

$$= \frac{(\beta-t)(t-\alpha)^2}{2(\beta-\alpha)} + \frac{(t-\alpha)(\beta-t)^2}{2(\beta-\alpha)}.$$

Көстәрмәк олар ки,

$$H(t) = \frac{(\beta-t)(t-\alpha)^2}{2(\beta-\alpha)} + \frac{(t-\alpha)(\beta-t)^2}{2(\beta-\alpha)}$$

функсијасы $[\alpha, \beta]$ парчасында ән бөјүк гијмәтини $t = \frac{\alpha+\beta}{2}$ нөгтәсиндә алыр вә

$$H\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}.$$

Она көрә дә

$$\int_\alpha^\beta |G(t,\tau)|\, d\tau \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

Бу бәрабәрсизлији (47)-дә нәзәрә алсаг,

$$|A(\varphi_2(t)) - A(\varphi_1(t))| \leqslant \frac{K(\beta-\alpha)^2}{8} \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)|. \qquad (48)$$

Бурадан, теоремин б) шәртинә әсасән алырыг ки, A оператору $C[\alpha,\beta]$ чохлуғунда сыхан оператордур. Онда сыхылмыш ин'икас принсипинә әсасән (II фәсил § 8) алырыг ки, (46) интеграл тәнлијинин $C[\alpha,\beta]$ чохлуғунда јеканә һәлли вар. Еквивалентлијә әсасән, бу һәлл һәм дә (43), (44) сәрһәд мәсәләсинин һәллидир. Теорем исбат олунду.

Нәтичә. *Тутаг ки, $f(t,x)$ функсијасы гапалы $D_R = \{\alpha\leqslant t\leqslant\beta;\ -R\leqslant x\leqslant R\}$ областында теоремин шәртләрини өдәјир вә*

$$\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\varphi_0(t)| + \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}\sup_{D_R}|f(t,x)| \leqslant R. \qquad (49)$$

Онда (43), (44) сәрһәд мәсәләсинин јеканә һәлли вар.

Исбаты. $C[\alpha,\beta]$ чохлуғунда $\sup\limits_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\varphi(t)| \leqslant R$ шәртини өдәјән $\varphi(t)$ функсијалары чохлуғуну $\Phi=\{\varphi(t)\}$ илә ишарә едәк вә јухарыда тә'јин олунан A операторуна Φ чохлуғунда бахаг.

Ихтијари $\varphi(t)\in\Phi$ үчүн

$$|A(\varphi(t))| \leqslant |\varphi_0(t)| + \int_\alpha^\beta |G(t,\tau)||f(\tau,\varphi(\tau))|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\varphi_0(t)| + \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}\sup_{D_R}|f(t,x)|$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Бурадан, (49) шәртинә әсасән алырыг ки, $|A(\varphi(t))| \leqslant R$. Јә'ни A оператору Φ чохлуғунда тә'сир едир.

Дикәр тәрәфдән, теоремин а) шәртинә көрә ихтијари $\varphi(t)$, $\psi(t)\in\Phi$ үчүн (48) бәрабәрсизлији өдәнир вә б) шәртинә әсасән A оператору Φ чохлуғунда сыхандыр.

Беләликлә, Φ чохлуғу вә A оператору үчүн сыхылмыш ин'икас принсипинин шәртләри өдәнир. Она көрә дә (46) интеграл тәнлијинин Φ чохлуғунда јеканә һәлли вар. Нәтичә исбат олунду.

Гејд едәк ки, теоремин шәртләри өдәнмәдикдә сәрһәд мәсәләсинин һәлли олмаја да биләр. Буну көстәрмәк үчүн

$$\ddot x = 1 - x,\quad x(0)=0,\quad x(\pi)=0$$

сәрһәд мәсәләсинә бахаг. Бу мәсәләдә

$$K=1,\quad K(\beta-\alpha)^2=\pi^2>8.$$

Ајдындыр ки, $x=c_1\sin t + c_2\cos t + 1$ аиләси $\ddot x = 1-x$ тәнлијинин үмуми һәллидир вә бу аилә ичәрисиндә $x(0)=0$, $x(\pi)=0$ шәртини өдәјән функсија јохдур.

Инди

$$\ddot x = f(t,x,\dot x) \qquad (50)$$

тәнлијинин

$$x(\alpha)=0,\quad x(\beta)=0 \qquad (51)$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә бахаг.

Јухарыдакы мүһакимәләрә әсасән алырыг ки, (50) тәнлијинин (51) сәрһәд шәртләрини өдәјән һәлли һәм дә

$$x(t)=\int_\alpha^\beta G(t,\tau) f(\tau, x(\tau), \dot x(\tau))d\tau$$

тәнлијинин һәллидир. Бурадан

$$\dot x(t) = \int_\alpha^\beta G_t(t,\tau) f(\tau,x(\tau),\dot x(\tau))d\tau$$

олдуғундан, (50), (51) сәрһәд мәсәләсинин һәллинин тапылмасы

$$\begin{cases} \varphi_1(t)=\int_\alpha^\beta G(t,\tau) f(\tau,\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau))\,d\tau, \\ \varphi_2(t)=\int_\alpha^\beta G_t(t,\tau) f(\tau,\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau))\,d\tau \end{cases} \qquad (52)$$

интеграл тәнликләр системинин һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Теорем 13. *Тутаг ки, $f(t,x_1,x_2)$ функсијасы $П=\{\alpha\leqslant t\leqslant\beta;\ -\infty<x_i<+\infty,\ i=1,2\}$ золағында кәсилмәздир вә*

а) $|f(t,x_1,x_2)-f(t,y_1,y_2)| \leqslant K_1|x_1-y_1| + K_2|x_2-y_2|$,

б) $\dfrac{K_1(\beta-\alpha)^2}{8} + \dfrac{K_2(\beta-\alpha)}{2} < 1$

шәртләри өдәнир. Онда (50) тәнлијинин (51) сәрһәд шәртләрини өдәјән јеканә һәлли вар.

Исбаты. Теореми исбат етмәк үчүн көстәрәк ки, (52) интеграл тәнликләр системинин јеканә кәсилмәз һәлли вар.

Бу мәгсәдлә компонентләри $[\alpha,\beta]$ парчасында кәсилмәз олан $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ вектор-функсијалар чохлуғуну $C_2[\alpha,\beta]$ илә ишарә едәк. Һәр бир $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\in C_2[\alpha,\beta]$ вектор-функсијасына

$$\|\varphi\| = \max\left\{\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\varphi_1(t)|,\ \frac{\beta-\alpha}{4}\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\varphi_2(t)|\right\}$$

әдәдини гаршы гојаг. Бу әдәдә $\varphi(t)$ вектор функсијасынын *нормасы* дејилир.

Әкәр $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғундан көтүрүлмүш $\{\varphi^n(t)\}$ вектор-функсијалар ардычыллығы вә $\varphi(t)$ вектор-функсијасы үчүн

$\lim\limits_{n\to\infty} \| \varphi^n(t) - \varphi(t) \| = 0$ оларса, дејирләр ки, $\{\varphi^n(t)\}$ вектор-функсијалар ардычыллығы норма мә'нада $\varphi(t)$ вектор-функсијасына јығылыр. Норманын тә'јининдән ајдындыр ки, бу вектор-функсијалар ардычыллығынын компонентләриндән дүзәлдилмиш $\{\varphi_1^n(t)\}$, $\{\varphi_2^n(t)\}$ ардычыллыглары ујғун олараг $\varphi(t)$ вектор-функсијасынын компонентләри олан $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ функсијаларына $[\alpha,\beta]$ парчасында мүнтәзәм јығылырлар. Она көрә $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғунда норма мә'нада јығылан һәр бир ардычыллығын лимити дә бу чохлуға дахилдир. $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғундан көтүрүлмүш һәр бир $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ вектор-функсијасына, компонентләри

$$\psi_1(t) = \int_\alpha^\beta G(t,\tau) f(\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))\,d\tau,$$

$$\psi_2(t) = \int_\alpha^\beta G_t(t,\tau) f(\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau))\,d\tau$$

дүстурлары илә тә'јин олунан $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ вектор-функсијасыны гаршы гојаг. Онда $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғунда бир оператор тә'јин олунур. Бу оператору A илә ишарә едәк. Операторун тә'јининә көрә $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғундан көтүрүлмүш $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ вектор-функсијасына һәмин чохлуға дахил олан $A(\varphi(t)) = (A(\varphi_1(t)), A(\varphi_2(t)))$ вектор-функсијасы гаршы гојулур.

Көстәрәк ки, бу оператор $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғунда сыхандыр. Истәнилән ики $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ вектор-функсијалары үчүн

$$A(\varphi_1(t)) - A(\psi_1(t)) = \int_\alpha^\beta G(t,\tau)[f(\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)) - f(\tau, \psi_1(\tau), \psi_2(\tau))]\,d\tau,$$

$$A(\varphi_2(t) - A(\psi_2(t)) = \int_\alpha^\beta G_t(t,\tau)[f(\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)) - f(\tau, \psi_1(\tau), \psi_2(\tau))]\,d\tau$$

бәрабәрликләри өдәндијиндән, теоремин а) шәртинә әсасән

$$| A(\varphi_1(t)) - A(\psi_1(t)) | \leqslant \int_\alpha^\beta |G(t,\tau)|\,d\tau \Big[K_1 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| + K_2 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)|\Big];$$

$$| A(\varphi_2(t)) - A(\psi_2(t)) | \leqslant \int_\alpha^\beta |G_t(t,\tau)|\,d\tau \Big[K_1 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| + K_2 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)|\Big].$$

Грин функсијасынын ифадәсинә әсасән

$$\int_\alpha^\beta |G_t(t,\tau)|\,d\tau \leqslant \frac{\beta-\alpha}{2}, \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

олдуғуну көстәрмәк олар. Демәли,

$$| A(\varphi_1(t)) - A(\psi_1(t)) | \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}\Big[K_1 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| + K_2 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)|\Big],$$

$$| A(\varphi_2(t)) - A(\psi_2(t)) | \leqslant \frac{\beta-\alpha}{2}\Big[K_1 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| + K_2 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)|\Big].$$

Бурадан, $C_2[\alpha,\beta]$-дә норманын тә'јининә әсасән

$$\| A(\varphi) - A(\psi) \| = \max\Big\{ \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} | A(\varphi_1(t)) - A(\psi_1(t)) |,\ \frac{\beta-\alpha}{4} \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} | A(\varphi_2(t)) - A(\psi_2(t)) | \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\beta-\alpha)}{8}\Big[K_1 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| + K_2 \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)|\Big] = \frac{K_1(\beta-\alpha)}{8} \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| + \frac{K_2(\beta-\alpha)}{2} \times$$

$$\times \frac{\beta-\alpha}{4} \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| \leqslant \Big[\frac{K_1(\beta-\alpha)^2}{8} + \frac{K_2(\beta-\alpha)}{2}\Big]\|\varphi - \psi\|.$$

Беләликлә, $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғундан көтүрүлмүш $\varphi(t)$, $\psi(t)$ вектор-функсијалары үчүн

$$\| A(\varphi) - A(\psi) \| \leqslant \Big[\frac{K_1(\beta-\alpha)^2}{8} + \frac{K_2(\beta-\alpha)}{2}\Big] \| \varphi - \psi \| \quad (53)$$

бәрабәрсизлији өдәнир.

Бурадан теоремин б) шәртинә әсасән алырыг ки, A оператору $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғунда сыхандыр.

Демәли, (52) интеграл тәнликләр системинин јеканә кәсилмәз һәлли вар. Теорем исбат олунду.

Нәтичә. *Тутаг ки, $f(t, x_1, x_2)$ функсијасы гапалы $\Pi_R = \{\alpha\leqslant t\leqslant\beta;\ -R_1\leqslant x_1\leqslant R_1;\ -R_2\leqslant x_2\leqslant R_2\}$ областында кәсилмәздир, теоремин а), б) шәртләри өдәнир вә*

$$M(\beta-\alpha)^2 \leqslant 8R_1,\quad M(\beta-\alpha) \leqslant 2R_2,\quad M = \sup_{\Pi_R} | f(t, x_1, x_2) |.$$

Онда (50), (51) сәрһәд мәсәләсинин јеканә һәлли вар.

260—21

Исбаты. $C_2[\alpha,\beta]$ чохлуғундан компонентләри $\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\varphi_1(t)|\leqslant R_1$, $\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\varphi_2(t)|\leqslant R_2$ шәртини өдәјән $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ вектор-функсијалар чохлуғуну Φ_2 илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, Φ_2 чохлуғунун норма мә'нада јығылан һәр бир вектор-функсијалар ардычыллығынын лимити дә бу чохлуға дахилдир.

Көстәрәк ки, теоремин исбаты заманы тә'јин олунан A оператору Φ_2 чохлуғунда тә'сир едир вә бурада сыхандыр.

Доғрудан да, һәр бир $\varphi(t)\in\Phi_2$ үчүн

$$A(\varphi_1(t))=\int_\alpha^\beta G(t,\tau)f(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau))\,d\tau,$$

$$A(\varphi_2(t))=\int_\alpha^\beta G_1(t,\tau)f(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau))\,d\tau$$

олдуғундан,

$$|A(\varphi_1(t))|\leqslant\int_\alpha^\beta|G(t,\tau)|\,|f(\tau,\varphi_1(\tau)),\varphi_2(\tau))|\,d\tau\leqslant\frac{M(\beta-\alpha)^2}{8},$$

$$|A(\varphi_2(t))|\leqslant\int_\alpha^\beta|G_1(t,\tau)|\,|f(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau))|\,d\tau\leqslant\frac{M(\beta-\alpha)}{2}.$$

Бурадан нәтичәнин сонунчу шәртинә әсасән

$$\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|A(\varphi_1(t))|\leqslant R_1,\quad \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|A(\varphi_2(t))|\leqslant R_2.$$

Демәли, $A(\varphi(t))=(A(\varphi_1(t)),A(\varphi_2(t)))$ вектор-функсијасы Φ_2 чохлуғуна дахил олур, ја'ни A оператору Φ_2 чохлуғунда тә'сир едир. Бундан башга, Φ_2 чохлуғундан көтүрүлмүш ихтијари $\varphi(t)$, $\psi(t)$ вектор-функсијалары үчүн (53) бәрабәрсизлији доғрудур. Она көрә A оператору Φ_2 чохлуғунда сыхан оператордур. Сыхылмыш ин'икас принсипинә әсасән (52) интеграл тәнликләр системинин Φ_2 чохлуғунда јеканә һәлли вар. Нәтичә исбат олунду.

§ 7. БЕССЕЛ ТӘНЛИЈИ ВӘ БЕССЕЛ ФУНКСИЈАЛАРЫ

а) *Бессел тәнлији.* Бир чох ријази физика мәсәләләринин һәллиндә Бессел тәнлији адланан

$$t^2\ddot{x}+t\dot{x}+(t^2-\nu^2)x=0 \tag{54}$$

тәнлијиндән истифадә олунур; бурада ν параметрдир вә тәнлијин индекси адланыр. Бессел тәнлији ν параметринин анчаг бә'зи гијмәтләриндә квадратура илә һәлл олунур.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\nu=\frac{1}{2}$ олдугда алынан

$$t^2\ddot{x}+t\dot{x}+\left(t^2-\frac{1}{4}\right)x=0 \tag{55}$$

тәнлији $x=t^{-\frac{1}{2}}y$ $(t>0)$ әвәзләмәси илә

$$\ddot{y}+y=0$$

тәнлијинә кәтирилир. Бу тәнлијин $y_1=\sin t$, $y_2=\cos t$ хәтти асылы олмајан һәлләри үчүн $x_1=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$, $x_2=\frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ функсијалары $(0,+\infty)$ интервалында (55) тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләри олур.

Ајдындыр ки,

$$\sin t=t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\ldots,\quad \cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\ldots$$

ајрылышларындан истифадә етсәк, бу һәлләри

$$x_1=t^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}-\cdots\right),\quad x_2=t^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\cdots\right)$$

шәклиндә көстәрмәк олар. Демәли, (55) тәнлијинин тапылмыш һәлләри $t^{\frac{1}{2}}$, $t^{-\frac{1}{2}}$ функсијалары илә, јығылан гүввәт сыраларынын һасили кими көстәрилир. Она көрә көзләмәк олар ки (54) тәнлијинин дә $t^\nu\sum_{\kappa=0}^\infty a_\kappa t^\kappa$, $t^{-\nu}\sum_{\kappa=0}^\infty b_\kappa t^\kappa$ шәклиндә һәлләри вар.

Тәнликдә анчаг ν^2 иштирак етдијиндән, үмумилији позмадан, $\nu\geqslant 0$ гәбул едәк вә онун һәллини

$$x=t^\nu\sum_{\kappa=0}^\infty a_\kappa t^\kappa \tag{56}$$

шәклиндә ахтараг. Формал олараг (56) сырасыны (54) тәнлијиндә јазыб t-нин дәрәчәләри үзрә груплашдырсаг вә ејни дәрәчәләрин әмсалларыны сыфра бәрабәр етсәк,

$$(2\nu+1)a_1=0,\quad \kappa(2\nu+\kappa)a_\kappa+a_{\kappa-2}=0,\ \kappa=2,3,\ldots$$

чәбри тәнликләрини аларыг. Бурадан,

$$a_1=0,\quad a_\kappa=-\frac{a_{\kappa-2}}{\kappa(2\nu+\kappa)},\quad \kappa=2,3,\ldots,$$

Бу дүстурлардан ајдындыр ки,

$$a_{2m+1}=0,\quad a_{2m}=(-1)^m\frac{a_0}{2^{2m}(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)m!},\ m=1,2,\ldots$$

Беләликлә,

$$a_0 t^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{t^{2m}}{2^{m} (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)\, m!} \qquad (57)$$

сырасы (54) тәнлијинин формал һәлли олур.

Гејд едәк ки, ν там әдәд олмадыгда, мәнфи t-ләр үчүн t^{ν}, үмумијјәтлә, хәјали гијмәтләр алыр. Она көрә дә ν там әдәд олмадыгда (57) сырасына $(0, +\infty)$ интервалында бахылыр.

Даламбер әламәтинә әсасән, (57) сырасы һәр бир $t \geqslant 0$ үчүн мүтләг јығылыр. Она көрә дә ихтијари $a_0 \neq 0$ үчүн (57) сырасы $(0, +\infty)$ интервалында (54) тәнлијинин һәлли олур.

Бу һәллдә $a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$ көтүрмәклә алынан

$$J_{\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(\nu+1)(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)\, m!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\nu}$$

функсијасына *биринчи нөв ν индексли Бессел функсијасы* дејилир. Бурада $\Gamma(\mu)$ илә гамма-функсија ишарә олунмушдур. Мә'лумдур ки,

$$\Gamma(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\mu-1}\, dt \quad (0 < \mu < +\infty).$$

Бурадан һиссә-һиссә интеграллaмагла

$$\Gamma(\mu+1) = \mu\Gamma(\mu)$$

дүстуруну аларыг. Истәнилән κ тәбии әдәди үчүн, бу дүстуру κ дәфә ардычыл тәтбиг етсәк,

$$\Gamma(\mu+\kappa+1) = (\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+\kappa)\,\Gamma(\mu+1). \qquad (58)$$

Ајдындыр ки, $\Gamma(1)=1$ вә (58) дүстуруна әсасән $\Gamma(\kappa+1)=\kappa!$. Бу дүстурлара әсасән $J_{\nu}(t)$ Бессел функсијасыны

$$J_{\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\nu}$$

шәклиндә јазмаг олар.

Ејни гајда илә (54) тәнлијинин $t^{-\nu}\sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa} t^{\kappa}\, (b_0 \neq 0)$ шәклиндә һәллини дә гура биләрик вә бу сыраны да гамма-функсија васитәсилә ифадә етмәк олар. Бунун үчүн әввәлчә гамма-функсијаны мәнфи μ-ләр үчүн тә'јин едәк.

Тутаг ки, $\mu \in (-1, 0)$. Онда $\mu+1 > 0$. Белә μ-ләр үчүн гамма-функсијаны

$$\Gamma(\mu) = \frac{1}{\mu}\Gamma(\mu+1)$$

дүстуру илә тә'јин едәк. Әкәр $\mu \in (-2, -1)$ оларса $\mu+2>0$ вә белә μ-ләр үчүн гамма-функсијаны

$$\Gamma(\mu) = \frac{1}{\mu(\mu+1)}\Gamma(\mu+2)$$

дүстуру илә тә'јин едәк вә с. Бу гајда илә истәнилән κ тәбии әдәди үчүн $\mu \in (-\kappa, -(\kappa-1))$ олдугда гамма-функсијаны

$$\Gamma(\mu) = \frac{1}{\mu(\mu+1)\cdots(\mu+\kappa-1)}\Gamma(\mu+\kappa), \quad \kappa = 1, 2, \ldots$$

дүстуру илә тә'јин олунур.

Тә'јин олунма гајдасындан ајдындыр ки, там олмајан мәнфи μ-ләр үчүн дә (58) дүстуру доғрудур вә $\lim_{\mu \to -\kappa}\Gamma(\mu) = \infty$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$. Она көрә дә $\Gamma(-\kappa) = \infty$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots$ гәбул олунур. Әлавә олараг гејд едәк ки, $\Gamma(\mu)$ функсијасы үчүн

$$\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \mu\pi} \qquad (59)$$

дүстуру доғрудур.

Ајдындыр ки, (54) тәнлијиндә ν әвәзинә $-\nu$ јаздыгда тәнлик дәјишмир. Она көрә дә там олмајан ν-ләр үчүн тәнлијин $t^{-\nu}\sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa} t^{\kappa}\, (b_0 \neq 0)$ шәклиндә һәллини $J_{\nu}(t)$-нин ифадәсиндә ν әвәзинә $-\nu$ јазмагла алмаг олар. Онда (54) тәнлијинин

$$J_{-\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-\nu}$$

һәлли алынар.

Бу гајда илә гурулан $J_{-\nu}(t)$ функсијасына *$-\nu$ индексли биринчи нөв Бессел функсијасы* дејилир.

Там олмајан ν-ләр үчүн $J_{\nu}(t)$ вә $J_{-\nu}(t)$ функсијаларынын ајрылышларында t-нин мүхтәлиф дәрәчәләри иштирак едир. Она көрә там олмајан ν-ләр үчүн $J_{\nu}(t)$, $J_{-\nu}(t)$ функсијалары (54) тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләри олурлар вә онун үмуми һәлли

$$x = c_1 J_{\nu}(t) + c_2 J_{-\nu}(t)$$

шәклиндәдир; бурада c_1, c_2 ихтијари сабитләрдир.

Инди ν там әдәд олан һала бахаг. Тутаг ки, $\nu = n$ (бурада n там әдәддир). Онда $m-n+1 \leqslant 0$ олдугда $\Gamma(m-n+1) = \infty$ олдуғундан, $J_{-n}(t)$-нин ифадәси ашағыдакы шәклә дүшүр:

$$J_{-n}(t)=\sum_{m=n}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n}.$$

Бурада $m=n+l$ әвәзләмәси апарсаг,

$$J_{-n}(t)=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{n+l}\frac{1}{\Gamma(n+l+1)\Gamma(l+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+n}=$$

$$=(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+n}.$$

Јә'ни $J_{-n}(t)=(-1)^n J_n(t)$. Демәли, там ν-ләр үчүн $J_n(t)$, $J_{-n}(t)$ функсијалары Бессел тәнлијинин хәтти асылы һәлләри олур вә онун үмуми һәллини бу һәлләрин хәтти комбинасијасы кими көстәрмәк олмаз.

Там ν-ләр үчүн Бессел тәнлијинин үмуми һәлли мүхтәлиф гајдаларла гурулур. Бу гајдалардан бири, мә'лум $J_n(t)$ һәллинә вә Остроградски-Лиувилл-Јакоби дүстуруна әсасланыр. Һәмин дүстура әсасән, Бессел тәнлијинин үмуми һәллинин тапылмасы

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x}{J_n(t)}\right]=\frac{c_2}{J_n^2(t)}\,e^{-\int\frac{dt}{t}}$$

тәнлијинин интегралланмасына кәтирилир. Бурадан

$$x=c_1J_n(t)+c_2J_n(t)\int\frac{dt}{t\,J_n^2(t)}.$$

Икинчи үсул, Бессел тәнлијинин $J_n(t)$ һәлли илә хәтти асылы олмајан һәллини гурмагдан ибарәтдир. Бу мәгсәдлә $0<\varepsilon<1$ шәртини өдәјән ихтијари ε әдәди үчүн

$$t^2\ddot{x}+t\dot{x}+[t^2-(n-\varepsilon)^2]\,x=0 \qquad (60)$$

тәнлијинә бахаг. Бурада $n-\varepsilon$ там әдәд олмадығындан тәнлијин $J_{n-\varepsilon}(t)$, $J_{-(n-\varepsilon)}(t)$ кими хәтти асылы олмајан һәлләри вар вә ајдындыр ки,

$$У_{n-\varepsilon}(t)=\frac{(-1)^n J_{-(n-\varepsilon)}(t)-J_{n-\varepsilon}(t)}{\varepsilon}$$

функсијасы да (60) тәнлијинин һәллидир. Кєсгәрәк ки, сонлу $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}У_{n-\varepsilon}(t)=У_n(t)$ вар вә $У_n^{(t)}$ лимит функсијасы $\nu=n$ үчүн (54) тәнлијинин һәллидир. Бунун үчүн $J_{n-\varepsilon}(t)$, $J_{-(n-\varepsilon)}(t)$ функсијаларынын ифадәләриндән истифадә едәрәк $У_{n-\varepsilon}(t)$-ни ачыг шәкилдә јазаг:

$$У_{n-\varepsilon}(t)=(-1)^n\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n+\varepsilon}-$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n-\varepsilon+1)\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n-\varepsilon}=$$

$$=(-1)^n\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n+\varepsilon}+$$

$$+(-1)^n\sum_{m=n}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n+\varepsilon}-$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n-\varepsilon+1)\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n-\varepsilon}.$$

Икинчи топлананда m әвәзинә $n+m$ јазсаг,

$$У_{n-\varepsilon}(t)=(-1)^n\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n+\varepsilon}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{F_m(\varepsilon)}{\varepsilon}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+n}$$

олар; бурада

$$F_m(\varepsilon)=\frac{1}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m+\varepsilon+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\varepsilon}-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n-\varepsilon+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{-\varepsilon}.$$

Јухарыда көстәрдик ки, $m=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ олдугда $\Gamma(m-n+1)=\infty$. Одур ки, белә m-ләр үчүн $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Gamma(m-n+\varepsilon+1)=\infty$ вә $\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\,\varepsilon$ ифадәси ε сыфра јахынлашдыгда $\infty\cdot 0$ шәкилли гејри-мүәјјәнлик тәшкил едир. Бу гејри-мүәјјәнлији ачмаг үчүн $\frac{1}{\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon}$ ифадәсинин ε сыфра јахынлашдыгда лимитини һесаблајаг. (59) дүстуруна әсасән

$$\Gamma(m-n+\varepsilon+1)=\Gamma(1-(n-\varepsilon-m))=\frac{\pi}{\Gamma(n-\varepsilon-m)\sin(n-\varepsilon-m)\pi}$$

олдуғундан, Лопитал гајдасыны тәтбиг етсәк,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Gamma(n-\varepsilon-m)\sin(n-\varepsilon-m)\pi}{\pi\varepsilon}=$$

$$= -\Gamma(n-m)\cos(n-m)\pi = (-1)^{n-m+1}\Gamma(n-m).$$

Онда

$$\lim_{\varepsilon\to0}(-1)^n\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-n+\varepsilon+1)\varepsilon} = -\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-m)}{\Gamma(m+1)}.$$

Инди $\frac{F_m(\varepsilon)}{\varepsilon}$ ифадәсинин лимитини һесаблаjаг. Лопитал гаjдасына әсасән

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{F_m(\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to0} F'_m(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to0}\left\{-\frac{\Gamma'(m+\varepsilon+1)}{\Gamma(m+n+1)\Gamma^2(m+\varepsilon+1)}\left(\frac t2\right)^{\varepsilon} + \frac{1}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m+\varepsilon+1)}\left(\frac t2\right)^{\varepsilon}\ln\frac t2 - \frac{\Gamma'(m+n-\varepsilon+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma^2(m+n-\varepsilon+1)}\left(\frac t2\right)^{-\varepsilon} + \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n-\varepsilon+1)}\left(\frac t2\right)^{-\varepsilon}\ln\frac t2\right\} = \frac{2}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}\ln\frac t2 - \frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+n+1)\Gamma^2(m+1)} - \frac{\Gamma'(m+n+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma^2(m+n+1)}.$$

Бу ифадәләри нәзәрә алсаг,

$$Y_n(t) = -\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-m)}{\Gamma(m+1)}\left(\frac t2\right)^{2m-n} + \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}\left\{2\ln\frac t2 - \frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} - \frac{\Gamma'(m+n+1)}{\Gamma(m+n+1)}\right\}\left(\frac t2\right)^{2m+n}.$$

һәллин параметрләрә нәзәрән кәсилмәз асылылығы һаггында теоремә әсасән алырыг ки, $Y_n(t)$ функсиасы $\nu=n$ үчүн (54) тәнлиjинин һәллидир.

$Y_n(t)$ функсиjасына *икинҹи нөв Бессел функсиjасы* деjилир. Бу функсиjанын ифадәсиндә $\ln t$ топлананы олдуғундан, $J_n(t)$ илә хәтти асылы деjил. Она көрә дә $\nu=n$ олдугда (54) тәнлиjинин үмуми һәлли

$$x = c_1J_n(t)+c_2Y_n(t)$$

шәклиндә верилир.

б) *Бессел функсиjалары арасында әлагә.* $J_\nu(t)$ функсиjасынын ифадәсинә әсасән алынан

$$t^\nu J_\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{t^{2m+2\nu}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)2^{2m+\nu}}$$

мүнасибәтини диференсиаллаjаг:

$$\frac{d}{dt}[t^\nu J_\nu(t)] = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(2m+2\nu)t^{2m+2\nu-1}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)\cdot2^{2m+\nu}}.$$

Бурадан, $\Gamma(m+\nu+1)=(m+\nu)\Gamma(m+\nu)$ олдуғундан алырыг ки,

$$\frac{d}{dt}[t^\nu J_\nu(t)] = t^\nu J_{\nu-1}(t). \qquad (61)$$

Охшар гаjда илә көстәрмәк олар ки,

$$\frac{d}{dt}\left[t^{-\nu}J_\nu(t)\right] = -t^{-\nu}J_{\nu+1}(t) \qquad (62)$$

дүстуру доғрудур.

Алынан дүстурлары ачыг шәкилдә jазаг:

$$t^\nu J'_\nu(t)+\nu t^{\nu-1}J_\nu(t)=t^\nu J_{\nu-1}(t),$$
$$t^{-\nu}J'_\nu(t)-\nu t^{-\nu-1}J_\nu(t) = -t^{-\nu}J_{\nu+1}(t).$$

Бу дүстурларын биринчисини t^ν-jә, икинчисини $t^{-\nu}$-jә ихтисар едиб тәрәф-тәрәфә чыхсаг, истәнилән ν үчүн

$$J_{\nu-1}(t)+J_{\nu+1}(t)=\frac{2\nu}{t}J_\nu(t) \qquad (63)$$

дүстуру алынар. (63) дүстурундан истифадә едәрәк көстәрәк ки, $\nu=\frac{2\kappa+1}{2}$, $\kappa=0, 1, 2, \dots$ олдугда $J_\nu(t)$, $J_{-\nu}(t)$ функсиjалары елементар функсиjаларла ифадә олунурлар.

Бунун үчүн әввәлҹә $\kappa=0$ көтүрәк. Бу заман $\nu=\frac12$ олур вә уjғун (55) тәнлиjинин хәтти асылы олмаjан һәлләри $x_1=\frac{\sin t}{\sqrt t}$, $x_2=\frac{\cos t}{\sqrt t}$. Бу һәлләрин jухарыда көстәрилән аjрылышларына әсасән $J_{1/2}(t)=\frac{\sin t}{\sqrt2\,\Gamma\left(\frac32\right)\sqrt t}$, $J_{-\frac12}(t)=\frac{\cos t}{\sqrt2\,\Gamma\left(\frac12\right)\sqrt t}$.

Дикәр тәрәфдән, (59) дүстуруна әсасән $\Gamma\left(\frac12\right)=\sqrt\pi$ олдуғундан

$$\Gamma\left(\frac32\right)=\frac12\Gamma\left(\frac12\right)=\frac{\sqrt\pi}{2}.$$

Демәли, $J_{\frac12}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin t$, $J_{-\frac12}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t$. Онда $\nu=\frac12$ көтүрмәклә (63) дүстурундан алырыг ки,

$$J_{\frac{3}{2}}(t)=\frac{1}{t}J_{\frac{1}{2}}(t)-J_{-\frac{1}{2}}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin t-t\cos t}{t\sqrt{t}}.$$

Бу гајда илә ардычыл олараг $J_{\frac{5}{2}}(t)$, $J_{\frac{7}{2}}(t)$ вә с. функсијаларыны елементар функсијаларла ифадә етмәк олар.

в) *Бессел функсијаларынын сыфырлары.* Бессел тәнлијиндә $x=\frac{y}{\sqrt{t}}$ әвәзләмәси апарсаг,

$$\ddot{y}+\left[1+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)t^{-2}\right]y=0 \qquad (64)$$

тәнлији алынар. Әвәзләмәдән ајдындыр ки, бу тәнлијин һәлләринин $(0,+\infty)$ интервалындакы сыфырлары (көкләри) илә (54) тәнлијинин һәлләринин һәмин интервалдакы сыфырлары ејнидир. Тутаг ки, $\frac{1}{4}-\nu^2\geqslant 0$. Онда (64) тәнлијини

$$\ddot{z}+z=0$$

тәнлији илә мүгајисә етсәк, Штурм теореминә әсасән аларыг ки, (64) тәнлијинин һәр бир һәллинин $(0,+\infty)$ интервалында сонсуз сајда сыфыры вар.

Тутаг ки, $\frac{1}{4}-\nu^2<0$. Бу һалда (64) тәнлијини, $\alpha>\sqrt{\nu^2-\frac{1}{4}}$ шәртини өдәјән α әдәди үчүн

$$\ddot{u}+\left[1-\left(\nu^2-\frac{1}{4}\right)\alpha^{-2}\right]u=0$$

тәнлији илә мүгајисә едәк.

Бурадан ајдындыр ки, (64) тәнлијинин һәр бир һәллинин $(\alpha,+\infty)$ интервалында сонсуз сајда сыфыры вар.

Беләликлә, алырыг ки, истәнилән $\nu\geqslant 0$ үчүн Бессел функсијаларынын һәр биринин $(0,+\infty)$ интервалында сонсуз сајда сыфыры вар.

г) *Бессел функсијаларынын ортогоналлыг хассәси.* $J_\nu(t)$ функсијасы (54) тәнлијинин һәлли олдуғундан истәнилән $\lambda\geqslant 0$ үчүн $J_\nu(\lambda t)$ функсијасы

$$t^2\ddot{x}+t\dot{x}+(\lambda^2t^2-\nu^2)x=0 \qquad (65)$$

тәнлијинин һәллидир.

Тутаг ки, $J_\nu(\lambda_1 t)$, $J_\nu(\lambda_2 t)$ функсијалары (65) тәнлијинин $\lambda=\lambda_1$ вә $\lambda=\lambda_2$ гијмәтләринә ујғун һәлләридир. Јә'ни

$$t^2\frac{d^2}{dt^2}J_\nu(\lambda_1t)+t\frac{d}{dt}J_\nu(\lambda_1t)+\left(\lambda_1^2t^2-\nu^2\right)J_\nu(\lambda_1t)=0,$$

$$t^2\frac{d^2}{dt^2}J_\nu(\lambda_2t)+t\frac{d}{dt}J_\nu(\lambda_2t)+\left(\lambda_2^2t^2-\nu^2\right)J_\nu(\lambda_2t)=0$$

ејниликләри өдәнир. Бу ејниликләрин биринчисини $J_\nu(\lambda_2t)$-јә, икинчисини исә $J_\nu(\lambda_1t)$-јә вуруб тәрәф-тәрәфә чыхаг. Онда

$$\frac{d}{dt}\left\{t\left[J_\nu(\lambda_2t)\frac{d}{dt}J_\nu(\lambda_1t)-J_\nu(\lambda_1t)\frac{d}{dt}J_\nu(\lambda_2t)\right]\right\}=t\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)J_\nu(\lambda_1t)J_\nu(\lambda_2t)$$

ејнилији алынар. Бурадан, интегралламагла

$$t\left[J_\nu(\lambda_2t)\frac{d}{dt}J(\lambda_1t)-J_\nu(\lambda_1t)\frac{d}{dt}J_\nu(\lambda_2t)\right]\Big|_0^1=\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_0^1 tJ_\nu(\lambda_1t)J_\nu(\lambda_2t)\,dt$$

бәрабәрлијини аларыг. Дикәр тәрәфдән $\frac{d}{dt}J_\nu(\lambda t)=\lambda\dot{J}_\nu(\lambda t)$ вә $\nu\geqslant 0$ олдуғундан, бу бәрабәрлији

$$\lambda_1J_\nu(\lambda_2)\dot{J}_\nu(\lambda_1)-\lambda_2J_\nu(\lambda_1)\dot{J}_\nu(\lambda_2)=\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)\int_0^1 tJ_\nu(\lambda_1t)J_\nu(\lambda_2t)\,dt$$

шәклиндә јазмаг олар.

Хүсуси һалда, λ_1 вә λ_2 әдәдләри $J_\nu(t)$ функсијасынын мүхтәлиф сыфырлары олдугда, бурадан

$$\int_0^1 tJ_\nu(\lambda_1t)J_\nu(\lambda_2t)\,dt=0$$

бәрабәрлији алынар. Бу хассәјә Бессел функсијаларынын *ортогоналлыг хассәси* дејилир.

г) *Бессел функсијаларынын бә'зи интеграл көстәрилишләри.* Бир чох мәсәләләрин һәллиндә Бессел функсијаларынын интеграл көстәрилишләриндән истифадә олунур. Бу көстәрилишләрдән ән садәси Пуассон көстәрилишидир.

Мә'лумдур ки, ихтијари $\rho>-1$ вә $\mu>-1$ әдәдләри үчүн

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^\rho\varphi\,\sin^\mu\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho+\mu+2}{2}\right)}$$

дүстуру доғрудур. Бу дүстурда $\rho=2\nu$, $\mu=2m$ көтүрсәк,

$$\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+m+1)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\nu}\varphi\,\sin^{2m}\varphi\,d\varphi \qquad (66)$$

олар. Бурадан $\Gamma(\nu+m+1)$-и тә'јин едиб, $J_\nu(t)$ функсијасынын ифадәсиндә јеринә јазсаг, аларыг

$$J_\nu(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)}\,\frac{2}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\nu}\varphi\,\sin^{2m}\varphi\,d\varphi.$$

Дикәр тәрәфдән, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (58) дүстуруна әсасән, асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\Gamma(m+1)\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,(2m)!\,2^{-2m}.$$

Она көрә дә

$$J_\nu(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,2^{2m}}{(2m)!}\times$$

$$\times\left(\frac{t}{2}\right)^{2m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\nu}\varphi\,\sin^{2m}\varphi\,d\varphi.$$

Интегралла чәмләмәнин јерини дәјишмәјин гануни олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$J_\nu(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\nu}\varphi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m[t\sin\varphi]^{2m}}{(2m)!}\,d\varphi$$

олар. Бу мүнасибәти исә

$$\cos(t\sin\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m[t\sin\varphi]^{2m}}{(2m)!}$$

аjрылышына әсасән

$$J_\nu(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t\sin\varphi)\cos^{2\nu}\varphi\,d\varphi$$

шәклиндә јазмаг олар.

Алынмыш дүстура *Пуассон дүстуру* дејилир.

Гејд едәк ки, Пуассон дүстурундакы интеграл $\nu>-\frac{1}{2}$

олдугда истәнилән t үчүн јығылыр вә $|\cos(t\sin\varphi)|\leqslant 1$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $J_\nu(t)$ Бессел функсијасыны

$$|J_\nu(t)|\leqslant\frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{|t|}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\nu}\varphi\,d\varphi$$

шәклиндә гијмәтләндирмәк олар.

Хүсуси һалда, (66) дүстурунда $m=0$ көтүрдүкдә

$$\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)}\sqrt{\pi}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\nu}\varphi\,d\varphi$$

олдуғундан, сонунчу бәрабәрсизлији

$$|J_\nu(t)|\leqslant\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{|t|}{2}\right)^{\nu}$$

шәклиндә јазмаг олар.

Там индексли $J_n(t)$ Бессел функсијасынын башга шәкилдә интеграл көстәрилишини верәк. Бунун үчүн

$$e^{z}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{l!}$$

аjрылышында $z=\frac{ut}{2}$, $z=-\frac{t}{2u}$ $(u\neq 0)$ көтүрүб, алынан

$$e^{\frac{ut}{2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{u^l t^l}{2^l l!},\quad e^{-\frac{t}{2u}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^m u^{-m}}{2^m m!}$$

сыраларынын һасилинә бахаг:

$$e^{\frac{t}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{l+m}u^{l-m}}{l!\,m!\,2^{l+m}}.$$

Бурада $l=m+n$ гәбул едиб, $m<-n$ үчүн $\Gamma(m+n+1)=\infty$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$e^{\frac{t}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-m}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{n+2m}u^n}{(m+n)!\,m!\,2^{n+2m}}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+n+1)\,\Gamma(m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2m}\right]u^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(t)u^n.$$

Алынан бәрабәрликдә $J_{-n}(t)=(-1)^nJ_n(t)$ олдуғуну нәзәрә алыб, ону

$$e^{\frac{t}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)} = J_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}[u^n + (-1)^n u^{-n}]\, J_n(t)$$

шәклиндә јазаг. Бу бәрабәрликдә $u = e^{i\varphi}$ гәбул етсәк, Ејлер дүстуруна әсасән, $u - u^{-1} = 2i\sin\varphi$ олдуғундан,

$$e^{it\sin\varphi} = J_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}[e^{in\varphi} + (-1)^n e^{-in\varphi}]\, J_n(t)$$

олар. Бурада $e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\cos(t\sin\varphi) + i\sin(t\sin\varphi) = J_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\{[1+(-1)^n]\cos n\varphi +$$

$$+ i[1-(-1)^n]\sin n\varphi\}\, J_n(t) = J_0(t) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(t)\cos 2m\varphi +$$

$$+ 2i\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(t)\sin(2m+1)\varphi\ .$$

мүнасибәти алынар. Ики комплекс әдәдин бәрабәрлијинә әсасән бурадан

$$\cos(t\sin\varphi) = J_0(t) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(t)\cos 2m\varphi,$$

$$\sin(t\sin\varphi) = 2\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(t)\sin(2m+1)\varphi.$$

Бу бәрабәрликләрин биринчисинин һәр тәрәфини $\cos n\varphi$-јә, икинчисинин һәр тәрәфини $\sin n\varphi$-јә вуруб, φ-јә нәзәрән $[0, \pi]$ парчасында интегралласаг, асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$\int_0^{\pi}\cos(t\sin\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi = \begin{cases}\pi J_n(t), & n=0 \text{ вә ја } n \text{ чүт олдугда},\\ 0, & n \text{ тәк олдугда},\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\sin(t\sin\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi = \begin{cases}0, & n \text{ чүт олдугда},\\ \pi J_n(t), & n \text{ тәк олдугда}.\end{cases}$$

Бурадан тәрәф-тәрәфә топламагла аларыг ки, истәнилән n үчүн

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi$$

дүстуру доғрудур.

Алынмыш дүстурун сағ тәрәфиндәки интеграла *Бессел интегралы* дејилир.

Чалышмалар

1. $\ddot{x} + 24\sin t\cdot x = 0$ тәнлијинин ихтијари һәллинин ики гоншу сыфры арасындакы мәсафәни ашағыдан гијмәтләндирин.

Чаваб: $h \geqslant 0{,}5$.

2. Лиувилл әвәзләмәси васитәсилә

$$(1+t^2)^2\ddot{x} + 2t(1+t^2)\dot{x} + x = 0$$

тәнлијини һәлл един.

Чаваб: $x = \dfrac{c_1 + c_2 t}{\sqrt{1+t^2}}$.

3. Һансы $q(t)$ функсијалары үчүн

$$(1+t)\ddot{x} + \dot{x} + q(t)\,x = 0$$

тәнлији Лиувилл әвәзләмәси илә сабит әмсаллы тәнлијә кәтирилә биләр?

Чаваб: $q(t) = \dfrac{a}{1+t}$; a—сабитдир

4. $t^2\ddot{x} + x = 0$ тәнлијинин ихтијари һәллинин $[0{,}01,\ 0{,}1]$ парчасындакы сыфырлары арасындакы мәсафәни вә сыфырларынын сајыны гијмәтләндирин.

Чаваб: $\dfrac{\pi}{100} \leqslant h \leqslant \dfrac{\pi}{10}$, $3 \leqslant N_h \leqslant 33$.

5. Тутаг ки, $t_1, t_2, \ldots (0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots)$ нөгтәләри

$$(1+t^2)\ddot{x} + t^2 x = 0$$

тәнлијинин ихтијари һәллинин сыфырларыдыр.

$$\lim_{n\to\infty}(t_{n+1} - t_n) = \pi$$

олдуғуну исбат един.

6. Биринчи тәртиб төрәмәнин әмсалыны јох етмәклә ашағыдакы сәрһәд мәсәләләрини һәлл един:

а) $\ddot{x} + \dfrac{2}{1+t}\dot{x} - x = 0$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$.

Чаваб: $(e^2 - 1)(1+t)x = e^{2-t} - e^t$.

б) $(1+t^2)^2\ddot{x} - 4t(1+t^2)\dot{x} + (4t^4 + 14t^2 + 2)\,x = 0$, $x(0) = 0$, $x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

Чаваб: $x = \dfrac{16}{16+\pi^2}(1+t^2)\sin 2t$.

7. Ашағыдакы мәсәләләр үчүн Грин функсијасыны гурун:

a) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = f(t)$,
$x(0) + \dot{x}(0) = 0,\ x(1) = 0.$

Чаваб: $G(t, \tau) = \begin{cases} 0{,}5(1-\tau)(1-3t)e^{2(t-\tau)}; & 0 \leqslant t < \tau, \\ 0{,}5(1-3\tau)(1-t)e^{2(t-\tau)}; & \tau < t \leqslant 1. \end{cases}$

5) $\ddot{x} + x = f(t)$,
$x(0) + \dot{x}(\pi) = 0,\ \dot{x}(0) - x(\pi) = 0.$

Чаваб: $G(t, \tau) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + t - \tau\right); & 0 \leqslant t < \tau, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + t - \tau\right); & \tau < t \leqslant \pi. \end{cases}$

8. $\ddot{x} + \lambda x = 0$,

$x(0) + \dot{x}(0) = 0,\quad x(\pi) + \dot{x}(\pi) = 0$

сәрһәд мәсәләсинин мәхсуси әдәдләрини вә ортонормал мәхсуси функсиjалары системини тапын.

Чаваб: $\lambda_\kappa = \kappa^2,\ \kappa = 1, 2, \ldots$

$$x_\kappa(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi(1+\kappa^2)}}\,(\kappa\cos\kappa t - \sin\kappa t).$$

IX ФӘСИЛ

АВТОНОМ СИСТЕМЛӘР

§ 1. АВТОНОМ СИСТЕМЛӘРИН ҺӘЛЛӘРИНИН ХАССӘЛӘРИ

а) *Тә'рифләр вә һәндәси изаһ.* Мә'лумдур ки, сағ тәрәфи сәрбәст дәјишәндән асылы олмаjан

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

нормал системинә *автоном* вә *ја стасионар* систем дејилир.

Тутаг ки, $f(x)$ вектор-функсиjасынын $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ компонентләри $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләри фәзасынын верилмиш G областында кәсилмәздирләр, һәр бир $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in G$ нөгтәси вә истәнилән t_0 үчүн (1) системинин

$$x(t_0) = x^0 \tag{2}$$

башланғыч шәртини өдәјән јеканә, давамәтдирилмәјән $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ һәлли вар.

Бу һәллин тә'јин олундуғу (α, β) интервалындан көтүрүлмүш бүтүн t-ләр үчүн $M(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ нөгтәләри чохлуғуна, һәмин һәллә уjғун олан *трајекторија* дејилир. Трајекторијаны l илә ишарә едәчәјик. Ајдындыр ки, $x = \varphi(t)$ трајекторијанын параметрик шәкилдә тәнлиjи олур.

G областынын һәр бир $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ нөгтәсинә, бу нөгтәдән чыхан $f(x^0) = (f_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \ldots, f_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0))$ векторуну гаршы гојсаг, (1) системи G областында *векторлар меjданы* тә'јин едәр.

Дикәр тәрәфдән, (1) системинин (2) шәртини өдәјән $x = \varphi(t)$ һәлли үчүн

$$\dot{\varphi}(t_0) = f(\varphi(t_0)) = f(x^0)$$

олдуғундан, төрәмәнин физики мә'насына әсасән алырыг ки, $t = t_0$ анында мадди нөгтә x^0 нөгтәсиндә јерләшир вә $v = \frac{d\varphi}{dt}$ сүр'әт вектору меjданын һәмин нөгтәдәки вектору илә үст-үстә дүшүр. Буна көрә дә (1) системинин тә'јин етдиjи векторлар меjданына *сүр'әтләр меjданы* да дејилир. (1) системинин һәллинин трајекторија кими, системин өзүнүн исә векторлар меjданы кими изаһ олундуғу $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләри фәзасына *фаза фәзасы*, *трајекторијалара фаза трајекторијалары*, $f(x)$ векторуна исә *фаза сүр'әти* дејилир.

б) *һәллин хассәләри.* Автоном системләрин һәлләринин бә'зи хассәләри илә таныш олаг.

Теорем 1. *Тутаг ки, $x = \varphi(t)$ вектор-функсиjасы (1) системинин (α, β) интервалында тә'јин олунмуш, давамәтдирилмәјән һәлли, s исә ихтијари сабитдир. Онда $x = \varphi(t+s)$ вектор-функсиjасы һәмин системин $(\alpha - s, \beta - s)$ интервалында һәллидир.*

Исбаты. $x = \varphi(t)$ вектор-функсиjасы (1) системинин һәлли олдуғундан,

$$\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t)),\ t \in (\alpha, \beta)$$

ејнилиjи өдәнир. Бу ејниликдә t-ни $t + s$ илә әвәз етсәк,

$\dot{\varphi}(t+s) = \frac{d\varphi(t+s)}{dt}$ олдуғундан,

$$\varphi(t+s) = f(\varphi(t+s)),\ t \in (\alpha - s, \beta - s)$$

ејнилиjини аларыг. Бу исә теоремин доғрулуғуну көстәрир.

Теорем 2. *Тутаг ки, (1) системинин һәр һансы ики $x = \varphi^1(t)$, $x = \varphi^2(t)$ һәлләри $\varphi^1(t_1) = \varphi^2(t_2)$, $t_1 \neq t_2$ шәртини*

өдәјир. Онда $\varphi^2(t)=\varphi^1(t+s)$; *бурада* $s=t_1-t_2$. *Башга сөзлә десәк, ортаг нөгтәси олан траjекториjалар үст-үстә дүшүр.*

Исбаты. Биринчи хассәjә әсасән, $x=\varphi^1(t+s)$ һәлл олдуғундан, $s=t_1-t_2$ гәбул етсәк,

$$\varphi^1(t_2+s)=\varphi^1(t_1)=\varphi^2(t_2).$$

Демәли, $x=\varphi^1(t+s)$ вә $x=\varphi^2(t)$ һәлләри $t=t_2$ анында еjни башланғыч шәртини өдәjир. Одур ки, һәллин jеканәлиjинә әсасән

$$\varphi^1(t+s)=\varphi^2(t)$$

олмалыдыр.

Теорем 3. *Тутаг ки,* $x=\varphi(t,x^0)$ *вектор-функсиjасы (1) системинин* $x(0)=x^0$ *шәртини өдәjән һәлли, s исә ихтиjари әдәддир. Онда*

$$\varphi(t,\varphi(s,x^0))=\varphi(t+s,x^0)$$

еjнилиjи өдәнир.

Бу хассәjә автоном системләрин һәлләринин *груп хассәси* деjилир.

Исбаты. Гејд олунмуш s үчүн $x^1=\varphi(s,x^0)$ ишарә едәк. Онда $\varphi^1(t)=\varphi(t,x^1)$ вектор-функсиjасы (1) системинин $\varphi^1(0)=x^1$ шәртини өдәjән һәлли олар.

Биринчи хассәjә әсасән, һәмин s үчүн $\varphi^2(t)=\varphi(t+s,x^0)$ вектор-функсиjасы (1) системинин $\varphi^2(0)=\varphi(s,x^0)=x^1$ шәртини өдәjән һәллидир. Демәли, $\varphi^1(t)$ вә $\varphi^2(t)$ вектор-функсиjалары (1) системинин еjни башланғыч шәртини өдәjән һәлләридир. Jеканәлиjә әсасән $\varphi(t,x^1)=\varphi(t+s,x^0)$ олмалыдыр. Бурадан да теоремин исбаты алыныр.

Тутаг ки, $x=\varphi(t)$ вектор-функсиjасы (1) системинин $(-\infty,+\infty)$ интервалында тә'јин олунмуш һәллидир. Истәнилән $t\in(-\infty,+\infty)$ вә мүәjјән s әдәди үчүн $\varphi(t+s)=\varphi(t)$ оларса, s әдәдинә $x=\varphi(t)$ һәллинин периоду (дөврү) деjилир. Бу һәллин периодлары чохлуғуну F илә ишарә едәк. Аjдындыр ки, $0\in F$. Демәли, F чохлуғу бош деjил.

F чохлуғунун ашағыдакы хассәләри вар:

1. *Әкәр* $s\in F$ *исә,* $-s\in F$.

Доғрудан да, $s\in F$ олдуғундан

$$\varphi(t+s)=\varphi(t),\ t\in(-\infty,+\infty)$$

еjнилиjи өдәнир. Бурада t әвәзинә $t-s$ jазсаг, $\varphi(t)=\varphi(t-s)$, $t\in(-\infty,+\infty)$ еjнилиjини аларыг. Jә'ни $-s\in F$.

2. *Тутаг ки,* $s_1,s_2\in F$. *Онда* $s_1+s_2\in F$.

Хассәнин доғрулуғу

$$\varphi(t+s_1+s_2)=\varphi((t+s_1)+s_2)=\varphi(t+s_1)=\varphi(t)$$

мүнасибәтләриндән аjдындыр.

3. *F чохлуғу гапалыдыр.*

Доғрудан да, тутаг ки, $s_n\in F$ вә $\{s_n\}$ ардычыллығы s_0 әдәдинә jығылыр. Онда $\varphi(t)$ һәлли кәсилмәз олдуғундан,

$$\varphi(t+s_0)=\varphi(t+\lim_{n\to\infty}s_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi(t+s_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi(t)=\varphi(t),$$

jә'ни $s_0\in F$.

4. *F чохлуғунда сыфырдан фәргли елемент варса, бу чохлуг jа бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғу илә үст-үстә дүшүр, jахуд да бу чохлугда ән кичик мүсбәт T әдәди вар вә бу заман F чохлуғунун елементләри T әдәдинин там мисилләриндән ибарәтдир.*

Хассәнин доғрулуғуну көстәрәк. F чохлуғунда сыфырдан фәргли елемент олдуғундан, 1-чи хассәjә әсасән бу чохлугда мүсбәт әдәд вар. Тутаг ки, F чохлуғунда ән кичик мүсбәт елемент jохдур. Онда F чохлуғуна дахил олан вә сыфра jығылан мүсбәт $\{s_n\}$ ардычыллығы вар. 2-чи хассәjә әсасән ихтиjари m там әдәди үчүн $ms_n\in F$. Аjдындыр ки, истәнилән s_0 әдәди үчүн елә m_n там әдәди вар ки, $|m_ns_n-s_0|<s_n$ олар. Лакин $\lim_{n\to\infty}s_n=0$ олдуғундан, бурадан аларыг ки, $\{m_ns_n\}$ ардычыллығы s_0 әдәдинә jығылыр. Она көрә дә s_0 әдәди F чохлуғунун лимит нөгтәсидир. Онда 3-чү хассәjә әсасән $s_0\in F$ вә s_0 ихтиjари олдуғундан, бурадан аларыг ки, F чохлуғу һәгиги әдәдләр чохлуғу илә үст-үстә дүшүр.

Гапалылыг хассәсинә әсасән, F чохлуғу һәгиги әдәдләр чохлуғу илә үст-үстә дүшмәдикдә, бу чохлугда ән кичик мүсбәт T әдәди вар. Тутаг ки, s әдәди $\varphi(t)$ һәллинин ихтиjари периодудур. Онда елә m там әдәди вар ки, $|s-mT|<T$ олур. Әкәр $s\neq mT$ оларса, 2-чи хассәjә әсасән аларыг ки, $|s-mT|$ мүсбәт әдәди дә $\varphi(t)$ һәллинин периодудур. Бу исә $|s-mT|<T$ шәртинә зиддир. Демәли, $s=mT$ олмалыдыр.

Теорем 4. *Тутаг ки,* $x=\varphi(t)$ *вектор-функсиjасы (1) системинин* (α,β) *интервалында тә'јин олунмуш һәллидир вә онун l траjекториjасы өзү-өзүнү кәсир, jә'ни* $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, $t_1<t_2$, $t_1,t_2\in(\alpha,\beta)$. *Онда* $x=\varphi(t)$ *һәллини бүтүн һәгиги оха давам етдирмәк олар вә бу заман* $x=\tilde{\varphi}(t)$ *давамы үчүн ашағыдакы ики һалдан бири мүмкүндүр:*

а) $\tilde{\varphi}(t)\equiv a$, $a=\mathrm{const}$, *jә'ни* $x=\tilde{\varphi}(t)$ *һәлли (1) системинин таразлыг вәзиjjәтидир;*

б) *елә* $T>0$ *әдәди вар ки, истәнилән* $t\in(-\infty,+\infty)$ *үчүн* $\tilde{\varphi}(t+T)=\tilde{\varphi}(t)$, *лакин* $0\leqslant\tau_1<\tau_2<T$ *шәртини өдәjән ихтиjари* τ_1,τ_2 *үчүн* $\tilde{\varphi}(\tau_1)\neq\tilde{\varphi}(\tau_2)$, *jә'ни* $x=\tilde{\varphi}(t)$ *һәллинин ән кичик T периоду вар.*

Исбаты. $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$, $t_1<t_2$, $t_1,t_2\in(\alpha,\beta)$ шәртинә вә 2-чи теоремә әсасән $\varphi(t)=\varphi(t+s)$, $t\in(\alpha-s,\beta-s)$ олар; бурада $s=t_2-t_1$.

Ајдындыр ки,

$$x = \begin{cases} \varphi(t + s), & \alpha - s < t \leqslant \alpha \\ \varphi(t), & \alpha < t < \beta \end{cases}$$

вектор-функсијасы $(\alpha - s, \beta)$ интервалында (1) системинин һәллидир вә она $x = \varphi(t)$ һәллинин (α, β) интервалындан $(\alpha - s, \beta)$ интервалына давамы кими бахмаг олар. Бурада $s > 0$ олдуғундан, бу гајда илә һәлли $(-\infty, \beta)$ интервалына давам етдирмәк олар. Давамы $x = \tilde{\varphi}(t)$ илә ишарә едәк. Дикәр тәрәфдән $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(t - s)$ бәрабәрлијинин көмәјилә $x = \tilde{\varphi}(t)$ һәллини $(-\infty, \beta)$ интервалындан $(-\infty, +\infty)$ интервалына давам етдирмәк олар.

Даваметдирмә гајдасындан ајдындыр ки, $s = t_2 - t_1 > 0$ әдәди $x = \tilde{\varphi}(t)$ һәллинин периодудур. Бу һәллин периодлары чохлуғуну $\tilde{F}$ илә ишарә едәк вә ашағыдакы һаллара бахаг:

1) Тутаг ки, $\tilde{F}$ чохлуғу һәгиги охла үст-үстә дүшүр. Онда сыфра јығылан мүсбәт $\{s_n\}$ периодлар ардычыллығы вар вә 2-чи хассәјә әсасән, истәнилән t үчүн $\left[\frac{t}{s_n}\right]s_n$ әдәди дә период олар. ($[z]$ илә z-ин там һиссәси ишарә олунмушдур). Јә'ни $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}\left(t - \left[\frac{t}{s_n}\right]s_n\right)$. Дикәр тәрәфдән, $\lim\limits_{n \to \infty}\left\{t - \left[\frac{t}{s_n}\right]s_n\right\} = 0$ олдуғундан,

$$\tilde{\varphi}(t) = \lim_{n \to \infty} \tilde{\varphi}\left(t - \left[\frac{t}{s_n}\right]s_n\right) = \tilde{\varphi}(0).$$

Бурадан алырыг ки, $\tilde{F}$ чохлуғу һәгиги охла үст-үстә дүшдүкдә $\tilde{\varphi}(t)$ сабит вектордур, јә'ни $x = \varphi(t)$ һәлли (1) системинин таразлыг вәзијјәтидир.

2) $\tilde{F}$ чохлуғунда ән кичик мүсбәт T әдәди вар. Көстәрәк ки, $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < T$ шәртини өдәјән истәнилән τ_1, τ_2 үчүн $\tilde{\varphi}(\tau_1) \neq \tilde{\varphi}(\tau_2)$. Әксини фәрз едәк, тутаг ки, $0 \leqslant \tau_1^0 < \tau_2^0 < T$ шәртини өдәјән елә τ_1^0, τ_2^0 әдәдләри вар ки, $\tilde{\varphi}(\tau_1^0) = \tilde{\varphi}(\tau_2^0)$. Онда, $s^0 = \tau_2^0 - \tau_1^0$ гәбул етсәк, 2-чи теоремә әсасән $\tilde{\varphi}(t) = \tilde{\varphi}(t + s^0)$ олар, јә'ни $s^0 \in \tilde{F}$. Бу исә T-нин $\tilde{F}$ чохлуғунда ән кичик мүсбәт әдәд олмасына зиддир. Теорем исбат олунду.

Нәтичә. ***Автоном системләрин үч нөв трајекторијалары ола биләр; 1) таразлыг вәзијјәтләри, 2) өзү-өзүнү кәсмәјән вә ја ачыг трајекторијалар; 3) гапалы трајекторијалар вә ја тсикләр.***

§ 2. МҮСТӘВИ ҮЗӘРИНДӘ ТРАЈЕКТОРИЈАЛАРЫН ЛИМИТ ВӘЗИЈЈӘТЛӘРИ

Бу параграфда

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{4}$$

автоном системинин трајекторијалары арашдырылыр; бурада $P(x, y), Q(x, y)$ функсијалары xOy мүстәвисинин G областында кәсилмәздирләр вә областын истәнилән гапалы, мәһдуд алт һиссәсиндә Липшис шәртини өдәјирләр. Гојулан шәртләр дахилиндә һәр бир $(x_0, y_0) \in G$ вә истәнилән t_0 үчүн (4) системинин $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ шәртләрини өдәјән даваметдирилмәјән јеканә һәлли вар.

Тутаг ки, $\varphi^0(t) = (\varphi_1^0(t), \varphi_2^0(t))$ вектор-функсијасы (4) системинин $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ шәртләрини өдәјән периодик һәллидир*. Бу һәллин xOy мүстәвисиндә трајекторијасыны l_0 илә ишарә едәк.

Ајдындыр ки, l_0 трајекторијасы гапалы әјри верир вә мүстәвини ики һиссәјә бөлүр: l_0 әјриси илә әһатә олунмуш дахили һиссә вә харичи һиссә. Бурадан вә (4) системинин һәллинин јеканәлијиндән алыныр ки, l_0 үзәриндә олмајан нөгтәдән башланан трајекторија ја тамамилә l_0 гапалы хәттинин дахилиндә, јахуд да тамамилә харичи һиссәсиндә јерләшир. Доғрудан да, тутаг ки, $(x_1, y_1) \in \bar{l}_0$ нөгтәси үчүн (4) системинин $x(0) = x_1$, $y(0) = y_1$ шәртләрини өдәјән $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ һәллинин трајекторијасы l_0 әјрисини $t = t_1$ анында $p = (p_1, p_2)$ нөгтәсиндә кәсир. Јә'ни $\psi(t_1) = p$, $p \in l_0$.

Дикәр тәрәфдән елә $t = t_2$ аны вар ки, $\varphi^0(t_2) = p$. Биринчи теоремә әсасән $\tilde{\varphi}(t) = \varphi^0(t + t_2 - t_1)$ вектор-функсијасы (4) системинин һәллидир.

Фәрзијјәјә көрә $\tilde{\varphi}(t_1) = \psi(t_1)$ олур. Һәллин јеканәлијинә әсасән, $\tilde{\varphi}(t), \psi(t)$ һәлләри үст-үстә дүшүрләр. Бурадан, $\tilde{\varphi}(t)$ һәлһәллинин трајекторијасы l_0 олдуғундан, алырыг ки, $\psi(t)$ һәллинин дә трајекторијасы l_0 олмалыдыр. Бу исә $\psi(0) = (x_1, y_1) \bar{\in} l_0$ шәртинә зиддир. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, $\psi(t)$ һәллинин трајекторијасы l_0 трајекторијасыны кәсә билмәз.

Тутаг ки, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ вектор-функсијасы (4) системинин $(0, +\infty)$ интервалында тә'јин олунмуш һәлли, l^+ исә бу һәллин трајекторијасыдыр. Мүәјјән $p = (p_1, p_2)$ нөгтәси үчүн

* Периодик һәлл дедикдә, таразлыг вәзијјәти олмајан вә (4) системини өдәјән периодик вектор-функсија баша дүшүлүр.

$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ вә $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(t_n)=p$, ($\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_1(t_n)=p_1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_2(t_n)=p_2$) шәртләрини өдәјән $\{t_n\}$, ($t_n\in(0,+\infty)$) ардычыллығы варса, *p нөгтәсинә $\varphi(t)$ һәллинин* (l^+ траjекторијасынын) *ω-лимит нөгтәси дејилир.*

Бу һәллин ω-лимит нөгтәләри чохлуғуну $\Omega(l^+)$ илә ишарә едәк.

Тутаг ки, $\psi(t)$ вектор-функсијасы (4) системинин $(-\infty,0)$ интервалында тә'јин олунан һәлли, l^- исә бу һәллин траjекторијасыдыр. Мүәјјән $q=(q_1,q_2)$ нөгтәси үчүн $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=-\infty$ вә $\lim\limits_{n\to\infty}\psi(t_n)=q$ шәртләрини өдәјән $\{t_n\}$ ($t_n\in(-\infty,0)$) ардычыллығы варса, *q нөгтәсинә $\psi(t)$ һәллинин α-лимит нөгтәси* дејилир. Бу һәллин α-лимит нөгтәләри чохлуғуну $A(l^-)$ илә ишарә едәк.

Тә'рифдән ајдындыр ки, (4) системинин $(-\infty,+\infty)$ интервалында тә'јин олунмуш $\varphi(t)$ һәллинин траjекторијасыны l илә ишарә етсәк, бу һәллин лимит нөгтәләри чохлуғу $A(l)\cup\Omega(l)$ олар.

Әкәр (4) системинин $\varphi^0(t)$ периодик һәллинин һәр бир нөгтәси бу һәлдән фәргли мүәјјән $\psi(t)$ һәллинин лимит нөгтәси оларса, $\varphi^0(t)$ һәллинә лимит тсикл дејилир.

Инди $\Omega(l^+)$ чохлуғунун бә'зи хассәләрини көстәрәк. Гејд едәк ки, ујғун тәклифләри $A(l^-)$ чохлуғу үчүн дә исбат етмәк олар.

Теорем 5. *$\Omega(l^+)$ чохлуғу гапалыдыр.*

Исбаты. Тутаг ки, $p^\kappa\in\Omega(l^+)$, $\kappa=1,2,3,\dots$ вә $\lim\limits_{\kappa\to\infty}p^\kappa=p$. Онда ω-лимит нөгтәсинин тә'рифинә әсасән һәр бир p^κ нөгтәси үчүн елә $\{t_n^{(\kappa)}\}$ ардычыллығы вар ки, $\lim\limits_{n\to\infty}t_n^{(\kappa)}=+\infty$ вә $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(t_n^{(\kappa)})=p^\kappa$. Демәли, һәр бир κ нөмрәси үчүн елә n_κ нөмрәси вар ки, $n_\kappa>\kappa$ олдугда $\|\varphi(t_{n_\kappa}^{(\kappa)})-p^\kappa\|<\frac{1}{k}$. Бурадан, $t_\kappa=t_{n_\kappa}^{(\kappa)}$ көтүрсәк,

$$\|\varphi(t_\kappa)-p\|\leqslant\|\varphi(t_\kappa)-p^\kappa\|+\|p^\kappa-p\|<\frac{1}{\kappa}+\|p^\kappa-p\|$$

олдуғундан, $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\varphi(t_\kappa)=p$, јә'ни $p\in\Omega(l^+)$. Бу исә теоремин доғрулуғуну көстәрир.

Теорем 6. *Тутаг ки, $\varphi(t,p^0)$ вектор-функсијасы (4) системинин $\varphi(0,p^0)=p^0$ шәртини өдәјән вә $(0,+\infty)$ интервалында тә'јин олунмуш һәлли, l^+ исә онун траjекторијасыдыр. Әкәр $\Omega(\bar l^+)$ чохлуғу бош дејилсә, истәнилән*

$p=(p_1,p_2)\in G\cap\Omega(l^+)$ нөгтәси үчүн (4) системинин $\varphi(0,p)=p$ шәртини өдәјән вә давам етдирилмәјән $\varphi(t,p)$, $t\in(\alpha,\beta)$ һәллинин траjекторијасы тамамилә $\Omega(l^+)$ чохлуғунда јерләшир, јә'ни

$$\varphi(t,p)\in\Omega(l^+),\quad t\in(\alpha,\beta).$$

Исбаты. $p\in\Omega(l^+)$ олдуғундан, елә $\{t_n\}$ ардычыллығы вар ки, $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=+\infty$ вә $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(t_n,p^0)=p$. Автоном системләрин һәлләринин груп хассәсинә әсасән (теорем 3), бурадан алырыг ки,

$$\varphi(t,p)=\varphi(t,\lim_{n\to\infty}\varphi(t_n,p^0))=\lim_{n\to\infty}\varphi(t,\varphi(t_n,p^0))=\lim_{n\to\infty}\varphi(t+t_n,p^0).$$

Бу көстәрир ки, һәр бир $t\in(\alpha,\beta)$ үчүн $\varphi(t,p)$ нөгтәси l^+ траjекторијасынын ω-лимит нөгтәсидир, јә'ни $\varphi(t,p)\in\Omega(l^+)$, $t\in(\alpha,\beta)$. Теорем исбат олунду.

Бу теорем көстәрир ки, мүәјјән һәллин лимит нөгтәләри чохлуғу бош дејилсә, о өзүндә там бир траjекторија сахлајыр.

Теорем 7. *$\Omega(l^+)$ чохлуғунун бош олмасы үчүн*

$$\lim_{t\to+\infty}|\varphi(t)|=+\infty \qquad (5)$$

шәртинин өдәнмәси зәрури вә кафидир.

Исбаты. Тутаг ки, (5) шәрти өдәнир. Онда $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=+\infty$ шәртини өдәјән истәнилән $\{t_n\}$ ардычыллығы үчүн $\lim\limits_{n\to\infty}|\varphi(t_n)|=+\infty$ олдуғундан, $\Omega(l^+)$ бош чохлугдур.

Тутаг ки, $\Omega(l^+)$ бош чохлугдур, лакин (5) шәрти өдәнмир. Онда елә $R>0$ әдәди тапмаг олар ки, мәркәзи координат башланғычында вә радиусу R олан гапалы $\bar H_R$ даирәси, кифајәт гәдәр бөјүк t-ләр үчүн l^+ траjекторијасынын нөгтәләриндән өз дахилиндә сахлајар. Башга сөзлә десәк, $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\infty$ шәртини өдәјән елә $\{t_n\}$ ардычыллығы вар ки, $\varphi(t_n)\in\bar H_R$, $n=1,2,\dots$ олур. Демәли, $\{\varphi(t_n)\}$ ардычыллығы мәһдуддур. Онда бу ардычыллыгдан јығылан $\{\varphi(t_{n_\kappa})\}$ алт ардычыллығы сечмәк олар. Тутаг ки, $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\varphi(t_{n_\kappa})=p$, $p\in\bar H_R$. Бурадан алырыг ки, $p\in\Omega(l^+)$. Бу исә $\Omega(l^+)$ чохлуғунун бош олмасы шәртинә зиддир. Теорем исбат олунду.

Гејд едәк ки, јухарыда исбат олунан теоремләр үмуми шәкилдә верилмиш (1) системи ($n>2$) үчүн дә доғрудур.

Мүәјјән L дүз хәтт парчасынын һәр бир (x,y) нөгтәсиндә $|P(x,y)|+|Q(x,y)|>0$ шәрти өдәнирсә вә $(P(x,y),Q(x,y))$

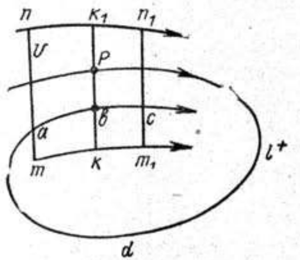
вектору бу дүз хәтт парчасына паралел дејилсә, белә L дүз хәтт парчасына (4) *системинин трансверсалы* дејилир.

Теорем 8. *Тутаг ки,* $\varphi(t)=(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ *вектор-функсијасы* $(0, +\infty)$ *интервалында* (4) *системинин һәллидир вә* $l^+ \cap \Omega(l^+)$ *чохлуғу бош дејил. Онда* l^+ *трајекторијасы ја гапалы әјридир (тсиклдир), јахуд да таразлыг нөгтәсидир.*

Исбаты. Тутаг ки, $p=(p_1, p_2) \in l^+ \cap \Omega(l^+)$ вә $P(p_1, p_2)=0$, $Q(p_1, p_2)=0$. Онда мүәјјән $t=t_1$ аны вар ки, $\varphi(t_1)=p$ олур. Бурадан алыныр ки, $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$ вә $x=p_1$, $y=p_2$ функсијалары (4) системинин $x(t_1)=p_1$, $y(t_1)=p_2$ шәртләрини өдәјән һәллидир. Јеканәлијә әсасән $\varphi_1(t)\equiv p_1$, $\varphi_2(t)\equiv p_2$, $t \in (0, +\infty)$. Јә'ни бу һалда l^+ трајекторијасы анчаг p нөгтәсиндән ибарәтдир.

Тутаг ки, $p=(p_1, p_2) \in l^+ \cap \Omega(l^+)$ вә $|P(p_1, p_2)|+|Q(p_1, p_2)|>0$. Мәркәзи p нөгтәсиндә олан L трансверсалыны кечирәк вә үмумилији позмадан L үзәриндә $P(x, y)>0$ олдуғуну гәбул едәк. Онда t артдыгча l^+ трајекторијасынын L илә кәсишмә нөгтәләринә ујғун анларда $\dot\varphi_1(t)=P(\varphi_1(t), \varphi_2(t))>0$ олдуғундан, трајекторија L парчасыны һәмишә ејни истигамәтдә кәсмәлидир.

Ајдындыр ки, p нөгтәсинин мүәјјән U әтрафы вар ки, бу әтрафда $|P(x, y)|+|Q(x, y)|>0$ шәрти өдәнир. Хүсуси һалда, бу әтрафы ашағыдакы кими көтүрмәк олар: l^+ трајекторијасыны p нөгтәсини дахилиндә сахлаан кичик l_p гөвсү көтүрәк. Бу гөвсүн уч нөгтәләриндән L трансверсалына паралел чәкилмиш кичик mn, m_1n_1 дүз хәтт парчалары илә ики һәллин mm_1, nn_1 гөвсләри арасында галан һиссәни U илә ишарә едәк (шәкил 15).



Шәкил 15.

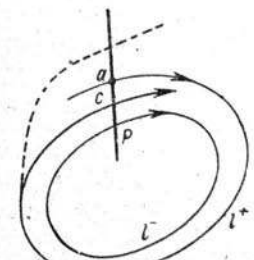
Бурадан ајдындыр ки, l_p гөвсүнү вә mn, m_1n_1 дүз хәтт парчаларыны елә көтүрмәк олар ки, $(x, y) \in U$ үчүн $|P(x, y)|+|Q(x, y)|>0$ олсун. Шәртә көрә $p \in l^+ \cap \Omega(l^+)$ олдуғундан, l^+ трајекторијасы мүәјјән $t=t_2$ анында p нөгтәсиндән кечир. Көстәрәк ки, l^+ трајекторијасы L трансверсалыны t-нин t_2-дән бөјүк олан сонсуз сајда гијмәтләриндә кәсәр. Доғрудан да, p нөгтәси лимит нөгтәси олдуғундан, елә $t'>t_2$ аны вар ки, һәмин анда l^+ трајекторијасы U әтрафыны кәсир. Һәллин јеканәлијинә әсасән l^+ трајекторијасы mm_1 вә nn_1 гөвсләрини кәсиб U әтрафына кечә билмәз. Тутаг ки, l^+ трајекторијасы mn дүз хәтт парчасыны a нөгтәсиндә кәсир. Онда һәллин јеканәлијинә вә јухарыда апарылан мүһакимәләрә әсасән, l^+ һәм дә m_1n_1 парчасыны мүәјјән c нөгтәсиндә кәсәр. Демәли, l^+ трајекторијасы L трансверсалыны $t_3>t_2$ анында мүәјјән b нөгтәсиндә кәсмәлидир. Көстәрәк ки, b нөгтәси p илә үст-үстә дүшүр.

Әксини фәрз едәк, тутаг ки, b, p нөгтәләри үст-үстә дүшмүрләр вә b нөгтәси L трансверсалынын pk һиссәсиндә јерләшир. Онда pdb гөвсү вә bp дүз хәтт парчасындан ибарәт олан әјри мүстәвини ики һиссәјә бөлүр. Бу әјринин дахилиндә галан һиссәни S илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, l^+ трајекторијасынын $t>t_3$ анларына ујғун олан һиссәси pdb гөвсүнү вә bp парчасыны кәсә билмәдијиндән, тамамилә S-дә јерләшәр. Бу исә p нөгтәсинин l^+ трајекторијасынын лимит нөгтәси олмасына зиддир. Демәли, b нөгтәси p илә үст-үстә дүшмәлидир. Јә'ни l^+ гапалы трајекторијадыр. Аналожи мүһакимәни b нөгтәси L трансверсалынын pk_1 һиссәсиндә јерләшдикдә дә апармаг олар. Теорем исбат олунду.

Лемма. *Тутаг ки,* $\Omega(l^+)$ *бош дејил вә гапалы* $\bar l$ *трајекторијасы үчүн* $\Omega(l^+) \subset \bar l$. *Онда ја* $l^+=\bar l$, *јахуд да* t *мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда* l^+ *трајекторијасы спиралвари* $\bar l$ *трајекторијасына јахынлашыр.*

Исбаты. 6-чы теоремә әсасән $\bar l \subset \Omega(l^+)$. Тутаг ки, p нөгтәси $\bar l$ трајекторијасы үзәриндә көтүрүлмүш ихтијари нөгтәдир. Бу нөгтәдә (4) системинин L трансверсалыны кечирәк. Онда $p \in \Omega(l^+)$ олдуғундан, l^+ трајекторијасы мүәјјән $t=t^1$ анында L трансверсалыны бир a нөгтәсиндә кәсәр. Әкәр $a=p$ оларса, 8-чи теоремә әсасән $l^+=\bar l$.

Тутаг ки, $a \neq p$ вә мүәјјәнлик үчүн фәрз едәк ки, a нөгтәси L трансверсалынын $\bar l$ гапалы трајекторијасындан харичдә галан һиссәдә јерләшир. Онда t_1-дән бөјүк анларын бириндә l^+ трајекторијасы L-и јенидән бир c нөгтәсиндә кәсәр вә бу заман $\|c-p\| < \|a-p\|$ олар (шәкил 16). Доғрудан да, $c=a$ оларса, l^+ гапалы тсикл әмәлә кәтирәр вә p нөгтәсинә јахынлаша билмәз. Ајдындыр ки, c нөгтәси pa дүз хәтт парчасындан кәнарда јерләшәрсә (јә'ни трајекторија гырыг хәтлә көстәрилән кими оларса), p нөгтәси l^+ тра-



Шәкил 16.

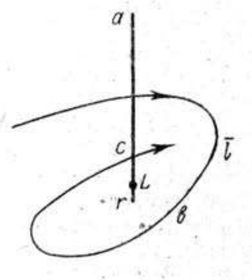
јекторијасынын лимит нөгтәси ола билмәз. Демәли, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдығда l^+ трајекторијасы L трансверсалыны сонсуз дәфә кәсәрәк p нөгтәсинә јахынлашыр. Башга һаллар да ујғун гајда илә арашдырылыр. Бурадан, p нөгтәси $\overline{l}$ үзәриндә ихтијари нөгтә олдуғундан, лемма исбат олунду.

Теорем 9. *Тутаг ки $t=0$ анында G областынын мүәјјән нөгтәсиндән башланан l^+ трајекторијасы бүтүн $t>0$ үчүн G областынын гапалы мәһдуд һиссәсиндә јерләшир вә $p=(p_1,p_2)\in\Omega(l^+)$ олдугда $|P(p_1,p_2)|+|Q(p_1,p_2)|>0$. Онда $\Omega(l^+)$ чохлуғу бир гапалы $\overline{l}$ трајекторијасындан ибарәтдир вә бу заман ја $l^+=\overline{l}$, јахуд да t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдығда l^+ трајекторијасы спиралвари $\overline{l}$ трајекторијасына јахынлашыр.*

Исбаты. l^+ трајекторијасы G областынын гапалы мәһдуд һиссәсиндә јерләшдијиндән, 7-чи теоремә әсасән $\Omega(l^+)$ бош дејил. Онда 6-чы теоремә әсасән $\Omega(l^+)$ өзүндә там бир трајекторија сахлајыр. Бу трајекторијаны $\overline{l}$ илә ишарә едәк.

Тутаг ки, $l^+\cap\Omega(l^+)$ бош дејил. Онда $|P(p_1,p_2)|+|Q(p_1,p_2)|>0$, $p=(p_1,p_2)\in\Omega(l^+)$ шәртини нәзәрә алсаг, 8-чи теоремә әсасән, l^+ гапалы трајекторија олур. Јә'ни $l^+=\overline{l}$.

Тутаг ки, $l^+\cap\Omega(l^+)$ бош чохлугдур. Көстәрәк ки, $\overline{l}$ гапалыдыр. Бунун үчүн $\Omega(\overline{l})\subset\overline{l}$ олдуғуну көстәрмәк кифајәтдир. Ихтијари $r\in\Omega(\overline{l})$ нөгтәси көтүрәк вә бу нөгтәдә (4) системинин L трансверсалыны чәкәк. Тутаг ки, $\overline{l}$ трајекторијасы L трансверсалыны $t=t_1$ вә $t=t_2$ анларында, ујғун олараг, a вә c нөгтәләриндә кәсир (шәкил 17). Онда $\overline{l}$ трајекторијасынын $t>t_2$ анларына ујғун олан һиссәси гапалы $abca$ областында јерләшир. Бу трајекторијанын бүтүн нөгтәләри l^+ үчүн лимит нөгтәси олдуғундан, 6-чы теоремә әсасән, мүәјјән андан сонра l^+ трајекторијасынын һиссәси $abca$ областында јерләшир. Бу исә a нөгтәсинин l^+ үчүн лимит нөгтәси олмасына зиддир. Демәли, $\Omega(\overline{l})\subset\overline{l}$ вә 8-чи теоремә әсасән $\overline{l}=\Omega(\overline{l})$ (јә'ни $\overline{l}$ гапалыдыр). Дикәр тәрәфдән, $\overline{l}$ трајекторијасы l^+ трајекторијасынын лимит нөгтәләри чохлуғу олдуғундан, $\overline{l}=\Omega(l^+)$. Онда леммаја әсасән, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдығда l^+

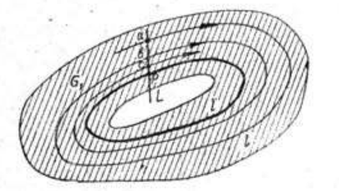


Шәкил 17.

спиралвари $\overline{l}$-јә јахынлашыр. Башга мүмкүн һалларда да $\overline{l}$-нин гапалы олдуғуну ујғун мүһакимәләрлә көстәрмәк олар. Теорем исбат олунду.

Теорем 10. *Тутаг ки, $\overline{l}$ гапалы трајекторијадыр вә онун јахын әтрафында башга гапалы трајекторијалар јохдур, јә'ни $\overline{l}$ изолә олунмуш тсиклдир. Онда $\overline{l}$ трајекторијасына јахын нөгтәләрдән чыхан һәр бир трајекторија, t мүсбәт вә ја мәнфи сонсузлуға јахынлашдығда спиралвари $\overline{l}$ трајекторијасына јахынлашыр.*

Исбаты. Ајдындыр ки, $\overline{l}$ трајекторијасы үзәриндәки нөгтәләрдә $|P(x,y)|+|Q(x,y)|>0$. Шәртә көрә $P(x,y), Q(x,y)$ функсијалары кәсилмәз олдуғундан, $\overline{l}$ трајекторијасыны дахилиндә сахлајан елә кичик G_1 золағы гурмаг олар ки, бу золагда $\overline{l}$-дән фәргли тсикл олмаз вә $|P(x,y)|+|Q(x,y)|>0$ олар. $\overline{l}$ трајекторијасы үзәриндә ихтијари p нөгтәси көтүрүб һәмин нөгтәдә (4) системинин L трансверсалыны гураг (шәкил 18). Бу трансверсал үзәриндә p-дән фәргли вә G_1 золағында олан a нөгтәси көтүрәрәк t_0 анында бу нөгтәдән кечән трајекторијаны l илә ишарә едәк. Тутаг ки, l трајекторијасы мүәјјән $t_1>t_0$ анында L трансверсалыны b нөгтәсиндә кәсир. Ајдындыр ки, $b\neq a$. Әкс һалда l трајекторијасы да G_1 золағында тсикл тәшкил едәрди.

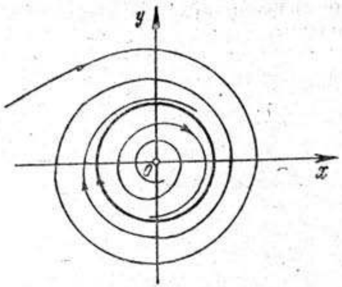


Шәкил 18.

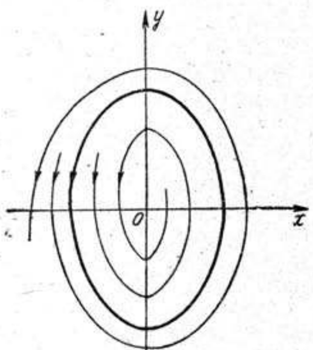
Тутаг ки, $\|b-p\|<\|a-p\|$. Онда l трајекторијасы t_1-дән сонракы һәр һансы анда L парчасыны pb һиссәсиндә мүәјјән c нөгтәсиндә кәсәр вә бу заман $\|c-p\|<\|b-p\|$ олар. Беләликлә, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдығда l трајекторијасы спиралвари $\overline{l}$ трајекторијасына јахынлашыр.

Ајдындыр ки, $\|b-p\|>\|a-p\|$ олан һалы, t әвәзинә $-t$ јазмагла бахылан һала кәтирмәк олар. Демәли бу һалда, t мәнфи сонсузлуға јахынлашдығда l трајекторијасы спиралвари $\overline{l}$ трајекторијасына јахынлашыр. Теорем исбат олунду.

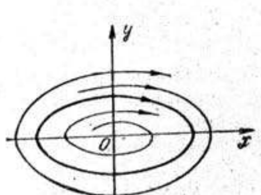
Бу теорем көстәрир ки, изолә олунмуш тсикл үч шәкилдә ола биләр: 1) *дајаныглы тсикл, јә'ни белә тсиклә јахын нөгтәләрдән башланан трајекторијаларын һамысы t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдығда она (һәмин тсиклә) јахынлашыр* (*шәкил 19, а*); 2) *дајаныгсыз тсикл, јә'ни t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдығда бүтүн трајекторијалар бу тсиклдән узаглашыр* (*шәкил 19, б*); 3) *јарымдајаныглы тсикл, јә'ни t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдығда тсиклдән бир тә-*



г



б



в

Шәкил 19.

рәфдә (дахилдә вә ја харичдә) јерләшән нөгтәләрдән башланан трајекторијалар һәмин тсиклә јахынлашыр, дикәр тәрәфдә јерләшән нөгтәләрдән башланан трајекторијалар бу тсиклдән узаглашыр (шәкил 19, в).

Мисал 1.

$$\begin{cases}\dot{x} = y,\\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)\end{cases}$$

системинә бахаг.

Ајдындыр ки, $x=0$, $y=0$ системин јеканә таразлыг вәзијјәтидир вә онун $\varphi_1(t) = \sin(t+c)$, $\varphi_2(t) = \cos(t+c)$ (c—ихтијари сабитдир) периодик һәллинин трајекторијасы $x^2 + y^2 = 1$ чеврәсидир. Тутаг ки, $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ системин ихтијари һәллидир. Бу һәлл үчүн

$$\frac{d}{dt}[\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)] = 2\psi_2^2(t)[1 - \psi_1^2(t) - \psi_2^2(t)]$$

ејнилији доғрудур. Бурадан ајдындыр ки, $\psi_1^2(0) + \psi_2^2(0) > 1$ оларса, истәнилән $t > 0$ үчүн $\frac{d}{dt}[\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)] < 0$. Демәли, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ һәллинин трајекторијасы $x^2 + y^2 = 1$ трајекторијасына јахынлашыр. Ејниликдән ајдындыр ки, $\psi_1^2(0) + \psi_2^2(0) < 1$ оларса, истәнилән $t>0$ үчүн $\frac{d}{dt}[\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)] > 0$. Јә'ни t мүсбәт сонсузлуға јахын-

лашдыгда $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ һәллинин трајекторијасы јенә дә $x^2 + y^2 = 1$ трајекторијасына јахынлашыр.

Беләликлә, $x^2 + y^2 = 1$ чеврәсинин һәм дахилиндән, һәм дә харичиндән башланан трајекторијалар t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда һәмин чеврәјә јахынлашырлар. Демәли, $x^2 + y^2 = 1$ чеврәси системин дајаныглы тсиклидир (шәкил 19, a).

Мисал 2.

$$\begin{cases}\dot{x} = -\frac{2}{3}y + x\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right),\\ \dot{y} = \frac{3}{2}x + y\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\end{cases}$$

системинин $\varphi_1(t) = 2\cos(t+c)$, $\varphi_2(t) = 3\sin(t+c)$ (c—ихтијари сабитдир) периодик һәлли вар вә ујғун трајекторија $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ еллипсидир. Системин истәнилән $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ һәлли үчүн

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi_1^2(t)}{4} + \frac{\psi_2^2(t)}{9}\right] = 2\left[\frac{\psi_1^2(t)}{4} + \frac{\psi_2^2(t)}{9}\right]\left[\frac{\psi_1^2(t)}{4} + \frac{\psi_2^2(t)}{9} - 1\right]$$

ејнилији доғрудур вә ајдындыр ки, $\frac{1}{4}\psi_1^2(0) + \frac{1}{9}\psi_2^2(0) > 1$ оларса, t артдыгча $\frac{1}{4}\psi_1^2(t) + \frac{1}{9}\psi_2^2(t)$ артыр, $\frac{1}{4}\psi_1^2(0) + \frac{1}{9}\psi_2^2(0) < 1$ оларса, t артдыгча $\frac{1}{4}\psi_1^2(t) + \frac{1}{9}\psi_2^2(t)$ азалыр. Демәли һәр ики һалда $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ һәллинин трајекторијасы $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ тсиклиндән узаглашыр, јә'ни бу тсикл дајаныгсыздыр (шәкил 19б).

Мисал 3. Ајдындыр ки, $(0, 0)$ нөгтәси

$$\begin{cases}\dot{x} = 2y,\\ \dot{y} = -0{,}5x + y(1 - 0{,}25x^2 - y^2)\end{cases}$$

системинин таразлыг нөгтәси, $\varphi_1(t) = 2\sin(t+c)$, $\varphi_2(t) = \cos(t+c)$ исә периодик һәллидир. Бу һәллә ујғун олан $0{,}25x^2 + y^2 = 1$ трајекторијасы изолә олунмуш тсиклдир.

Системин истәнилән $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ һәлли үчүн

$$\frac{d}{dt}[0{,}25\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)] = 2\psi_2^2(t)[1 - 0{,}25\psi_1^2(t) - \psi_2^2(t)]$$

олдуғундан, ајдындыр ки, $0{,}25x^2 + y^2 = 1$ тсикли јарымдајаныглыдыр (шәкил 19 $в$).

§ 3. МҮСТӘВИ ҮЗӘРИНДӘ МӘХСУСИ НӨГТӘЛӘРИН ТӘСНИФАТЫ

Бу параграфда

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{4}$$

шәклиндә системин мәхсуси нөгтәләринин тәснифаты верилир вә траjекториjаларын мәхсуси нөгтә әтрафында гурулушу өjрәнилир; бурада $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функсиjалары xOy мүстәвисинин мүәjjән G областында тә'jин олунмушдур.

а) *Мәхсуси нөгтә.* Тутаг ки, 1) $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функсиjалары (x_0, y_0) нөгтәсинин мүәjjән U әтрафында ($U \subset G$) кәсилмәздир; 2) һәр бир $(x_1, y_1) \in U$ вә истәнилән t_0 үчүн (4) системинин $x(t_0) = x_1$, $y(t_0) = y_1$ шәртләрини өдәjән jеканә һәлли вар; 3) $|P(x_0, y_0)| + |Q(x_0, y_0)| > 0$. Онда (x_0, y_0) нөгтәси (4) системинин *ади вә jа реҝулjар нөгтәси* адланыр.

Аjдындыр ки, $(x_0, y_0) \in G$ нөгтәсинин мүәjjән $U \subset G$ әтрафында $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функсиjалары x, y дәjишәнләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәjирсә вә $|P(x_0, y_0)| + |Q(x_0, y_0)| > 0$ исә, (x_0, y_0) нөгтәси (4) системинин ади нөгтәси олур.

Тутаг ки, $(x_0, y_0) \in G$ нөгтәси (4) системинин ади нөгтәсидир вә $P(x_0, y_0) \neq 0$. Онда (4) системинин $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ шәртләрини өдәjән вә (α, β) $(\alpha < t_0 < \beta)$ интервалында тә'jин олунмуш давамедтдирилмәjән $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ һәлли үчүн, елә $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$ $(\alpha_1 < t_0 < \beta_1)$ интервалы тапмаг олар ки, бу интервалда $P(\varphi(t), \psi(t)) \neq 0$. Бурадан вә $\dot{\varphi}(t) = P(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in (\alpha_1, \beta_1)$ еjнилиjинә әсасән алырыг ки, $x = \varphi(t)$ бәрабәрлиjи t_0 нөгтәсинин jахын әтрафында jеканә кәсилмәз диференсиалланан $t = T(x)$ функсиjасы тә'jин едир вә $t_0 = T(x_0)$. Тутаг ки, бу функсиjа (a, b) интервалында тә'jин олунмушдур. Онда $y = \psi(T(x)) \equiv f(x)$ функсиjасы (a, b) интервалында

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \tag{6}$$

тәнлиjинин $y(T(x_0)) = y_0$ башланғыч шәртини өдәjән һәлли олур.

Тәрсинә, тутаг ки, $y = f(x)$ функсиjасы үчүн $P(x, f(x)) \neq 0$, $x \in (a, b)$, $f(x_0) = y_0$ $(a < x_0 < b)$ шәртләри өдәнир вә $y = f(x)$ функсиjасы (a, b) интервалында (6) тәнлиjинин һәллидир. Онда $x = t$, $y = f(t)$ функсиjалары (4) системинин $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ $(t_0 = x_0)$ шәртләрини өдәjән вә (a, b) интервалында тә'jин олунмуш һәллидир.

Демәли, $(x_0, y_0) \in G$ нөгтәси (4) системинин ади нөгтәси вә $P(x_0, y_0) \neq 0$ исә, системин $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ шәртини өдәjән һәллинин тапылмасы мәсәләси көстәрилән мә'нада (6) тәнлиjинин (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әjрисинин тапылмасы мәсәләсинә еквивалентдир.

Еjни гаjда илә көстәрмәк олар ки, $(x_0, y_0) \in G$ нөгтәси (4) системинин ади нөгтәси вә $Q(x_0, y_0) \neq 0$ исә, бу системин $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ шәртләрини өдәjән һәллинин тапылмасы мәсәләси

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{7}$$

тәнлиjинин (x_0, y_0) нөгтәсиндән кечән интеграл әjрисинин тапылмасы мәсәләсинә еквивалентдир.

Гејд едәк ки, (4) системинин ади нөгтәләри һәм дә (6) вә (7) тәнликләринин *ади нөгтәләри* адланыр. Ади олмаjан нөгтәjә (4) системинин (демәли, һәм дә (6), (7) тәнликләринин) *мәхсуси нөгтәси* деjилир. Мәхсуси нөгтәнин мүәjjән әтрафында бу нөгтәдән башга бүтүн нөгтәләр ади нөгтә оларса, белә мәхсуси нөгтәjә *изолә олунмуш* (тәчрид олунмуш) *мәхсуси нөгтә* деjилир.

Тутаг ки, ади нөгтәнин тә'рифиндәки 1) вә 2) шәртләри өдәнир, лакин $P(x_0, y_0) = 0$, $Q(x_0, y_0) = 0$. Онда (x_0, y_0) нөгтәси (4) системинин мәхсуси нөгтәси олур. Бу параграфда белә изолә олунмуш мәхсуси нөгтә әтрафында (4) системинин траjекториjаларынын jерләшмәси тәдгиг олунур.

б) *Каноник форма.* Әввәлчә ики тәртибли, сабит әмсаллы хәтти бирчинс

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 x + b_1 y, \\ \dot{y} = a_2 x + b_2 y \end{cases} \tag{8}$$

системинә бахаг вә фәрз едәк ки,

$$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0. \tag{9}$$

Онда (0, 0) нөгтәси (8) системинин вә демәли, һәм дә

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2 x + b_2 y}{a_1 x + b_1 y}$$

тәнлиjинин изолә едилмиш мәхсуси нөгтәси олур.

Гејд едәк ки, (8) системи сабит әмсаллы хәтти бирчинс системдир вә онун һәллини елементар функсиjалар васитәсилә ифадә етмәк олар. Лакин мәгсәд (0, 0) нөгтәси әтрафында траjекториjаларын jерләшмәсини өjрәнмәкдән ибарәт олдуғундан, (8) системи

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y, \\ \eta = \gamma x + \sigma y, \end{cases} \quad (\alpha\sigma - \beta\gamma \neq 0) \tag{10}$$

әвәзләмәси васитәсилә

(I) $\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda\xi, \\ \dot{\eta} = \mu\eta, \end{cases}$ $(\lambda \neq 0, \mu \neq 0)$; (II) $\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda\xi, \\ \dot{\eta} = \lambda(\xi + \eta), \end{cases}$ $(\lambda \neq 0)$;

$$\text{(III)}\ \begin{cases}\dot\xi = \lambda\xi + \mu\eta,\\ \dot\eta = -\mu\xi + \lambda\eta,\end{cases} \quad (\lambda \neq 0,\ \mu < 0); \qquad \text{(IV)}\ \begin{cases}\dot\xi = \mu\eta,\\ \dot\eta = -\mu\xi,\end{cases} \quad (\mu < 0)$$

шәкилли системләрдән биринә кәтириләрәк һәлл едилир.

Ајдындыр ки, $a_2 = b_1 = 0$ олдугда (8) системи (I) шәклиндәдир. Она көрә дә $a_2 \neq 0$ гәбул едәк вә (8) системинин көстәрилән шәкилләрдән биринә кәтирилмәси мәсәләсинә бахаг. (Ујғун мүһакимәләри $b_1 \neq 0$ олдугда да апармаг олар.)

Әвәзләмәдән алырыг ки,

$$\dot\xi = \alpha\dot x + \beta\dot y,\quad \dot\eta = \gamma\dot x + \sigma\dot y.$$

Бурада $\dot x$, $\dot y$ әвәзинә (8) системинин сағ тәрәфләрини јазаг. Онда алынан системин (I) шәкилли систем олмасы үчүн

$$\begin{cases}\alpha(a_1x + b_1y) + \beta(a_2x + b_2y) = \lambda(\alpha x + \beta y),\\ \gamma(a_1x + b_1y) + \sigma(a_2x + b_2y) = \mu(\gamma x + \sigma y)\end{cases} \tag{11}$$

олмалыдыр. Алынмыш ејниликләрдә x вә y-ин әмсалларыны бәрабәрләшдирсәк, $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ мәчһулларына нәзәрән

$$\begin{cases}(a_1 - \lambda)\alpha + a_2\beta = 0,\\ b_1\alpha + (b_2 - \lambda)\beta = 0,\end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases}(a_1 - \mu)\gamma + a_2\sigma = 0,\\ b_1\gamma + (b_2 - \mu)\sigma = 0\end{cases} \tag{13}$$

системләрини аларыг. Бу системләрин сыфырдан фәргли һәлләринин варлығы үчүн λ вә μ әдәдләри

$$\rho^2 - (a_1 + b_2)\rho + a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \tag{14}$$

тәнлијинин көкләри олмалыдыр.

Гејд едәк ки, (9) шәртинә әсасән, (14) тәнлијинин һәр ики көкү сыфырдан фәрглидир. Бу тәнлијин дискриминантыны D илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, $D = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1$.

Тутаг ки, $D > 0$. Онда (14) тәнлијинин ики һәгиги мүхтәлиф λ, μ көкләри вар. (12) вә (13) системләринин бу көкләрә ујғун олан

$$\alpha = a_2,\ \beta = \lambda - a_1,\ \gamma = a_2,\ \sigma = \mu - a_1 \tag{15}$$

һәлләрини көтүрәк. Онда $\alpha\sigma - \beta\gamma \neq 0$ вә (10) әвәзләмәләри васитәсилә (8) системи (I) шәклинә кәтирилир.

Тутаг ки, $D < 0$. Онда (14) тәнлијинин $\lambda = \rho_1 + i\rho_2$, $\mu = \rho_1 - i\rho_2$ $(\rho_2 < 0)$ комплекс гошма көкләри вар. Бу көкләр үчүн (12) вә (13) системләринин (15) дүстурлары илә верилән һәлләри вә алынан (I) системиндә ξ, η дәјишәнләри комплекс гошма олурлар. Онда $\xi = u - iv$, $\eta = u + iv$ әвәзләмәси апармагла

$$\dot u - i\dot v = (\rho_1 + i\rho_2)(u - iv),\quad \dot u + i\dot v = (\rho_1 - i\rho_2)(u + iv)$$

системини аларыг. Бурадан u вә v һәгиги дәјишәнләри үчүн

$$\begin{cases}\dot u = \rho_1 u + \rho_2 v,\\ \dot v = -\rho_2 u + \rho_1 v\end{cases} \tag{16}$$

системи алынар. Ајдындыр ки, $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 < 0$ олдугда (16) системи (III) шәклиндә, $\rho_1 = 0$ олдугда исә (IV) шәклиндә системдир.

Тутаг ки, $D = 0$. Онда $\lambda = \mu = \frac{a_1 + b_2}{2}$ вә бу көкләр үчүн (12), (13) системләри ејни системә чеврилдијиндән, $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ әдәдләрини $\alpha\sigma - \beta\gamma \neq 0$ шәрти дахилиндә тапмаг мүмкүн дејил. Буна көрә дә, (8) системинин (10) әвәзләмәләри васитәсилә (II) шәклинә кәтирилмәси мәсәләсинә бахаг. Бу заман, јухарыда көстәрилән гајда илә (12) системи вә

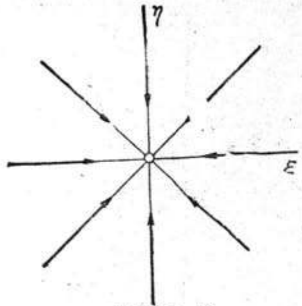
$$\begin{cases}(a_1 - \lambda)\gamma + a_2\sigma = \lambda\alpha,\\ b_1\gamma + (b_2 - \lambda)\sigma = \lambda\beta\end{cases} \quad \left(D = 0,\ \lambda = \frac{1}{2}(a_1 + b_2)\right) \tag{17}$$

системи алыныр. Ајдындыр ки, $\alpha = a_2\ (a_2 \neq 0)$, $\beta = \lambda - a_1 = \frac{1}{2}(b_2 - a_1)$, $\gamma = 0$, $\sigma = \frac{1}{2}(a_1 + b_2)$ әдәдләри (12) вә (17) системләринин һәллидир. Дикәр тәрәфдән, $D = (a_1 + b_2)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1)$ олдуғундан, (9) шәртинә әсасән, $\left[\frac{1}{2}(a_1 + b_2)\right]^2 = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ вә $a_2 \neq 0$ гәбул етдијимиз үчүн $\alpha\sigma - \beta\gamma = \frac{1}{2}a_2(a_1 + b_2) \neq 0$.

Беләликлә, (8) системи (10) гејри-мәхсуси чевирмәси васитәсилә һәмишә, (I), (II), (III), (IV) каноник системләриндән биринә кәтирилир вә (0, 0) нөгтәси бу системләр үчүн изолә едилмиш мәхсуси нөгтә олур.

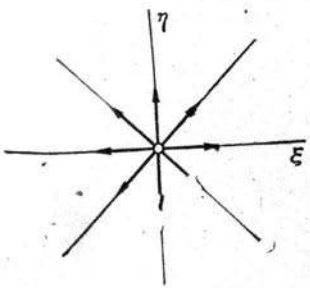
Гејд едәк ки, (10) чевирмәси һәндәси олараг дүзбучаглы xOy координат системиндән, үмумијјәтлә, чәпбучаглы $\xi O\eta$ координат системинә кечмәк демәкдир. Бу заман, координат башланғычы ејни галмагла, координат охларынын истигамәти вә миғјас дәјишә биләр. Лакин әсас мәгсәд (8) системинин трајекторијаларынын (0, 0) нөгтәси әтрафында вәзијјәти һаггында тәсәввүр әлдә етмәкдән ибарәт олдуғундан, графикләрин чәкилишинин садә олмасы үчүн $\xi O\eta$ координат системини дә дүзбучаглы систем гәбул едәчәјик.

в) *Садә һал үчүн мәхсуси нөгтәнин Пуанкаре тәснифаты.* Әввәлчә (I) системинин мүмкүн олан (*А*) $\lambda = \mu < 0$, (*Б*) $\lambda = \mu > 0$, (*В*) $\mu < \lambda < 0$, (*Г*) $0 < \mu < \lambda$, (*Ғ*) $\lambda < 0 < \mu$ һалларыны араштыраг. (*А*) һалында һәлл $\xi = c_1e^{\lambda t}$, $\eta = c_2e^{\lambda t}$ шәклиндәдир вә $\lim\limits_{t\to\infty}(\xi^2 + \eta^2) = 0$. Демәли, трајекторија $t = 0$ анында (c_1, c_2) нөгтәсиндән кечән вә t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда (0, 0) нөгтәсинә јахынлашан ачыг јарымдүзхәтдир. Бу һалда (0, 0) мәхсуси нөгтәси



Шәкил 20.

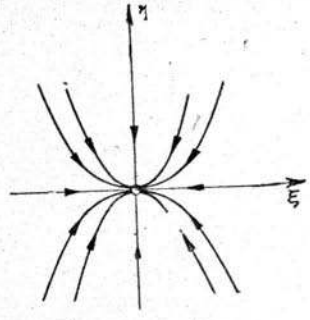
дајаныглы дүзкүн дүјүн нөгтәси адланыр (шәкил 20). (*Б*) һалында $\xi=c_1e^{\lambda t}, \eta=c_2e^{\lambda t}$ һәлли үчүн $\lim_{t\to-\infty}(\xi^2+\eta^2)=0$ шәрти өдәнир. Демәли, трајекторијалар t мәнфи сонсузлуға јахынлашдыгда (0,0) нөгтәсинә јахынлашан ачыг јарымдүзхәтләрдир. Бу һалда (0, 0) мәхсуси нөгтәси *дајаныгсыз дүзкүн дүјүн нөгтәси* адланыр (шәкил 21). (*В*) һалында һәлл $\xi=c_1e^{\lambda t}$, $\eta=c_2e^{\mu t}$ шәклиндәдир. Ајдындыр ки, $\lim_{t\to+\infty}\xi(t)=0$, $\lim_{t\to+\infty}\eta(t)=0$ вә $c_1\neq0$ олдугда $\lim_{t\to+\infty}\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=0$. Беләликлә, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда трајекторијалар координат башланғычына јахынлашырлар вә лимит вәзијјәтиндә $O\xi$ охуна тохунурлар. Ајдындыр ки, $c_1=c_2=0$ олдугда трајекторија $\xi=0$, $\eta=0$ таразлыг вәзијјәтидир. $c_1=0$, $c_2\neq0$ олдугда, c_2-нин мүсбәт вә ја мәнфи олмасындан асылы олараг $\xi=0$, $\eta=c_2e^{\mu t}$ һәллинин трајекторијасы $O\eta$ охунун ачыг мүсбәт вә ја ачыг мәнфи јарымһиссәси олур. $c_1\neq0$, $c_2=0$ олдугда исә $\xi=c_1e^{\lambda t}$, $\eta=0$ һәллинин трајекторијасы $O\xi$ охунун ачыг мүсбәт вә ја ачыг мәнфи јарымһиссәси олур. Бу һалда (0, 0) мәхсуси нөгтәси *дајаныглы дүзкүн олмајан дүјүн нөгтәси адланыр* (шәкил 22). (*Г*) һалы (*В*) һалына охшар гајда илә арашдырылыр. Бу һалда (0, 0) мәхсуси нөгтәси *дајаныгсыз дүзкүн олмајан дүјүн нөгтәси адланыр* (шәкил 23). (*Ғ*) һалында һәллин ифадәси (*В*) һалындакы кимидир, лакин бу һалда $\lim_{t\to\infty}\xi(t)=0$ вә $c_2>0$ олдугда $\lim_{t\to\infty}\eta(t)=+\infty$, $c_2<0$ олдугда исә $\lim_{t\to-\infty}\eta(t)=-\infty$. Бу һалда (0, 0) мәхсуси нөгтәси *јәһәрвари мәхсуси нөгтә адланыр* (шәкил 24).



Шәкил 21.

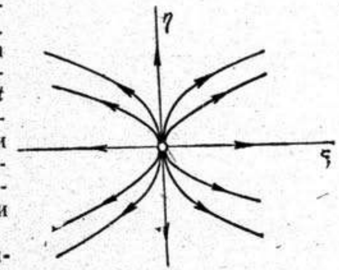
Асанлыгла көстәрмәк олар ки, (II) системинин $\xi(0)=c_1$, $\eta(0)=c_2$ шәртини өдәјән һәлли $\xi(t)=c_1e^{\lambda t}$, $\eta(t)=(c_2+\lambda c_1 t)e^{\lambda t}$ шәклиндәдир. Бу һәллин трајекторијаларыны (A_1) $\lambda<0$, ($Б_1$) $\lambda>0$ һаллары үчүн арашдыраг.

Ајдындыр ки, (A_1) һалында $\lim_{t\to+\infty}\xi(t)=0$, $\lim_{t\to+\infty}\eta(t)=0$ вә $в_1\neq0$ олдугда $\lim_{t\to+\infty}\frac{\eta(t)}{\xi(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\dot\eta(t)}{\dot\xi(t)}=-\infty$. Демәли, һәлләрин трајекторијалары, t мүсбәт сонсузлуға јахынлашдыгда (0,0) нөгтәсинә јахынлашырлар вә лимит вәзијјәтиндә $O\eta$ охуна тохунурлар. Хүсуси һалда $c_1=0$ оларса, $c_2>0$ олдугда трајекторија $O\eta$ охунун ачыг мүсбәт јарымһиссәси, $c_2<0$ олдугда исә ачыг мәнфи јарымһиссәсидир. Бу һалда (0, 0) мәхсуси нөгтәс и дајаныглы дүзкүн олмајан дүјүн нөгтәси олур (шәкил 25).



Шәкил 22.

Гејд едәк ки, ($Б_1$) һалында трајекторијалар (A_1) һалындакы кими јерләширләр, лакин t артдыгча нөгтәнин трајекторија бојунча һәрәкәт истигамәти дәјишир. Бу һалда (0, 0) мәхсуси нөгтәси дајаныгсыз дүзкүн олмајан дүјүн нөгтәси олур (шәкил 26).



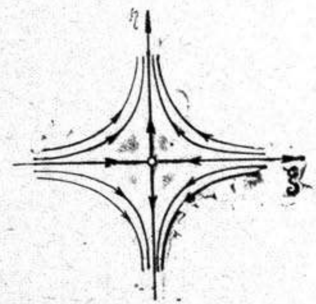
Шәкил 23.

Галан (III), (IV) системләрини арашдырмаг үчүн $\xi=r\cos\theta$, $\eta=r\sin\theta$ әвәзләмәси апараг. Онда садә чевирмәләрдән сонра (III), (IV) системләри уйғун олараг

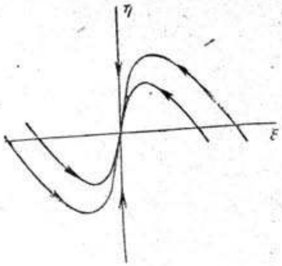
$$\text{(III}'\text{)}\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt}=-\mu, \\ \dfrac{dr}{dt}=\lambda r, \ (\lambda\neq0,\ \mu<0), \end{cases}$$

$$\text{(IV}'\text{)}\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt}=-\mu, \\ \dfrac{dr}{dt}=0 \end{cases} \quad (\mu<0)$$

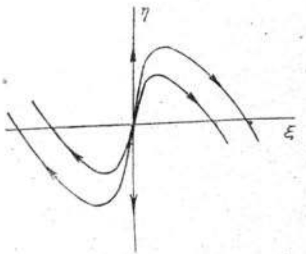
шәклиндә системләрә кәтирилир.



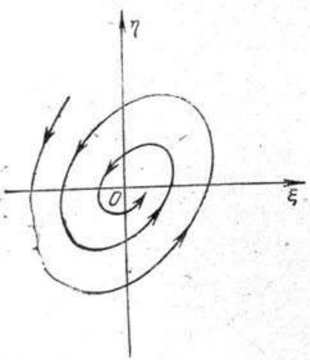
Шәкил 24.



Шəкил 25.



Шəкил 26.



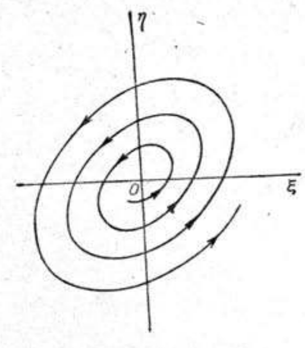
Шəкил 27.

Аjдындыр ки, $\theta = -\mu t + c_1$, $r = c_2 e^{\lambda t}$ $(c_2 > 0)$ функсиjалары (III′) системинин һəллидир вə полjар координат системиндə уjғун траjекториjа $r = ce^{-\frac{\lambda}{\mu}\theta}$ $\left(c = c_2 e^{-\frac{\lambda}{\mu}c_1}\right)$ шəклиндəдир. Бурадан аjдындыр ки, $\lambda < 0$ исə, θ мүсбəт сонсузлуға jахынлашдыгда (III′) системинин траjекториjалары спиралвари (0, 0) нөгтəсинə jахынлашыр. Бу исə о демəкдир ки, $\lambda < 0$ оларса, t мүсбəт сонсузлуға jахынлашдыгда (III) системинин траjекториjалары спиралвари (0, 0) нөгтəсинə jахынлашырлар. Бу һалда (0, 0) нөгтəси *даjаныглы фокус нөгтəси адланыр.* (шəкил 27). Əкəр $\lambda > 0$ оларса, θ артдыгча (III′) системинин траjекториjалары спиралвари (0, 0) нөгтəсиндəн узаглашыр. Она көрə дə, t мүсбəт сонсузлуға jахынлашдыгда (III) системинин траjекториjалары (0, 0) нөгтəсиндəн узаглашыр. Бу һалда (0, 0) нөгтəси *даjанығсыз фокус нөгтəси адланыр.* (шəкил 28).

(IV′) системинин һəллəри $\theta = -\mu t + c_1$, $r = c_2\ (c_2 > 0)$ шəклиндəдир. Демəли, траjекториjалар мəркəзи (0, 0) нөгтəсиндə олан чеврəлəр аилəсидир, jə'ни тсикллəрдəн ибарəтдир. Бу һалда (0, 0) *мəхсуси нөгтəси мəркəз адланыр* (шəкил 29).

Белəликлə, ашағыдакы теореми исбат етмиш олуруг.

Теорем 11. *Тутаг ки, (8) системиндə (9) шəрти өдəнир. Онда (0, 0) нөгтəси (8) системинин изолə едилмиш мəхсуси нөгтəсидир вə $D = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 = 0$ вə jа $D > 0$, $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$ оларса, (0, 0) нөгтəси дүjүн нөгтəси; $D > 0$, $\Delta < 0$ оларса, (0, 0) нөгтəси jəһəрвари нөгтə; $D < 0$, $a_1 + b_2 \neq 0$ оларса, (0, 0) фокус нөгтəси; $D < 0$, $a_1 + b_2 = 0$ оларса, (0, 0) нөгтəси мəркəз олур.*



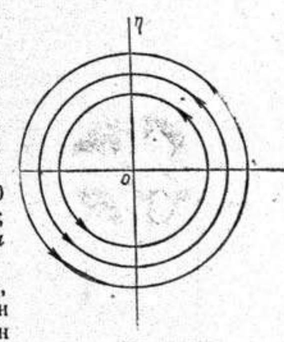
Шəкил 28.

г). *Үмуми һалда мəхсуси нөгтəлəрин тəснифаты.* Үмумилиjи позмадан, (0, 0) нөгтəсинин (4) системинин мəхсуси нөгтə олдуғуну фəрз етмəк олар. Əкс һалда координат башланғычыны паралел көчүрмəклə буна наил ола билəрик. Бу һалда ашағыдакы теорем доғрудур.

Теорем 12. *Тутаг ки, (4) системиндə 1) $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функсиjалары (0, 0) нөгтəсинин мүəjjəн U əтрафында Липшис шəртини өдəjир; 2) һамысы бирдəн сыфыр олмаjан a_1, b_1, a_2, b_2 əдəдлəри вар ки, $P(x, y) = a_1 x + b_1 y + \varphi(x, y)$, $Q(x, y) = a_2 x + b_2 y + \psi(x, y)$; бурада $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ функсиjалары U əтрафында кəсилмəздирлəр вə $\varphi(x, y) = o(r)$, $\psi(x, y) = O(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,* jə'ни $\lim\limits_{r\to 0} \frac{\varphi(x, y)}{r} = 0$, $\lim\limits_{r\to 0} \frac{\psi(x, y)}{r} = 0$, һəм дə *$D = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 = 0$ олдугда сонунчу шəрт мүəjjəн $\varepsilon > 0$ үчүн $\varphi(x, y) = O(r^{(1+\varepsilon)})$, $\psi(x, y) = O(r^{(1+\varepsilon)})$ шəрти илə əвəз олунур;* 3) *$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Онда (0, 0) нөгтəси*

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 x + b_1 y + \varphi(x, y), \\ \dot{y} = a_2 x + b_2 y + \psi(x, y) \end{cases} \qquad (18)$$

системинин изолə едилмиш мəхсуси нөгтəси олур вə $D = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 = 0$ вə jа $D > 0$ вə $\Delta > 0$ олдугда дүjүн нөгтəси; $D > 0$ вə *$\Delta < 0$ олдугда jəһəрвари нөгтə; $D < 0$ вə $a_1 + b_2 \neq 0$ олдугда фокус; $D < 0$ вə $a_1 + b_2 = 0$ олдугда мəркəз вə jа фокус олур.*



Шəкил 29.

Теоремдəн аjдындыр ки, (14) тəнлиjинин көклəринин һəгиги һиссəлəри сыфырдан фəргли олдугда $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$

функсиjалары мәхсуси нөгтәнин тәснифатында рол оjнамырлар, jә'ни бу һалда (0, 0) изолә едилмиш мәхсуси нөгтәси әтрафында (18) системинин траjекториjалары (8) системинин траjекториjалары кими jерләшир. Лакин (14) тәнлиjинин көкләринин һәгиги һиссәләри сыфыр олдугда, (0, 0) нөгтәсинин (8) системи үчүн мәркәз мәхсуси нөгтә олмасына бахмаjараг, (1) системи үчүн мәркәз олмаjа биләр.

Мисал 1.

$$\begin{cases}\dot{x} = y + 2y^3,\\ \dot{y} = -x - 2x^3\end{cases}$$

системиндә $D = -4 < 0$, $a_1 + b_2 = 0$ олдуғундан (0, 0) нөгтәси уjғун хәтти бирчинс систем үчүн мәркәз мәхсуси нөгтәдир. Системин траjекториjалары

$$(x + 2x^3)\,dx + (y + 2y^3)\,dy = 0$$

тәнлиjинин интеграл әjриләридир. Бурадан алырыг ки, траjекториjалар $x^2 + x^4 + y^2 + y^4 = c^2$ шәклиндәдир. Демәли, траjекториjалар координат башланғычыны дахилиндә сахлаjан тсикллардир. Она көрә дә (0, 0) нөгтәси бахылан систем үчүн мәркәз олур.

Мисал 2.

$$\begin{cases}\dot{x} = y + x(x^2 + y^2),\\ \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2)\end{cases}$$

системиндә $D < 0$, $a_1 + b_2 = 0$ вә (0, 0) нөгтәси уjғун хәтти бирчинс систем үчүн мәркәз олур. Системдә $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ әвәзләмәси апарсаг,

$$\frac{d\theta}{dt} = -1, \quad \frac{dr}{dt} = r^3$$

системини аларыг. Бурадан $\theta = -t + c_1$, $r = \sqrt{\frac{1}{c_2 - 2t}}$. Уjғун траjекториjалар $r = \sqrt{\frac{1}{2\theta + c}}$ $(2\theta + c > 0)$ шәклиндәдир вә аjдындыр ки, θ мүсбәт сонсузлуға jахынлашдыгда бу траjекториjалар координат башланғычына jахынлашырлар. Демәли, бахылан системин траjекториjалары t мәнфи сонсузлуға jахынлашдыгда спиралвари (0, 0) нөгтәсинә jахынлашарлар. Jә'ни (0, 0) нөгтәси бахылан системин даjаныгсыз фокус нөгтәсидир.

Чалышмалар

1. Ашағыдакы системләрин траjекториjаларыны гурмалы вә $x^2 + y^2 = 1$ лимит тсиклинин даjаныглығыны арашдырмалы.

а) $\begin{cases}\dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2),\\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2).\end{cases}$ *Чаваб*: даjаныглы.

б) $\begin{cases}\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1),\\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1).\end{cases}$ *Чаваб*: даjаныгсыз.

в) $\begin{cases}\dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1)^2,\\ \dot{y} = -x.\end{cases}$ *Чаваб*: jарымдаjаныглы.

2. Ашағыдакы системләрдә (0, 0) мәхсуси нөгтәсинин тәснифатыны верин вә һәмин нөгтә әтрафында траjекториjалары гурун:

а) $\begin{cases}\dot{x} = x - 2y,\\ \dot{y} = x - y.\end{cases}$ *Чаваб*: мәркәз.

б) $\begin{cases}\dot{x} = x - 2y,\\ \dot{y} = 2x - 3y.\end{cases}$ *Чаваб*: даjаныглы дүзкүн дүjүн.

в) $\begin{cases}\dot{x} = 2x + y,\\ \dot{y} = 3x + y\end{cases}$ *Чаваб*: jәһәрвари.

г) $\begin{cases}\dot{x} = 3x - y,\\ \dot{y} = x + 2y.\end{cases}$ *Чаваб*: даjаныгсыз фокус.

д) $\begin{cases}\dot{x} = -2x + 5y,\\ \dot{y} = -x + y,\end{cases}$ *Чаваб*: даjаныглы фокус.

е) $\begin{cases}\dot{x} = 3x - 2y,\\ \dot{y} = -5x + 4y.\end{cases}$ *Чаваб*: даjаныгсыз дүзкүн олмаjан дүjүн.

ж) $\begin{cases}\dot{x} = -3x + 2y,\\ \dot{y} = -5x + 3y.\end{cases}$ *Чаваб*: мәркәз.

з) $\begin{cases}\dot{x} = -3x + y,\\ \dot{y} = -4x + 2y.\end{cases}$ *Чаваб*: jәһәрвари.

3. Ашағыдакы системләрин мәхсуси нөгтәләрини тә'jин един вә тәснифатыны верин:

а) $\begin{cases}\dot{x} = 13 - x^2 - y^2,\\ \dot{y} = (x - 3)(x + 2y - 8).\end{cases}$ *Чаваб*: (3, 2), (1,2, 3,4)—jәһәрвари нөгтәләр, (3, −2)—фокус, (2, 3)—дүjүн.

б) $\begin{cases}\dot{x} = 2x + y - xy,\\ \dot{y} = x + 2y - y^2.\end{cases}$ *Чаваб*: (0,0), (3, 3)—дүjүн нөгтәләри, (−1, 1)—jәһәрвари.

X ФӘСИЛ

БИРТӘРТИБЛИ ХҮСУСИ ТӨРӘМӘЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

§ 1. ХҮСУСИ ТӨРӘМӘЛИ ТӘНЛИК АНЛАЈЫШЫ. КОШИ МӘСӘЛӘСИ

Сәрбәст дәјишәнләр $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n\geqslant 2)$, ахтарылан функсија $z=z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вә онун $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ хүсуси төрәмәләри арасында верилмиш

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0 \tag{1}$$

мүнасибәтинә *биртәртибли хүсуси төрәмәли диференсиал тәнлик* дејилир; бурада $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n)$ функсијасы $x^1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n$ дәјишәнләри фәзасынын мүәјјән G_{2n+1} областында тә'јин олунмушдур.

Тутаг ки, $z=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасынын $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дәјишәнләри фәзасынын мүәјјән G_n областында кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар вә һәр бир $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in G_n$ үчүн

1) $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)\in G_{2n+1}$,

2) $F\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right)=0$.

Онда $z=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасына G_n областында (1) тәнлијинин *һәлли* дејилир.

Ади диференсиал тәнликләрдә олдуғу кими (1) тәнлијинин һәлләринин тапылмасы мәсәләсинә онун *интеграпланмасы* дејилир.

Ахтарылан функсијанын өзү вә төрәмәләри хәтти дахил олан

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}+ \\ +X_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)z=Y(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2}$$

тәнлијинә *хәтти тәнлик* дејилир. Хүсуси һалда, бу тәнликдә

$$X_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)\equiv 0, \quad Y(x_1, x_2, \ldots, x_n)\equiv 0$$

олдугда белә тәнлијә *хәтти бирчинс тәнлик* дејилир. Анчаг ахтарылан функсијанын төрәмәләринә нәзәрән хәтти олан

$$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\frac{\partial z}{\partial x_n}= \\ =R(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \tag{3}$$

тәнлијинә, *квазихәтти тәнлик* дејилир.

Тутаг ки, (1) тәнлији $\frac{\partial z}{\partial x_n}$ төрәмәсинә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$\frac{\partial z}{\partial x_n}=f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}\right). \tag{4}$$

Бу тәнлијин

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0)=g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \tag{5}$$

шәртини өдәјән $z=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ һәллинин тапылмасы мәсәләсинә *Коши мәсәләси* дејилир; бурада x_n^0 верилмиш әдәд, $g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ исә верилмиш функсијадыр. Бу мәсәләјә һәм дә (1) тәнлији үчүн Коши мәсәләси дејилир.

Һәндәси изаһ вермәк үчүн, сәрбәст дәјишәнләрин сајы ики олан һала бахаг. Бу һалда сәрбәст дәјишәнләри x, y илә ишарә едиб (1) тәнлијини

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \tag{6}$$

шәклиндә јазаг. Ајдындыр ки, бу тәнлијин $z=\varphi(x, y)$ һәллинин графики x, y, z дәјишәнләри фәзасында бир сәтһ тәсвир едир. Һәмин сәтһә (6) тәнлијинин *интеграл сәтһи* дејилир.

Гејд едәк ки, $z=\varphi(x, y)$ функсијасынын кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олдуғундан, интеграл сәтһ һамар сәтһ олур.

Хүсуси һалда, (6) тәнлији $\frac{\partial z}{\partial x}$ төрәмәсинә нәзәрән һәлл олундугда, һәмин тәнлијин

$$\varphi(x^0, y)=g(y)$$

шәртини өдәјән һәллини тапмаг, һәндәси олараг, $x=x^0$ мүстәвиси үзәриндә јерләшән $z=g(y)$ әјрисиндән кечән интеграл сәтһини тапмаг демәкдир.

Бә'зән (6) тәнлијинин, параметрик шәкилдә верилмиш

$$x=\varphi(s), \quad y=\psi(s), \quad z=h(s), \quad s\in(\alpha, \beta) \tag{7}$$

әјрисиндән кечән интеграл сәтһинин тапылмасы тәләб олунур. Белә мәсәләјә *үмумиләшмиш Коши мәсәләси* дејилир.

Бу мүһакимәләрә ујғун олараг, (1) тәнлијинин $z=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ һәллинин $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ дәјишәнләри фәзасында тәсвир етдији „сәтһә" һәмин тәнлијин интеграл сәтһи дејилир.

Бу фәслдә хәтти вә квазихәтти хүсуси төрәмәли биртәртибли тәнликләрин һәлләринин варлығы вә јеканәлији мәсәләләри арашдырылыр.

Мисал 1. $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ хәтти бирчинс тәнлијинә бахаг. Ајдындыр ки, $z=x^2-y^2$ һиперболик параболоиди бу тәнлијин интеграл сәтһидир вә $z(0, y)=-y^2$ шәрти өдәниру ја'ни бу сәтһ $x=0$ мүстәвиси үзәриндә јерләшән $z=-y$ параболасындан кечән интеграл сәтһидир.

Көстәрәк ки, истәнилән диференсиалланан $\Phi(u)$ функсијасы үчүн $z=\Phi(x^2-y^2)$ функсијасы да бахылан тәнлијин һәллидир. Доғрудан да, $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\Phi'(x^2-y^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y\Phi'(x^2-y^2)$ олдуғундан,

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=(2xy-2xy)\Phi'(x^2-y^2)\equiv 0.$$

Мисал 2. $a_1\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+a_2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=b$ тәнлијинин $z=\varphi(x)+\psi(y)$ шәклиндә һәллини тапаг; бурада a_1, a_2, b верилмиш әдәдләрдир вә $a_1^2+a_2^2>0$. Belә һәлл үчүн

$$a_1[\varphi'(x)]^2+a_2[\psi'(y)]^2=b$$

ејнилији өдәнмәлидир. Биринчи топланан анчаг x-дән, икинчи топланан анчаг y-дән асылы олдуғундан $\varphi'(x)=m$, $\psi'(y)=n$ олмалыдыр вә m, n әдәдләри $a_1m^2+a_2n^2=b$ шәртини өдәмәлидир. Бурада $a_2\neq 0$ гәбул етсәк, $n=\sqrt{\frac{b-a_1m^2}{a_2}}$ вә бахылан гејри-хәтти тәнлијин $z=mx+\sqrt{\frac{b-a_1m^2}{a_2}}\,y+c$ шәклиндә һәллини тапарыг. Бурада m, c ихтијари сабитләрдир.

Мисал 3. Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$a_1\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+a_n\left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^2=b,\ a_i=\text{const},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$a_1^2+\cdots+a_n^2>0,\ n>2$$

тәнлијинин $z=m_1x_1+\cdots+m_nx_n+c$ шәклиндә һәлли вар; бурада $m_1,\ldots,m_n$ әдәдләри $a_1m_1^2+\cdots+a_nm_n^2=b$ шәртини өдәјән ихтијари әдәдләрдир, c исә ихтијари сабитдир. Демәли, тәнлијин тапылан һәлли n сајда ихтијари сабитдән асылыдыр.

Кәтирилән мисаллар көстәрир ки, ади диференсиал тәнликләрдән фәргли олараг, биртәртибли хүсуси төрәмәли тәнликләрин сәрбәстлик дәрәчәси, үмумијјәтлә, сонсуздур.

§ 2. БИРТӘРТИБЛИ ХҮСУСИ ТӨРӘМӘЛИ ХӘТТИ БИРЧИНС ТӘНЛИК

а) *Үмуми һәллин гурулмасы.* Тутаг ки,

$$X[z]\equiv X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_2}+$$

$$+\cdots+X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_n}=0 \qquad (8)$$

хәтти бирчинс тәнлији верилмишдир; бурада $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$ функсијалары мүәјјән G_n областында кәсилмәздирләр вә бу областын һеч бир нөгтәсиндә һамысы бирдән сыфра чеврилмир.

Јухарыда (IV фәсил, § 2, д) бәнди) ади диференсиал тәнликләр системини арашдыраркән көстәрдик ки, (8) тәнлијинин интегралланмасы мәсәләси илә

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)} \qquad (9)$$

симметрик системинин интегралланмасы мәсәләси арасында әлагә вар. Даһа доғрусу, көстәрдик ки, $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасы (9) системинин диференсиалланан интегралы исә $z=\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасы (8) тәнлијинин һәллидир вә тәрсинә, $z=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасы (8) тәнлијинин һәлли исә, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсијасы (9) системинин диференсиалланан интегралыдыр.

(9) симметрик системинә (8) тәнлијинин *характеристик системи* дејилир.

Характеристик системин һәр бир һәллинә (8) тәнлијинин *характеристикалары* вә ја *характеристик әјриләри*, онун һәр бир диференсиалланан интегралына исә, тәнлијин *интегралы* дејилир.

Ајдындыр ки, (9) системи $n-1$ тәртибли нормал системә еквивалентдир. Одур ки, бу системин $n-1$ сајда функсионал асылы олмајан интегралы вар. Демәли, (8) тәнлијинин дә $n-1$ сајда функсионал асылы олмајан интегралы вар. (8) тәнлијинин G_n областында функсионал асылы олмајан $n-1$ сајда

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots,\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (10)$$

интегралларына, онун һәмин областда *фундаментал интеграллар* системи дејилир.

Теорем 1. *Тутаг ки, (10) функсијалары системи G_n областында (8) тәнлијинин фундаментал интеграллар системидир вә $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ һәмин функсијаларын гијмәтләри чохлуғуну дахилиндә сахлајан областда тә'јин олунмуш ихтијари кәсилмәз диференсиалланан функсијадыр. Онда (8) тәнлијинин G_n областында үмуми һәлли*

$$z = \Phi(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)) \qquad (11)$$

дүстуру илә верилир.

Исбаты. Әввәлчә көстәрәк ки, (11) дүстуру илә тә'јин олунан

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \Phi(\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

функсијасы (8) тәнлијинин G_n областында һәллидир. Доғрудан да, (10) функсијалары (8) тәнлијинин һәлләри олдуғундан

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

мүнасибәтинә әсасән

$$X[\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)] = \sum_{j=1}^{n} X_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} X_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \left[\sum_{j=1}^{n} X_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right] = 0$$

олар. Бу исә көстәрир ки, истәнилән диференсиалланан $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ функсијасы үчүн (11) дүстуру илә тә'јин олунан функсија (8) тәнлијинин һәллидир.

Көстәрәк ки, (8) тәнлијинин G_n областында тә'јин олунмуш һәр һансы $z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ һәллини, $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ функсијасыны сечмәклә (11) дүстурундан алмаг олар. Ајдындыр ки, $z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функсијасы вә (10) функсијалары G_n областында (8) тәнлијинин һәлләри олдуғундан, бу областда

$$\begin{aligned} &X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0, \\ &X_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &X_1 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} = 0 \end{aligned} \qquad (12)$$

ејниликләри өдәнир.

Һәр бир $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G_n$ нөгтәси үчүн (12) бәрабәрликләринә $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мәчһулларына нәзәрән n сајда хәтти бирчинс чәбри тәнликләр системи кими бахаг. Шәртә көрә G_n областынын һеч бир нөгтәсиндә $X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функсијаларынын һамысы бирдән сыфыр олмадығындан, һәр бир $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G_n$ нөгтәси үчүн (12) системинин сыфырдан фәргли һәлли вар. Буна көрә дә Кронкер-Капелли теореминә әсасән G_n областында

$$\frac{D(\psi, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv 0$$

олмалыдыр. Јакобианлар һаггында теоремә әсасән бурадан алырыг ки, (бах IV фәсил, § 2) $\psi, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ функсијалары арасында функсионал асылылыг вар. Јә'ни $u_1, u_2, \dots, u_n$ дәјишәнләри фәзасынын һеч бир алт областында ејниликлә сыфыр олмајан вә кәсилмәз диференсиалланан елә $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ функсијасы вар ки, G_n областында

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv F(\psi(x_1, x_2, \dots, x_n), \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0 \qquad (13)$$

шәрти өдәнир.

Көстәрәк ки, G_n областынын һәр бир нөгтәсиндә $\frac{D(\psi, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ јакобианынын биринчи сәтир елементләринин минорларындан һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир. Доғрудан да, үмумилији позмадан фәрз етмәк олар ки, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in G_n$ нөгтәсиндә $X_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \neq 0$. Онда (9) симметрик системиндә x_n-ә сәрбәст дәјишән, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ дәјишәнләринә исә онун функсијалары кими бахсаг, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында һәмин системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \end{cases} \qquad (14)$$

нормал системинә кәтирмәк олар вә $\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функсијалары бу нормал системин функсионал асылы олмајан, диференсиалланан интегралларыдыр. Одур ки, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нөгтәсинин әтрафында (бах: IV фәсил, § 2)

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} \neq 0.$$

Јакобианлар һаггында теоремә әсасән, бурадан алырыг ки, (13) тәнлији ψ-јә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$\psi = \Psi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}).$$

Шәртә көрә $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ функсијасы кәсилмәз диференсиалланан олдуғундан, $\Psi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ функсијасы да кәсилмәз диференсиаллананды. Теорем исбат олунду.

Мисал 4.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} - (x_2 + 2x_3)\frac{\partial z}{\partial x_2} + (3x_2 + 4x_3)\frac{\partial z}{\partial x_3} = 0$$

тәнлијинин үмуми һәллини тапаг.

Тәнлијин характеристик системи

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{-(x_2 + 2x_3)} = \frac{dx_3}{3x_2 + 4x_3}$$

шәклиндәдир вә ону

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2 + dx_3}{2(x_2 + x_3)} = \frac{3dx_2 + 2dx_3}{3x_2 + 2x_3}$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан алынан

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{d(x_2 + x_3)}{2(x_2 + x_3)}, \quad \frac{dx_1}{1} = \frac{d(3x_2 + 2x_3)}{3x_2 + 2x_3}$$

системини һәлл етсәк,

$$\psi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3)e^{-2x_1},$$
$$\psi_2(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 + 2x_3)e^{-x_1}$$

интегралларыны аларыг. Дикәр тәрәфдән,

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} e^{-2x_1} & e^{-2x_1} \\ 3e^{-x_1} & 2e^{-x_1} \end{vmatrix} = -e^{-3x_1} \neq 0$$

олдуғундан, бу интеграллар фундаментал интеграллар системи тәшкил едир. Онда, теоремә әсасән, бахылан тәнлијин үмуми һәлли

$$z = \Phi\left((x_2 + x_3)e^{-2x_1},\ (3x_2 + 2x_3)e^{-x_1}\right)$$

олар; бурада $\Phi(u_1, u_2)$ ихтијари диференсиалланан функсијадыр.

б) ***Үмуми һәллин варлығы.*** Үмуми һәллин варлығы һаггында теореми исбат етмәк үчүн

$$\frac{\partial z}{\partial t} + f_1(t, x_1, \ldots, x_m)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + f_m(t, x_1, \ldots, x_m)\frac{\partial z}{\partial x_m} = 0 \quad (15)$$

шәклиндә тәнлијә бахаг вә фәрз едәк ки, $f_i(t, x_1, \ldots x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ функсијалары $m+1$ өлчүлү фәзанын мүәјјән G_{m+1} областында тә'јин олунмушлар.

Гејд едәк ки, (8) шәклиндә олан тәнлији һәр бир $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G_n$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында (15) шәклиндә тәнлијә кәтирмәк олар. Бундан башга X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ әмсалларындан бири G_n областынын бүтүн нөгтәләриндә сыфырдан фәргли оларса, бу заман (8) тәнлијини бүтүн областда (15) шәкилли тәнлијә кәтирмәк олар.

Теорем 2. *Тутаг ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ функсијалары G_{m+1} областында кәсилмәздир вә кәсилмәз $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$ хүсуси төрәмәләри вар. Онда мүәјјән $G'_{m+1} \subset G_{m+1}$ алт областында (15) тәнлијинин фундаментал интеграллар системи вар.*

Исбаты. Ајдындыр ки, (15) тәнлијинин характеристик системини

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_m), \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad (16)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Гејд едәк ки, $f_i(t, x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ функсијалары үзәриндә гојулан шәртләрә вә (16) нормал системинин башланғыч шәртләрдән асылылығы теоремләринә әсасән, истәнилән $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m) \in G_{m+1}$ нөгтәси үчүн һәмин системин $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ шәртләрини өдәјән јеканә $x_i = \varphi_i(t, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ һәлли вар. Бу һәлл $t, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_m$ дәјишәнләри фәзасынын мүәјјән G_{m+2} областында тә'јин олунуб вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Бундан башга Линделјоф теореминә әсасән, $\varphi_i(t, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ функсијалары һәр бир гејд олунмуш t үчүн тә'јин олундуғу областда $\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m$ дәјишәнләринә нәзәрән

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + f_1(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m)\frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \cdots +$$
$$+ f_m(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m)\frac{\partial u}{\partial \xi_m} = 0 \quad (17)$$

тәнлијини өдәјир (бах: VI фәсил, § 3).

Гејд олунмуш t_0 үчүн

$$\psi_i(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m) = \varphi_i(t_0, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_m), \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

функсијаларыны дүзәлдәк. Бу функсијаларын һамысы $\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m$ дәјишәнләринә нәзәрән мүәјјән $G'_{m+1} \subset G'_{m+1}$ областында тә'јин олунублар, бу областда (17) хүсуси төрәмәли тәнлијинин һәлләридир вә

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)} > 0$$

шәрти өдәнир. Бурадан алыныр ки, $\psi_1(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m), \ldots$ $\psi_m(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ функсиjалары G_{m+1} областында (17) тәнлиjинин фундаментал интеграллар системини тәшкил едир. Одур ки, $\tau, \xi_1, \ldots, \xi_m$ дәјишәнләрини уjғун олараг $t, x_1, \ldots, x_m$ дәјишәнләри илә әвәз етсәк,

$$\psi_i(t, x_1, \ldots, x_m) = \varphi_i(t_0, t, x_1, \ldots, x_m), \; i = 1, 2, \ldots, m \quad (18)$$

бәрабәрликләри илә тә'јин олунан $\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots,$ $\psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)$ функсиjалары (15) тәнлиjинин фундаментал интеграллар системи олур. Теорем исбат олунду.

Бу теоремә вә 1-чи теоремә әсасән алыныр ки, (15) тәнлиjинин G_{m+1} областында үмуми һәлли вар. Бундан башга $x_1 = \varphi_1(t, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_m), \ldots, x_m = \varphi_m(t, t_0, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ функсиjалары (16) системинин $x_i(t_0) = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ шәртләрини өдәјән һәлли олдуғундан, (18) бәрабәрликләриндән аjдындыр ки,

$$\psi_i(t_0, x_1, \ldots, x_m) = x_i, \; i = 1, 2, \ldots, m \quad (19)$$

шәртләри өдәнир.

Мисал 5.

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i x_i + \beta_i t) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

тәнлиjинин фундаментал интеграллар системини гураг; бурада

$$\alpha_i = \text{const} \neq 0, \; \beta_i = \text{const}, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Уjғун характеристик систем

$$\dot{x}_i = \alpha_i x_i + \beta_i t, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

шәклиндәдир вә бу системин $x_i(\tau) = \xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ шәртләрини өдәјән һәлли

$$\varphi_i(t, \tau, \xi_i, \ldots, \xi_m) = e^{\alpha_i(t-\tau)}\left[\xi_i + \frac{\beta_i}{\alpha_i}\left(\tau + \frac{1}{\alpha_i}\right)\right] - \frac{\beta_i}{\alpha_i}\left(t + \frac{1}{\alpha_i}\right),$$
$$i = 1, 2, \ldots, m$$

олар. Теоремә әсасән

$$\psi_i(t, x_1, \ldots, x_m) = \varphi_i(0, t, x_1, \ldots, x_m) =$$
$$= e^{-\alpha_i t}\left[x_i + \frac{\beta_i}{\alpha_i}\left(t + \frac{1}{\alpha_i}\right)\right] - \frac{\beta_i}{\alpha_i^2}, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

функсиjалары бахылан тәнлиjин фундаментал интеграллар системи олар. Доғрудан да, асанлыгла јохламаг олар ки, бу функсиjаларын һәр бири бахылан тәнлиjи өдәјир. Дикәр тәрәфдән

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = e^{-(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)t} > 0$$

олдуғундан, һәмин функсиjалар функсионал асылы дејилдир.

в) *Коши мәсәләсинин һәлли.* Исбат едилән теоремләр бир даһа көстәрир ки, хәтти тәнлиjин һәлли бир ихтиjари функсиjадан асылыдыр вә тәнлиjин мүәјјән һәллини гурмаг үчүн һәмин ихтиjари функсиjаны сечмәк лазымдыр. Бу функсиjаны сечмәк үсулларындан бири верилмиш тәнлик үчүн Коши мәсәләсини һәлл етмәкдән ибарәтдир. Коши мәсәләсинин һәллинин варлығыны көстәрмәздән әввәл бә'зи анлајышлар верәк.

$m+1$ өлчүлү фәзанын $t = t_0$ мүстәвисинин тамамилә G_{m+1} областында јерләшән ачыг, әлагәли һиссәсини L илә, G_{m+1} областынын (18) бәрабәрликләриндән тә'јин олунан $\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)$ функсиjаларынын варлығыны тә'мин едән вә (16) системинин L-дән кечән интеграллары илә өртүлән һиссәсини исә $G_{m+1}(L)$ илә ишарә едәк. $G_{m+1}(L)$ областына (15) тәнлиjинин ***характеристик мејданы*** дејилир.

Теорем 3. *Тутаг ки, (15) тәнлиjинин (18) бәрабәрликләри илә тә'јин олунан $\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)$ интеграллары $G_{m+1}(L)$ областында $a_1 < \psi_1 < b_1, \ldots, a_m < \psi_m < b_m$ шәртләрини өдәјирләр, $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ исә $R = \{a_1 < x_1 < b_1, \ldots, a_m < x_m < b_m\}$ областында кәсилмәз диференсиалланан функсиjадыр. Онда (15) тәнлиjинин $\varphi(t_0, x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ шәртини өдәјән вә $G_{m+1}(L)$ областында тә'јин олунан јеканә $z = \varphi(t, x_1, \ldots, x_m)$ һәлли вар. Бу һәлл*

$$\varphi(t, x_1, \ldots, x_m) = g(\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)) \quad (20)$$

дүстуру илә верилир.

Исбаты. Теоремин шәртинә көрә $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функсиjасы R областында диференсиалланан олдуғундан, 1-чи теоремә әсасән $z = g(\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m))$ функсиjасы (15) тәнлиjинин һәллидир вә (19) бәрабәрликләринә әсасән, $t = t_0$ олдугда

$$g(\psi_1(t_0, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t_0, x_1, \ldots, x_m)) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

шәрти өдәнир. Jә'ни (20) функсиjасы Коши мәсәләсинин һәллидир.

Һәллин јеканәлиjини көстәрмәк үчүн әксини фәрз едәк. Тутаг ки, $G_{m+1}(L)$ областында Коши мәсәләсинин башга бир $z = \tilde{\varphi}(t, x_1, \ldots, x_m)$ һәлли дә вар. Онда үмуми һәллин тә'рифинә әсасән, R областында кәсилмәз диференсиалланан елә $\tilde{\Phi}(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ функсиjасы вар ки,

$$\tilde{\varphi}(t, x_1, \ldots, x_m) = \tilde{\Phi}(\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)).$$

Дикәр тәрәфдән, (19) шәртинә әсасән, $t = t_0$ олдугда,

$\tilde{\Phi}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ олдуғундан, алырыг ки,

$$\tilde{\varphi}(t, x_1, \ldots, x_m) = g(\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m))$$

олмалыдыр. Бу исә көстәрир ки, һәлл јеканәдир. Теорем исбат олунду.

Мисал 6.

$$\frac{\partial z}{\partial t} + x\frac{\partial z}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

тәнлијинин $\varphi(0, x, y) = g(x, y)$ шәртини өдәјән һәллини тапаг. Бунун үчүн әввәлчә

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

характеристик системинин $x(\tau) = \xi$, $y(\tau) = \eta$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини гураг:

$$x = \varphi_1(t, \tau, \xi, \eta) = \xi e^{t-\tau}, \quad y = \varphi_2(t, \tau, \xi, \eta) = e^{t-\tau}[\eta + \xi(t-\tau)].$$

Бурадан (18) бәрабәрликләринә әсасән алыныр ки,

$$\psi_1(t, x, y) = \varphi_1(0, t, x, y) = xe^{-t}, \quad \psi_2(t, x, y) = \varphi_2(0, t, x, y) = e^{-t}(y - xt)$$

функсијалары бахылан тәнлијин фундаментал интеграллар системидир. Онда (20) дүстуруна әсасән

$$z = g\left(xe^{-t}, (y - xt)e^{-t}\right)$$

функсијасы бахылан тәнлијин $\varphi(0, x, y) = g(x, y)$ башланғыч шәртини өдәјән һәлли олур.

Гејд. Тутаг ки, $\psi_1(t, x, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)$ функсијалары (15) тәнлијинин (19) шәртини өдәмәјән фундаментал интеграллар системидир. Бу функсијаларын көмәји илә (15) тәнлијин (19) шәртини өдәјән фундаментал интеграллар системини гурмаг үчүн

$$\begin{cases} \psi_1(t_0, x_1, \ldots, x_m) = \gamma_1, \\ \psi_2(t_0, x_1, \ldots, x_m) = \gamma_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_m(t_0, x_1, \ldots, x_m) = \gamma_m \end{cases} \qquad (21)$$

системини дүзәлдәк. Шәртә көрә $\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)} \neq 0$ олдуғундан, (21) системинин $x_1, x_2, \ldots, x_m$ дәјишәнләринә нәзәрән јеканә

$$x_1 = \omega_1(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m), \; x_2 = \omega_2(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m), \ldots, \; x_m = \omega_m(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) \qquad (22)$$

һәлли вар вә $\omega_1(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m), \ldots, \omega(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$ кәсилмәз диференсиалланан функсијалардыр. Бу функсијаларын көмәји илә

$$\tilde{\psi}_i(t, x_1, \ldots, x_m) = \omega_i(\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m)), \; i = 1, 2, \ldots, m$$

функсијаларыны дүзәлдәк. Онда 1-чи теоремә әсасән $\tilde{\psi}_i(t, x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ функсијалары (15) тәнлијинин интеграллары олур вә (21), (22) мүнасибәтләриндән ајдындыр ки,

$$\tilde{\psi}_i(t_0, x_1, \ldots, x_m) = x_i, \; i = 1, 2, \ldots, m \qquad (19')$$

шәртләри өдәнир. Һәм дә $t = t_0$ олдугда $\frac{D(\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \ldots, \tilde{\psi}_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = 1$ олдуғундан, $(t_0, x_1, \ldots, x_m)$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында $\tilde{\psi}_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \tilde{\psi}_m(t, x_1, \ldots, x_m)$ интеграллары (15) тәнлијинин фундаментал интеграллар системини тәшкил едир. Онда 3-чү теоремә әсасән, (15) тәнлијинин $\varphi(t_0, x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ шәртини өдәјән һәлли

$$z = g(\tilde{\psi}_1(t, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \tilde{\psi}_m(t, x_1, \ldots, x_m)) = g(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m), \ldots, \omega_m(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m))$$

дүстуру илә тә'јин олунар.

Мисал 7. $\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (x \neq 0)$ тәнлијинин $\varphi(0, x, y) = x^2 y$ шәртини өдәјән һәллини гураг.

Ујғун характеристик систем

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{y}{x}, \\ \dot{y} = -\frac{y^2}{x^2}. \end{cases}$$

Бурадан

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

олдуғундан, $xy = c_1$ системин биринчи интегралыдыр. Бу интегралдан, y-и тә'јин едәрәк системин биринчи тәнлијиндә јазыб һәлл етсәк, $x^3 = 3c_1 t + c_2$. Беләликлә,

$$xy = c_1, \; x^3 - 3xyt = c_2$$

системин биринчи интеграллары олар. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\psi_1(t, x, y) = xy$, $\psi_2(t, x, y) = x^3 - 3xyt$ функсијалары бахылан тәнлијин фундаментал интеграллар системини тәшкил едир.

Бу интеграллар (19) шәртләрини өдәмир. Она көрә дә $t_0 = 0$ гәбул едәрәк

$$xy = \gamma_1, \; x^3 = \gamma_2$$

системини дүзәлдәк. Бурадан

$$x = \omega_1(\gamma_1, \gamma_2) = \sqrt[3]{\gamma_2}, \; y = \omega_2(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{\gamma_1}{\sqrt[3]{\gamma_2}}.$$

Гејдә әсасән

$$\tilde{\psi}_1(t,x,y)=\sqrt[3]{x^3-3xyt},\quad \tilde{\psi}_2(t,x,y)=\frac{xy}{\sqrt[3]{x^3-3xyt}}$$

функсијалары бахылан тәнлијин (19) шәртләрини өдәјән интегралларыдыр. Онда, бахылан тәнлијин $\varphi(0,x,y)=x^2y$ шәртини өдәјән һәлли

$$z=xy\sqrt[3]{x^3-3xyt}$$

олар.

§ 3. ИКИ СӘРБӘСТ ДӘЈИШӘН ҺАЛЫ ҮЧҮН КВАЗИХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР

а) *Һәндәси изаһ.* Тутаг ки,

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z) \qquad (23)$$

тәнлији верилмишдир; бурада $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ әмсаллары вә $R(x,y,z)$ сәрбәст һәдди мүәјјән G_3 областында кәсилмәз диференсиалланан функсијалардыр вә бу областда $|P(x,y,z)|+|Q(x,y,z)|>0$ шәрти өдәнир.

Мә'лумдур ки, бу тәнлијин $z=\varphi(x,y)$ интеграл сәтһинә $(x,y,z)\in G_3$ нөгтәсиндә чәкилән тохунан мүстәвинин тәнлији

$$\varphi_x(x,y)(X-x)+\varphi_y(x,y)(Y-y)=Z-z \qquad (24)$$

олур вә (x,y,z) нөгтәсинә бу мүстәвинин *дашыјычы нөгтәси*, $\varphi_x(x,y)$, $\varphi_y(x,y)$ әдәдләринә исә *истигамәтверичи әмсаллар* дејилир.

Верилмиш $(x,y,z)\in G_3$ нөгтәсиндән кечән вә p, q истигамәтверичи әмсаллары

$$P(x,y,z)p+Q(x,y,z)q=R(x,y,z) \qquad (25)$$

тәнлијини өдәјән

$$p(X-x)+q(Y-y)=Z-z \qquad (26)$$

мүстәвиләринә бахаг.

Ајдындыр ки, (x,y,z) нөгтәсини гејд едиб, p, q истигамәтверичи әмсалларына (25) шәртини өдәмәклә мүхтәлиф гијмәтләр версәк, (26) тәнлији мүстәвиләр дәстәси тәшкил едәр вә (24) шәртинә әсасән, бу мүстәвиләр дәстәсиндән бир мүстәви $z=\varphi(x,y)$ сәтһинә (x,y,z) нөгтәсиндә тохунан олар.

Верилмиш $(x,y,z)\in G_3$ нөгтәсиндән кечән вә истигамәтверичи вектору $(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$ олан

$$\frac{X-x}{P(x,y,z)}=\frac{Y-y}{Q(x,y,z)}=\frac{Z-z}{R(x,y,z)} \qquad (27)$$

дүз хәтти, (25) шәртинә әсасән, (26) мүстәвиләр дәстәси үзә-

риндә јерләшир, јә'ни һәмин мүстәвиләр дәстәсинин кәсишмә хәтти олур. Бу дүз *хәттә Монж оху* дејилир.

Демәли, (25) тәнлији һәр бир $(x,y,z)\in G_3$ нөгтәсиндә Монж оху илә тә'јин олунан истигамәт мүәјјән едир вә (26) мүстәвиләр дәстәси бу истигамәтдән кечир.

Беләликлә, (23) тәнлијини һәлл етмәк, һәндәси олараг елә $z=\varphi(x,y)$ һамар сәтһи тапмаг демәкдир ки, онун һәр бир (x,y,z) нөгтәсиндә тохунан мүстәвиси бу нөгтәнин тә'јин етдији (26) мүстәвиләр дәстәсинин ичәрисиндә олсун. Ајдындыр ки, (x,y,z) нөгтәсиндән чыхан $(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$ вектору $z=\varphi(x,y)$ сәтһинә һәмин нөгтәдә чәкилән тохунан мүстәви үзәриндә јерләшир.

Һәр бир (x,y,z) нөгтәсиндә тохунан вектору $(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$ олан әјријә (23) тәнлијинин *характеристик әјриси* вә ја *характеристикасы* дејилир.

Мә'лумдур ки, үч өлчүлү фәзада верилмиш әјринин һәр һансы (x,y,z) нөгтәсиндә тохунанынын истигамәтверичи вектору $(dx,\ dy,\ dz)$ илә тә'јин олунур. Бурадан, тә'рифә әсасән алырыг ки, характеристик әјринин һәр бир (x,y,z) нөгтәсиндә $(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$, $(dx,\ dy,\ dz)$ векторлары коллинеар векторлардыр, јә'ни

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}. \qquad (28)$$

Демәли, (28) системи характеристикаларын диференсиал тәнлији олур. Бу системә (23) тәнлијинин *характеристик системи* дејилир.

Теорем 4. *(23) тәнлијинин һәр бир интеграл сәтһи, бир параметрдән асылы характеристик әјриләрлә өртүлмүшдүр вә тәрсинә бир параметрдән асылы олан характеристик әјриләрин әмәлә кәтирдији һәр бир һамар сәтһ бу тәнлијин интеграл сәтһидир.*

Исбаты. Тутаг ки, $z=\varphi(x,y)$ функсијасы (23) тәнлијинин G_2 областында һәллидир. $z=\varphi(x,y)$ интеграл сәтһи үзәриндә јерләшән вә һәр бир нөгтәсиндә тохунан вектору $(P(x,y,\varphi(x,y)),\ Q(x,y,\varphi(x,y)),\ R(x,y,\varphi(x,y)))$, олан әјри гураг. Белә әјринин xOy мүстәвисинә проjексијасынын диференсиал тәнлији

$$\frac{dx}{P(x,y,\varphi(x,y))}=\frac{dy}{Q(x,y,\varphi(x,y))} \qquad (29)$$

олар. Бу тәнлији дә, G_2 областынын һәр бир нөгтәсинин әтрафында

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y,\varphi(x,y))}{P(x,y,\varphi(x,y))}\quad \text{вә ја}\quad \frac{dx}{dy}=\frac{P(x,y,\varphi(x,y))}{Q(x,y,\varphi(x,y))}$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ функсијалары үзәринә гојулан шәртләрә әсасән алырыг ки, һәр бир $(x, y)\in G_2$ нөгтәсиндән (29) тәнлијинин јеканә интеграл әјриси кечир. Бу тәнлијин үмуми һәллинин $y=\omega(x, c)$ шәклиндә олдуғуну фәрз едиб,

$$\begin{cases} y=\omega(x, c), \\ z=\varphi(x, \omega(x, c)) \end{cases} \qquad (30)$$

фәза әјриләри аиләсинә бахаг. Шәртә көрә $z=\varphi(x, y)$ функсијасы (23) тәнлијинин һәлли олдуғундан, бурадан алырыг ки,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{Q}{P}=$$

$$=\frac{1}{P}\left[P\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Q\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=\frac{R(x, \omega(x, c), \varphi(x, \omega(x, c)))}{P(x, \omega(x, c), \varphi(x, \omega(x, c)))}.$$

Бу исә о демәкдир ки, (30) фәза әјриләри аиләси һәм дә

$$\frac{dz}{dx}=\frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)} \quad \text{вә ја} \quad \frac{dx}{P(x, y, z)}=\frac{dz}{R(x, y, z)} \qquad (31)$$

тәнлијини өдәјир. Бурадан алырыг ки, (30) аиләси (28) системинин һәллидир. Бу көстәрир ки, $z=\varphi(x, y)$ интеграл сәтһи бир параметрдән асылы олан (30) характеристик әјриләр аиләси илә өртүлмүшдүр.

Тәрсинә, тутаг ки, $z=\varphi(x, y)$ һамар сәтһи характеристик әјриләрдән дүзәлдилмишдир. Бу сәтһ үзәриндә ихтијари (x, y, z) нөгтәси көтүрәк. Онда (23) тәнлијинин бу нөгтәдән кечән вә $z=\varphi(x, y)$ сәтһи үзәриндә јерләшән характеристик әјриси вардыр. Ајдындыр ки, (x, y, z) нөгтәсиндә бу характеристик әјријә чәкилән (27) тохунан дүз хәтти, (25) шәртинә әсасән, (26) мүстәвиләр дәстәси үзәриндә јерләшир. Дикәр тәрәфдән, (x, y, z) нөгтәсиндә $z=\varphi(x, y)$ сәтһинә чәкилән тохунан мүстәви (24) тәнлији илә тә'јин олундуғундан, бу мүстәви (26) мүстәвиләр дәстәсинә дахилдир. Онда һәллин һәндәси изаһына көрә, $z=\varphi(x, y)$ сәтһи (23) тәнлијинин интеграл сәтһи олур. Теорем исбат олунду.

Гејд едәк ки, P, Q, R функсијалары үзәринә гојулан шәртләрдән алыныр ки, һәр бир $(x, y, z)\in G_3$ нөгтәсиндән (23) тәнлијинин јеканә характеристик әјриси кечир. Она көрә дә һәр һансы характеристик әјринин мүәјјән интеграл сәтһ илә ортаг нөгтәси варса, о тамамилә һәмин сәтһ үзәриндә јерләшир.

Инди исә интеграл сәтһин бир параметрдән асылы характеристик әјриләр аиләсинин көмәјилә гурулмасы мәсәләсинә бахаг.

Тутаг ки, $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$ функсијалары (28) характеристик системинин G_3 областында кәсилмәз диференсиалланан вә функсионал асылы олмајан интеграллардыр. Онда G_3 областында

$$\begin{cases} P(x, y, z)\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x}+Q(x, y, z)\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y}+R(x, y, z)\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z}=0, \\ P(x, y, z)\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}+Q(x, y, z)\dfrac{\partial\psi_2}{\partial y}+R(x, y, z)\dfrac{\partial\psi_2}{\partial z}=0 \end{cases} \qquad (32)$$

еjниликләри өдәнир вә

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial z} \end{pmatrix}$$

матрисинин рангы икијә бәрабәрдир.

Һәр бир $(x, y, z)\in G_3$ нөгтәси үчүн (32) бәрабәрликләринә P, Q, R функсијаларына нәзәрән чәбри тәнликләр системи кими бахыб һәлл етсәк,

$$\frac{P(x, y, z)}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial z} \end{vmatrix}}=\frac{Q(x, y, z)}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial z} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} \end{vmatrix}}=\frac{R(x, y, z)}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial y} \end{vmatrix}} \qquad (33)$$

мүнасибәтләрини аларыг.

Мә'лумдур ки, c_1, c_2 сабитләринин мүмкүн гијмәтләриндә

$$\psi_1(x, y, z)=c_1, \quad \psi_2(x, y, z)=c_2 \qquad (34)$$

бәрабәрликләринин һәр бири бир сәтһ тәсвир едир вә бу сәтһләрин кәсишмә хәтти (23) тәнлијинин характеристик әјриси олур.

Ајдындыр ки, c_1, c_2 сабитләри мүәјјән

$$\Phi(c_1, c_2)=0 \qquad (35)$$

гануну үзрә дәјишдикдә, (34) мүнасибәтләри бир параметрдән асылы әјриләр аиләси тәшкил едир. Көстәрәк ки, $\Phi(u_1, u_2)$ ихтијари кәсилмәз диференсиалланан вә $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right|+\left|\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right|>0$ шәртини өдәјән функсија олдугда

$$\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z))=0 \qquad (36)$$

бәрабәрлијиндән тә'јин олунан сәтһ, (23) тәнлијинин интеграл сәтһи олур. Бунун үчүн (36) бәрабәрлијиндә z-ә x, y дәјишәнләринин функсијасы кими бахыб, x вә y-ә нәзәрән төрәмәләрини тапаг:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right]+\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right]=0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right]+\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0.$$

һәр бир $(x, y, z) \in G_3$ нөгтәси үчүн бу бәрабәрликләрә $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}$ мәчһулларына нәзәрән чәбри тәнликләр системи кими бахаг. Шәртә көрә $\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}$ төрәмәләринин һәр икиси бирдән сыфр олмадығындан,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

вә ја

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \end{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial z} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \end{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} & \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{37}$$

олмалыдыр. Бурада (33) бәрабәрликләрини нәзәрә алсаг, (23) тәнлијини аларыг. Бу да көстәрир ки, (36) бәрабәрлијиндән тә'јин олунан сәтһ (23) тәнлијинин интеграл сәтһи олур.

б) *Үмуми Коши мәсәләси.* Тутаг ки, графики G_3 областында јерләшән l һамар әјриси верилмишдир вә

$$x = \varphi(s),\ y = \psi(s),\ z = h(s),\ s \in (\alpha, \beta) \tag{38}$$

бу әјринин параметрик шәкилдә тәнлијидир; бурада $|\varphi'(s)| + |\psi'(s)| > 0$ вә l әјрисинин xOy мүстәвиси үзәриндәки пројексијасы l_0 өз-өзүнү кәсмир. Јухарыда гејд олундуғу кими (23) тәнлијинин l әјрисиндән кечән вә l_0 пројексијасынын мүәјјән әтрафында тә'јин олунан һәллинин тапылмасы мәсәләсинә үмуми Коши мәсәләси дејилир.

Теорем 5. *Тутаг ки, P, Q, R функсијалары вә (38) әјриси јухарыда гојулан шәртләри өдәјир. Онда 1)* $\triangle(s) \equiv P(\varphi(s), \psi(s), h(s))\psi'(s) - Q(\varphi(s), \psi(s), h(s))\varphi'(s) \neq 0$, $s \in (\alpha, \beta)$ *олдугда үмуми Коши мәсәләсинин јеканә һәлли вар; 2)* $\triangle(s) = 0$, $s \in (\alpha, \beta)$ *вә* l *характеристик әјри олдугда үмуми Коши мәсәләсинин сонсуз сајда һәлли вар; 3)* $\triangle(s) = 0$, $s \in (\alpha, \beta)$ *вә* l *характеристик әјри олмадыгда исә үмуми Коши мәсәләсинин һәлли јохдур.*

Исбаты. Параметр дахил етмәклә (28) характеристик системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} = R(x, y, z) \end{cases} \tag{39}$$

шәклиндә јазмаг олар.

Теоремин шәртләри дахилиндә һәр бир $s \in (\alpha, \beta)$ үчүн (39) системинин

$$x(t_0) = \varphi(s),\ y(t_0) = \psi(s),\ z(t_0) = h(s) \tag{40}$$

башланғыч шәртләрини өдәјән вә t_0 нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунан јеканә һәлли вар. Бу һәлли

$$x = \Phi(t, s),\ y = \Psi(t, s),\ z = H(t, s) \tag{41}$$

илә ишарә едәк. Һәллин параметрләрдән вә башланғыч шәртләрдән асылылығы һаггында теоремләрә әсасән (41) функсијалары $D_\delta = \{|t - t_0| < \delta;\ \alpha < s < \beta\}$ $(\delta > 0)$ областында тә'јин олунублар, кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Бундан башга, (41) функсијаларынын (39) системинин һәлли олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$\frac{D(\Phi, \Psi)}{D(t, s)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial t} & \frac{\partial \Phi}{\partial s} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} & \frac{\partial \Psi}{\partial s} \end{vmatrix} = P(\Phi, \Psi, H)\frac{\partial \Psi}{\partial s} - Q(\Phi, \Psi, H)\frac{\partial \Phi}{\partial s}$$

јакобианы $t = t_0$ олдугда $\Delta(s)$-ә бәрабәр олур. Она көрә $\Delta(s) \neq 0$, $s \in (\alpha, \beta)$ олдугда $0 < \delta_1 < \delta$ шәртини өдәјән елә δ_1 әдәди вар ки, $D_{\delta_1} = \{|t - t_0| < \delta_1,\ \alpha < s < \beta\}$ областында $\frac{D(\Phi, \Psi)}{D(t, s)} \neq 0$ олур. Бурадан алырыг ки, (41) бәрабәрликләриндән биринчи икиси t, s дәјишәнләринә нәзәрән һәлл олунандыр:

$$t = T(x, y),\ s = S(x, y). \tag{42}$$

Бу функсијалар l_0 пројексијасынын мүәјјән әтрафында тә'јин олунуб вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Она көрә

$$z = H(T(x, y), S(x, y)) \equiv F(x, y) \tag{43}$$

функсијасы да l_0-ын әтрафында тә'јин олунуб вә бу әтрафда кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Дикәр тәрәфдән

$$\frac{\partial z}{\partial t} = R \quad \text{вә} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = F_x\frac{\partial x}{\partial t} + F_y\frac{\partial y}{\partial t} = PF_x + QF_y$$

олдуғундан, алырыг ки, $z = F(x, y)$ функсијасы (23) тәнлијинин һәллидир.

Ајдындыр ки, (41) мүнасибәтләриндә $t = t_0$ јазсаг $z(t_0) = F(\varphi(s), \psi(s)) = h(s)$, $s \in (\alpha, \beta)$ олар. Бурадан алырыг ки, l әјриси $z = F(x, y)$ сәтһи үзәриндә јерләшир. Демәли, $z = F(x, y)$ функсијасы үмуми Коши мәсәләсинин һәлли олур. Дикәр тәрәфдән, $\Delta(s) \neq 0$, $s \in (\alpha, \beta)$ олдуғундан, l әјриси (23) тәнлијинин характеристик әјриси ола билмәз.

Дөрдүнчү теоремә әсасән, һәр бир интеграл сәтһ характеристик әјриләрлә өртүлдүјүндән l әјрисиндән кечән

вә l_0-ын әтрафында тә'јин олунан һәр бир интеграл сәтһинә, бу әјридән кечән характеристик әјриләрин һәндәси јери кими бахмаг олар. Бурадан да үмуми Коши мәсәләсинин һәллинин јеканәлији алыныр (һәр бир нөгтәдән кечән характеристик әјри јеканәдир).

Тутаг ки, l әјриси бојунча $\Delta(s)=0$. Бу һалда (23) тәнлијинин l әјрисиндән кечән һамар $z=g(x,y)$ интеграл сәтһи варса, l әјриси бу тәнлик үчүн характеристик әјри олур. Доғрудан да, $\Delta(s)=0$, $s\in(\alpha,\beta)$ шәртиндән алыныр ки,

$$\varphi'(s)=\kappa(s)P(\varphi(s),\psi(s),h(s)),$$
$$\psi'(s)=\kappa(s)Q(\varphi(s),\psi(s),h(s)),\ s\in(\alpha,\beta), \qquad (44)$$

бурада $\kappa(s)$ мүтәнасиблик әмсалыдыр.

Шәртә көрә $z=g(x,y)$ сәтһи l әјрисиндән кечдијиндән,

$$h(s)=g(\varphi(s),\psi(s)),\ s\in(\alpha,\beta)$$

олмалыдыр. Бурадан, (44) бәрабәрликләринә әсасән

$$h'(s)=g_x\varphi'(s)+g_y\psi'(s)=\kappa(s)P(\varphi(s),\psi(s),h(s))g_x+$$
$$+\kappa(s)Q(\varphi(s),\psi(s),h(s))g_y$$

бәрабәрлији алыныр. Фәрзијјәмизә әсасән $z=g(x,y)$ функсијасы (23) тәнлијинин һәлли олдуғундан, ахырынчы бәрабәрликдән

$$h'(s)=\kappa(s)R(\varphi(s),\psi(s),h(s)).$$

Бу бәрабәрлијә вә (44) бәрабәрликләринә әсасән алырыг ки, l әјриси бојунча

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

мүнасибәтләри өдәнир. Бу исә көстәрир ки, l әјриси (23) тәнлијинин характеристик әјрисидир.

Инди l әјриси үзәриндә һәр һансы $(\varphi(s_0),\psi(s_0),h(s_0))$, $s_0\in(\alpha,\beta)$ нөгтәси көтүрәк вә бу нөгтәдән l_1 әјриси кечирәк. Тутаг ки,

$$x=\varphi_1(\tau),\ y=\psi_1(\tau),\ z=h_1(\tau),\ \tau\in(\tau_1,\tau_2)$$

һәмин әјринин параметрик шәкилдә тәнлијидир вә

$$\Delta_1(\tau)=P(\varphi_1(\tau),\psi_1(\tau),h_1(\tau))\psi_1'(\tau)-Q(\varphi_1(\tau),\psi_1(\tau),$$
$$h_1(\tau))\varphi_1'(\tau)\neq 0,\ \tau\in(\tau_1,\tau_2).$$

Онда теоремин исбат олунмуш һиссәсинә әсасән, (23) тәнлијинин l_1 әјрисиндән кечән јеканә интеграл сәтһи вар. Гурмаја әсасән, бу интеграл сәтһ илә l характеристик әјрисинин бир ортаг нөгтәси вар. Она көрә дә l әјриси һәмин сәтһин үзәриндә јерләшир. Лакин l характеристик әјрисиндән кечән вә $\Delta_1(\tau)\neq 0$, $\tau\in(\tau_1,\tau_2)$ шәртини өдәјән сонсуз сајда l_1 әјриләри гурмаг мүмкүн олдуғундан алырыг ки, l характеристик әјрисиндән кечән сонсуз сајда интеграл сәтһи вар.

Беләликлә, $\Delta(s)=0$, $s\in(\alpha,\beta)$ олдугда l әјрисиндән кечән вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан $z=g(x,y)$ функсијасынын (23) тәнлијинин интеграл сәтһи олмасындан алыныр ки, l әјриси бу тәнлијин характеристик әјрисидир. Она көрә дә $\Delta(s)=0$, $s\in(\alpha,\beta)$ вә l характеристик әјри олмадыгда үмуми Коши мәсәләсинин кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан һәлли јохдур. Теорем исбат олунду.

Теореми исбат едәркән апарылан мүһакимәләр көстәрир ки, үмуми Коши мәсәләсини һәлл етмәк үчүн ашағыдакы әмәлијјатлары апармаг лазымдыр:

1) верилмиш тәнлијин характеристик системинин функсионал асылы олмајан вә диференсиалланан $\psi_1(x,y,z)$, $\psi_2(x,y,z)$ интегралларыны тапырыг;

2) $\psi_1(x,y,z)=c_1$, $\psi_2(x,y,z)=c_2$ бәрабәрликләриндә $x=\varphi(s)$, $y=\psi(s)$, $z=h(s)$ јазараг s параметрини јох едирик. Онда c_1, c_2 сабитләри арасында мүәјјән $\Phi(c_1,c_2)=0$ асылылығы алыныр;

3) бу асылылыгда c_1, c_2 әвәзинә, ујғун олараг, тапылмыш $\psi_1(x,y,z)$, $\psi_2(x,y,z)$ интегралларыны јазырыг. Алынан

$$\Phi(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z))=0$$

тәнлијиндән тә'јин олунан $z=F(x,y)$ функсијасы үмуми Коши мәсәләсинин һәлли олур.

Мисал 8. $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial z}{\partial y}=2z$ тәнлијинин $l:\{x=s,\ y=s-2,\ z=1-2s,\ -\infty<s<+\infty\}$ әјрисиндән кечән интеграл сәтһини тапаг.

Бурада $\Delta(s)=2$ олдуғундан, теоремә әсасән, бахылан үмуми Коши мәсәләсинин јеканә һәлли вар. Бу тәнлијин характеристик системини гураг:

$$\frac{dx}{x-z}=\frac{dy}{y-z}=\frac{dz}{2z}.$$

Бурадан

$$\frac{dx-dy}{x-y}=\frac{dz}{2z},\quad \frac{dx+dy+2dz}{x+y+2z}=\frac{dx-dy}{x-y}$$

системини аларыг вә

$$\frac{(x-y)^2}{z}=c_1,\quad \frac{x+y+2z}{x-y}=c_2$$

һәмин системин үмуми интегралыдыр. Онда, истәнилән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан вә ејнилик кими сабит олмајан $\Phi(u_1,u_2)$ функсијасы үчүн $\Phi\left(\frac{(x-y)^2}{z},\ \frac{x+y+2z}{x-y}\right)=0$ бахылан хүсуси төрәмәли тәнлијин гејри-ашкар шәкилдә үмуми һәллидир.

Тә'јин олунмуш интегралларда l әјрисинин тәнлијинин нәзәрә алсаг,

$$\frac{4}{1-2s}=c_1, \quad -s=c_2$$

мүнасибәтләри алыныр. Бурадан s параметрини јох етсәк, c_1, c_2 сабитләри арасында $c_1+2c_1c_2-4=0$ мүнасибәтини аларыг. Демәли, үмуми Коши мәсәләсинин һәлли

$$4z-(x-y)(3x+y+4z)=0$$

мүнасибәти илә тә'јин олунур.

Мисал 9. $(1+x^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=z(1+x^2)$ тәнлијинин

$$l:\{x=s,\ y=\sqrt{1+s^2},\ z=e^s,\ -\infty<s<+\infty\}$$

әјрисиндән кечән интеграл сәтһини тапаг. Бу мәсәлә үчүн $\Delta(s)=0$, $-\infty<s<+\infty$ вә l әјриси верилән тәнлијин характеристик әјрисидир. Јә'ни $x=s$, $y=\sqrt{1+s^2}$, $z=e^s$ функсијалары

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{xy}=\frac{dz}{z(1+x^2)}$$

характеристик системинин һәллидир.

Асанлыгла јохламаг олар ки, $\psi_1(x,y,z)=\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$, $\psi_2(x,y,z)=ze^{-x}$ функсијалары характеристик системин фундаментал интегралларыдыр. Онда бахылан тәнлијин үмуми һәлли

$$\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}},\ ze^{-x}\right)=0$$

олар. Бурада $\Phi(u_1,u_2)$ ихтијари диференсиалланан функсијадыр.

Ајдындыр ки, $f(1)=1$ шәртини өдәјән истәнилән диференсиалланан $f(u)$ функсијасы үчүн

$$z=e^x f\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

үмуми Коши мәсәләсинин һәллидир. Демәли, бахылан мәсәләнин сонсуз сајда һәлли вар.

§ 4. ЧОХ СӘРБӘСТ ДӘЈИШӘН ҺАЛЫ ҮЧҮН КВАЗИХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР

а) *Үмуми мә'лумат.* Тутаг ки,

$$\sum_{i=1}^{n}P_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_i}=R(x_1,x_2,\ldots,x_n,z) \qquad (45)$$

тәнлији верилмишдир. Бурада $P_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)$, $R(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)$, $i=1,2,\ldots,n\ (n>2)$ функсијалары $x_1,x_2,\ldots,x_n,z$ дәјишәнләринин $n+1$ өлчүлү фәзасынын мүәјјән G_{n+1} областында кәсилмәздирләр вә һәр бир $(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)\in G_{n+1}$ нөгтәсиндә $P_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)$, $i=1,2,\ldots,n$ әмсалларындан һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир.

Хүсуси һалда, $P_i, R, i=1,2,\ldots,n$ функсијалары z дәјишәниндән асылы олмадыгда, (45) тәнлији хәтти тәнлик олур. Демәли, (45) тәнлијини өјрәнмәклә һәм дә хәтти тәнлији өјрәнмиш олуруг.

Ики сәрбәст дәјишән һалында олдуғу кими, параметр дахил етмәклә (45) тәнлијинин характеристик системини

$$\begin{cases}\frac{dx_i}{dt}=P_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,z),\ i=1,2,\ldots,n,\\ \frac{dz}{dt}=R(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)\end{cases} \qquad (46)$$

шәклиндә јаза биләрик.

Ајдындыр ки, (46) системи автоном системдир. Она көрә, бу системин һәлләри $x_1,x_2,\ldots,x_n,z$ дәјишәнләринин фәзасында n параметрли әјриләр аиләси тәшкил едир. Бу әјриләр аиләсинә (45) тәнлијинин характеристик әјриләр аиләси дејилир.

Ики сәрбәст дәјишән һалында олдуғу кими, исбат етмәк олар ки, $P_i, R, i=1,2,\ldots,n$ функсијаларынын G_{n+1} областында кәсилмәз хүсуси төрәмәләри варса, (45) тәнлијинин һәр бир $z=\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ интеграл сәтһи $n-1$ параметрдән асылы характеристик әјриләр аиләси илә өртүлмүшдүр вә тәрсинә, $n-1$ параметрдән асылы характеристик әјриләр аиләсинин әмәлә кәтирдији һәр бир һамар $z=\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ сәтһи (45) тәнлијинин интеграл сәтһи олур. Һәр һансы характеристик әјринин мүәјјән бир интеграл сәтһ илә ортаг нөгтәси варса, о тамамилә һәмин сәтһ үзәриндә јерләшир.

б) *Квазихәтти тәнлијин хәтти бирчинс тәнликлә әлагәси.* Квазихәтти (45) тәнлијинә ујғун

$$\sum_{i=1}^{n}P_i(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)\frac{\partial u}{\partial x_i}+R(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad (47)$$

хәтти бирчинс тәнлијинә бахаг. Бу тәнликләрин һәлләри арасында әлагә ашағыдакы ики теоремлә верилир.

Теорем 6. *Тутаг ки, $u=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)$ функсијасы (47) хәтти бирчинс тәнлијинин G_{n+1} областында һәллидир вә мүәјјән G_n областында тә'јин олунан $\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функсијасы үчүн ашағыдакы шәртләр өдәнир: а) $\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функсијасынын G_n областында кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар; б) ихтијари $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in G_n$ үчүн*

$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in G_{n+1}$; *в)* $\varphi_z(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ *төрәмәси* G_n *областынын һеч бир алт областында еjнилик кими сыфыра чеврилмир; г)* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ *функсиjасы* G_n *областында сабитдир.*

Онда $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *функсиjасы* G_n *областында квазихәтти (45) тәнлиjинин һәллидир.*

Исбаты. $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ функсиjасы (47) тәнлиjинин һәлли олдуғундан, $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \in G_{n+1}$ үчүн

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\,\varphi_{x_i} + R(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)\,\varphi_z = 0. \qquad (48)$$

г) шәртинә әсасән $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G_n$ үчүн

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = c \quad (c = \text{const}).$$

Бурадан x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ дәjишәнинә нәзәрән төрәмә алаг:

$$\varphi_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi) + \varphi_z(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\,\psi_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (49)$$

Онда (48) еjнилиjиндә $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ көтүрүб, (49) бәрабәрликләрини нәзәрә алсаг,

$$\varphi_z(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\left\{\sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\,\psi_{x_i} - R(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\right\} = 0$$

еjнилиjини аларыг. Бурадан в) шәртинә әсасән алырыг ки, $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсиjасы G_n областында (45) тәнлиjини өдәjир. Теорем исбат олунду.

Бу теоремә әсасән (47) тәнлиjинин $\varphi_z \neq 0$ шәртини өдәjән һәр бир $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ һәлли үчүн

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = c \qquad (50)$$

бәрабәрлиjинин тә'jин етдиjи $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсиjасы (45) квазихәтти тәнлиjинин һәлли олур.

Теорем 7. *Тутаг ки,*

$$\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z),\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, z), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) \qquad (51)$$

функсиjалары G_{n+1} *областында (47) хәтти бирчинс тәнлиjинин фундаментал интеграллар системидир вә* $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *функсиjасы* G_n *областында квазихәтти (45) тәнлиjинин һәллидир; белә ки,* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G_n$ *үчүн* $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in G_{n+1}$. *Онда (47) хәтти бирчинс тәнлиjинин* G_{n+1} *областынын һеч бир алт областында еjнилик кими сабит олмаjан елә* $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ *һәлли вар ки,* G_n *областында*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0$$

еjнилиjи өдәнир.

Исбаты. (51) фундаментал интеграллар системи вә $z = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ һәллинин көмәjи илә G_n областында тә'jин олунан

$$\Psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (52)$$

функсиjаларыны дүзәлдәк. Бурадан

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (53)$$

Дикәр тәрәфдән G_n областында

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + R(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\frac{\partial \psi_i}{\partial z} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - R(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi) = 0$$

еjниликләри өдәнир. Ахырынчы еjнилиjи $\frac{\partial \psi_i}{\partial z}$-ә вуруб, әввәлки еjниликләрлә тәрәф-тәрәфә топлаjаг. Онда (53) бәрабәрликләринә әсасән

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

еjниликләрини аларыг. Демәли, (52) функсиjалары G_n областында

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$$

хәтти бирчинс тәнлиjинин интеграллары олур. Бу тәнлиjин асылы олмаjан интегралларынын саjы $n-1$ олдуғундан, (52) функсиjалары G_n областында функсионал асылыдыр. Она көрә дә n өлчүлү фәзада кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан вә һеч бир алт областда еjнилик кими сабит олмаjан елә $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ функсиjасы вар ки, G_n областында

$$F(\Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \Psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0 \qquad (54)$$

еjнилиjи өдәнир.

Аjдындыр ки, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = F(\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z), \ldots, \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, z))$ функсиjасы G_{n+1} областында (47) хәтти бирчинс тәнлиjинин һәлли олур вә (51) функсиjалары (теорем 1) функсионал асылы олмадығындан, бу һәлл G_{n+1} об-

ластынын һеч бир алт областында ејнилик кими сыфыр олмур. Һәм дә (52) вә (54) мүнасибәтләринә әсасән G_n областында

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0$$

ејнилији өдәнир. Теорем исбат олунду.

Демәли, исбат олунан теоремин шәртләри дахилиндә (45) квазихәтти тәнлијинин һәр бир һәллини (47) бирчинс тәнлијинин һәллиндән алмаг олар. Лакин теоремин шәртләри өдәнмәдикдә (45) квазихәтти тәнлијинин (47) хәтти бирчинс тәнлијинин һәллиндән алынмајан һәлли дә ола биләр.

Мисал 10. $z = y - x^2$ функсијасы

$$\frac{\partial z}{\partial x} + (1 - \sqrt{z - y + x^2})\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - 2x \qquad (55)$$

тәнлијинин һәллидир, лакин бу һәлли

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (1 - \sqrt{z - y + x})\frac{\partial u}{\partial y} + (1 - 2x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad (56)$$

хәтти бирчинс тәнлијинин һәллиндән алмаг олмаз. Буну көстәрмәк үчүн (56) тәнлијинин

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1 - \sqrt{z - y + x^2}} = \frac{dz}{1 - 2x}$$

характеристик системинин $z \geqslant y - x^2$ шәртини өдәјән (x, y, z) нөгтәләр чохлуғунда асылы олмајан $\psi_1(x, y, z) = 2\sqrt{z - y + x^2} - x$, $\psi_2(x, y, z) = z + x^2 - x$ интегралларыны тапырыг. Бу функсијалар $z > y - x^2$ шәртини өдәјән (x, y, z) нөгтәләр чохлуғунда (56) тәнлијинин фундаментал интеграллар системини тәшкил едир. Бу нөгтәләр чохлуғуну G_3 илә ишарә едәк. Онда G_3 областында (56) тәнлијинин үмуми һәлли

$$u = \Phi\left(2\sqrt{z - y + x^2} - x,\ z + x^2 - x\right) \qquad (57)$$

шәклиндә олар; бурада $\Phi(u_1, u_2)$ ихтијари кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан функсијадыр. 7-чи теоремин исбатында олдуғу кими $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$ интеграллары вә $z = y - x^2$ һәлли васитәсилә дүзәлдилмиш

$$\Psi_1(x, y) = -x, \quad \Psi_2(x, y) = y - x$$

функсијалары функсионал асылы дејилләр (буна сәбәб $z = y - x^2$ һәлли үчүн $(x, y, y - x^2)$ нөгтәләринин G_3 областынын сәрһәддиндә јерләшмәсидир).

Тутаг ки, һеч бир алт областда ејнилик кими сабит олмајан елә $\Phi_1(u_1, u_2)$ функсијасы вар ки,

$$\Phi_1\left(2\sqrt{z - y + x^2} - x,\ z + x^2 - x\right) = 0$$

бәрабәрлијиндән $z = y - x^2$ һәллини алмаг олар. Бурада $z = y - x^2$ јазсаг, $\Phi_1(-x, y - x) = 0$ олар. Бу исә $\Psi_1 = -x$,

$\Psi_2 = y - x$ функсијаларынын функсионал асылы олмамасына зиддир. Демәли, (55) тәнлијинин $z = y - x^2$ һәлли, (56) тәнлијинин (57) үмуми һәллиндән алынмыр.

в) *Коши мәсәләси.* Тутаг ки,

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z)\frac{\partial z}{\partial x_i} = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z) \qquad (58)$$

шәклиндә квазихәтти тәнлик верилмишдир; бурада $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z)$, $f(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ функсијалары $t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z$ дәјишәнләринин G_{m+2} областында кәсилмәздир.

Ајдындыр ки, $z = x_{m+1}$, $f(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) = f_{m+1}(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$ гәбул едиб, (58) тәнлијинә уjғун хәтти бирчинс тәнлији

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m+1} f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \qquad (59)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Мә'лумдур ки, (58) тәнлијинин

$$\Psi(t_0, x_1, x_2, \ldots, x_m) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

шәртини өдәјән $z = \Psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ һәллинин тапылмасы мәсәләсинә Коши мәсәләси дејилир; бурада t_0 верилмиш әдәд, $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ исә верилмиш функсијадыр. Коши мәсәләсинин һәллинин варлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 8. *Тутаг ки, 1) $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$ функсијалары $G_{m+2} = \{|t - t_0| < a; -\infty < x_i < +\infty, i = 1, 2, \ldots, m+1\}$ областында кәсилмәздир, кәсилмәз $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m+1$ хүсуси төрәмәләри вар вә $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leqslant A$, $i, j = 1, 2, \ldots, m+1$ $(A = const > 0)$ шәрти өдәнир; 2) $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функсијасынын $G_m = \{-\infty < x_i < +\infty, i = 1, 2, \ldots, m\}$ областында кәсилмәз $g_{x_i}(x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ төрәмәләри вар вә $|g_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_m)| \leqslant c$. Онда (58) тәнлијинин $\Psi(t_0, x_1, \ldots, x_m) = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ башланғыч шәртини өдәјән вә $G_{m+1} = \{|t - t_0| < h; -\infty < x_i < +\infty, i = 1, 2, \ldots, m\}$ областында тә'јин олунан јеканә $z = \Psi(t, x_1, \ldots, x_m)$ һәлли вар; бурада $h = \min\{a, \alpha\}$, $\alpha = \frac{1}{(m+1)A}\ln\left(1 + \frac{m+1}{m(c+1)}\right)$.*

Исбаты. Теоремин шәртләри дахилиндә һәр бир $\tau \in (t_0 - a, t_0 + a)$ вә истәнилән $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+1}$ үчүн

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}),\ i = 1, 2, \ldots, m+1 \qquad (60)$$

системинин $x_i(\tau) = \xi_i,\ i = 1, 2, \ldots, m+1$ шәртләрини өдәјән јеканә

$$x_i = \varphi_i(t, \tau, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+1}),\ i = 1, 2, \ldots, m+1 \qquad (61)$$

һәлли вар. Һәллин башланғыч шәртләрдән асылылығы теоремләринә әсасән, бу һәлл, $G_{m+2} = \{|t - t_0| < a; |\tau - t_0| < a; -\infty < \xi_i < +\infty,\ i = 1, 2, \ldots, m+1\}$ областында өз аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәздир, кәсилмәз $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m+1$ төрәмәләри вә гарышыг $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial \tau}$, $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t \partial \xi_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m+1$ төрәмәләри вар.

Гејд олунмуш $\tau, \xi^1, \xi_2, \ldots, \xi_{m+1}$ үчүн

$$\varphi_{ij}(t) = \frac{\partial \varphi_i(t, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_{m+1})}{\partial \xi_j} \text{ вә } f_{ij}(t) = \frac{\partial f_i(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m+1})}{\partial x_j},$$

$i, j = 1, 2, \ldots, m+1$ ишарә едәк. Онда $\varphi_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \ldots, m+1$ функсијалары

$$\Phi_{ij} = \sum_{k=1}^{m+1} f_{ik}(t) \Phi_{kj} \qquad (62)$$

вариасијаларла системинин

$$\Phi_{ij}(\tau) = \delta_{ij},\ \delta_{ii} = 1,\ \delta_{ij} = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, m+1$$

башланғыч шәртләрини өдәјән һәлли олар.

Бурадан еквивалент интеграл тәнликләрә кечәк:

$$\varphi_{ij}(t) = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^{m+1} \int_\tau^t f_{ik}(s) \varphi_{kj}(s)\, ds,\ i, j = 1, 2, \ldots, m+1. \qquad (63)$$

Шәртә көрә $|f_{ij}(t)| \leqslant A$ олдуғундан, ахырынчы мүнасибәтдән

$$\sum_{i=1}^{m+1} |\varphi_{ij}(t)| \leqslant 1 + (m+1) A \left| \int_\tau^t \sum_{i=1}^{m+1} |\varphi_{ij}(s)|\, ds \right|,\ j = 1, 2, \ldots, m+1$$

бәрабәрсизлији алынар. Бу бәрабәрсизлијә Гронуолл леммасыны тәтбиг етсәк,

$$\sum_{i=1}^{m+1} |\varphi_{ij}(t)| \leqslant \exp[(m+1) A |t - \tau|],\ j = 1, 2, \ldots, m+1. \qquad (64)$$

Бу бәрабәрсизликләрә әсасән, (63) бәрабәрсизликләриндән

$$|\varphi_{ij}(t) - \delta_{ij}| \leqslant A \left| \int_\tau^t \sum_{k=1}^{m+1} |\varphi_{kj}^{(s)}|\, ds \right| \leqslant \frac{1}{m+1} \left\{ \exp\left[(m+1) A |t - \tau| \right] - 1 \right\},$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, m+2$$

бәрабәрсизликләрини аларыг.

Тутаг ки, $|t - \tau| < h$. Онда h әдәдинин тә'јининә әсасән $|\varphi_{ij}(t) - \delta_{ij}| < \frac{1}{m(c+1)}$, $|t - \tau| < h$, $i, j = 1, 2, \ldots, m+1$. Бурадан алыныр ки, $|t - \tau| < h$ олдугда

$$\varphi_{ii}(t) > 1 - \frac{1}{m(c+1)},\ i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$|\varphi_{ij}(t)| < \frac{1}{m(c+1)},\ i \neq j \qquad 5)$$

бәрабәрсизликләри өдәнир.

Икинчи параграфда олдуғу кими,

$$\psi_i(t, x_1, \ldots, x_m, z), = \varphi_i(t_0, t, x_1, \ldots, x_m, z),\ i = 1, 2, \ldots$$
$$\psi(t, x_1, \ldots, x_m, z) = \varphi_{m+1}(t_0, t, x_1, \ldots, x_m, z)$$

ишарә едәк. Онда

$$\psi_i(t_0, x_1, x_2, \ldots, x_m, z) = x_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$\psi(t_0, x_1, x_2, \ldots, x_m, z) = z \qquad (66)$$

шәртләри өдәнәр вә $\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m, z), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m, z)$, $\psi(t, x_1, \ldots, x_m, z)$ функсијалары $G'_{m+2} = \{|t - t_0| < h; -\infty < x_i < +\infty,\ i = 1, 2, \ldots, m, -\infty < z < +\infty\}$ областында (59) тәнлијинин фундаментал интеграллар системини тәшкил едәр.

Ајдындыр ки, $F(t, x_1, \ldots, x_m, z) \equiv \psi(t, x_1, \ldots, x_m, z) - g(\psi_1(t, x_1, \ldots, x_m, z), \ldots, \psi_m(t, x_1, \ldots, x_m, z))$ функсијасы G'_{m+2} областында (59) тәнлијинин һәллидир. Бурада (65) шәртләрини вә $|g_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_m)| \leqslant c,\ i = 1, 2, \ldots, m$ шәртини нәзәрә алсаг, G'_{m+2} областында

$$F_z(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z) = \psi_z - \sum_{i=1}^m g_{x_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \geqslant \psi_z -$$
$$- \sum_{i=1}^m |g_{x_i}| \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right| > 1 - \frac{1}{m(c+1)} - cm \frac{1}{m(c+1)} = \frac{m-1}{m(c+1)} \geqslant 0$$

бәрабәрсизлијинин өдәндијини аларыг. Онда гејри-ашкар функсијанын варлығы һаггында теоремә әсасән

$$\psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z) - g(\psi_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z), \ldots,$$
$$\psi_m(t, x_1, x_2, \ldots, x_m, z)) = 0 \qquad (67)$$

тәнлији, G_{m+1} областында тә'јин олунан јеканә

$$z = \Psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (68)$$

функсијасы тә'јин едир вә бу функсија (58) тәнлијинин һәлли олур. Дикәр тәрәфдән, (67) бәрабәрлијиндә $t = t_0$ көтүрсәк, (66) шәртләринә әсасән

$$z - g(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$$

олдуғуну аларығ, јә'ни (68) функсијасы

$$\Psi(t_0, x_1, x_2, \dots, x_m) = g(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

шәртини өдәјир.

Беләликлә, (68) функсијасы гојулмуш Коши мәсәләсинин һәлли олур. Көстәрәк ки, бу һәлл јеканәдир. 1-чи теоремә әсасән (59) тәнлијинин G'_{m+2} областында үмуми һәлли $u = \Phi(\psi_1, \dots, \psi_m, \psi)$ олдуғундан, (58) тәнлијинин үмуми һәлли гејри-ашкар функсија кими

$$\Phi(\psi_1, \dots, \psi_m, \psi) = 0$$

бәрабәрлијиндән тә'јин олунур. 7-чи теоремә әсасән исә Коши мәсәләсинин һәлли, бурадан $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1})$ функсијасыны сечмәклә алыныр. Тутаг ки, Коши мәсәләсинин һәлли $\Phi_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m, \psi) = 0$ бәрабәрлијиндән тә'јин олунур. Онда $t = t_0$ олдугда

$$\Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_m, z) = z - g(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

олмалыдыр. Бурадан ајдындыр ки, $\Phi_1(u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1})$ функсијасы биргијмәтли тә'јин олунур вә демәли, Коши мәсәләсинин һәлли јеканәдир.

Мисал 11. $\frac{\partial z}{\partial t} + (x+e^t)\frac{\partial z}{\partial x} = 2tz$ тәнлијинин $\Psi(0, x) = g(x)$ шәртини өдәјән $z = \Psi(t, x)$ һәллини тапаг. Бунун үчүн әввәлчә

$$\begin{cases}\dot{x} = x + e^t,\\ \dot{z} = 2tz\end{cases}$$

характеристик системинин $x(\tau) = \xi$, $z(\tau) = \eta$ башланғыч шәртләрини өдәјән һәллини тапаг: $x = \varphi_1(t, \tau, \xi, \eta) = e^t(t-\tau) + \xi e^{t-\tau}$, $z = \varphi_2(t, \tau, \xi, \eta) = \eta e^{t^2-\tau^2}$.

Теоремин исбатында олдуғу кими

$$\psi_1(t, x, z) = \varphi_1(0, t, x, z) = xe^{-t} - t,$$

$$\psi_2(t, x, z) = \varphi_2(0, t, x, z) = ze^{-t^2}$$

ишарә едәк вә

$$\psi(t, x, z) - g(\psi_1(t, x, z)) = ze^{-t^2} - g(xe^{-t} - t)$$

функсијасыны дүзәлдәк. Онда

$$ze^{-t^2} - g(xe^{-t} - t) = 0$$

бәрабәрлијиндән тапылан

$$z = e^{t^2} g(xe^{-t} - t)$$

функсијасы гојулмуш Коши мәсәләсинин јеканә һәлли олур.

Теоремин шәртләри өдәнмәдикдә Коши мәсәләсинин һәлли јеканә олмаја да биләр. Буна (55) тәнлијинин $\Psi(0, y) = y$ шәртини өдәјән $z = \Psi(x, y)$ һәллинин тапылмасы мәсәләси мисал ола биләр. Ајдындыр ки, $z = y - x^2$ функсијасы бу шәрти өдәјән һәллдир. Лакин бу мәсәләнин (57) үмуми һәллиндән алынан башга һәлли дә вар. Һәмин һәлли тапмаг үчүн (55) тәнлијинин $\psi_1(x, y, z) = 2\sqrt{z - y + x^2} - x$, $\psi_2(x, y, z) = z + x^2 - x$ интегралларынын көмәјилә $x_0 = 0$ олдугда (66) шәртини өдәјән интегралларыны тапаг. Бунун үчүн

$$\begin{cases}\psi_1(0, y, z) = 2\sqrt{z-y} = \gamma_1,\\ \psi_2(0, y, z) = z = \gamma_2\end{cases}$$

системини y, z-ә нәзәрән һәлл едәк: $y = \gamma_2 - \frac{\gamma_1^2}{4}$, $z = \gamma_2$. Онда $\bar{\psi}_1(x, y, z) = y - x - \frac{x^2}{4} + x\sqrt{z - y + x^2}$, $\bar{\psi}_2(x, y, z) = z + x^2 - x$ интеграллары (66) шәртини өдәјәр вә теоремә әсасән Коши мәсәләсинин һәлли

$$z + x^2 - x - \left[y - x - \frac{x^2}{4} + x\sqrt{z - y + x^2}\right] = 0$$

тәнлијиндән тә'јин олунмалыдыр. Бу тәнлији $\left(\sqrt{z - y + x^2} - \frac{x}{2}\right)^2 = 0$ шәклиндә јазараг z-ә нәзәрән һәлл етсәк, алынан $z = y - \frac{3}{4}x^2$ функсијасы да бахылан тәнлијин $x = 0$ олдугда $z = y$ шәртини өдәјән һәлли олар.

§ 5. ПФАФФ ТӘНЛИЈИ

Тутаг ки, x, y, z дәјишәнләри фәзасынын мүәјјән областында тә'јин олунмуш $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функсијалары верилмишдир вә областын һәр бир нөгтәсиндә бу функсијалардан һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир. Һәр бир $(x, y, z) \in G$ нөгтәсинә $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ векторуну гаршы гојаг. Белә векторлар чохлуғу G областында векторлар саһәси әмәлә кәтирир.

G областында јерләшән вә ихтијари нөгтәсиндә тохунанынын истигамәти саһәнин һәмин нөгтәдәки истигамәти илә ејни олан хәтләрә саһәнин *вектор хәтләри* дејилир.

Бир чох физики мәсәләләрин һәлли саһәнин вектор хәтләринә ортогонал олан сәтһләр аиләсинин тапылмасына кәтирилир. Ихтијари һамар сәтһин (x, y, z) нөгтәсиндә чәкилән тохунаны (dx, dy, dz) вектору илә мүәјјән олундуғундан, векторлар саһәсинә ортогонал олан сәтһләр үчүн

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0 \tag{69}$$

мүнасибәти өдәнмәлидир.

Беләликлә, саһәнин вектор хәтләринә ортогонал олан сәтһләр аиләсинин тапылмасы мәсәләси (69) тәнлијинин интеграл сәтһләринин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир. Бу тәнлијә *Пфафф тәнлији* дејилир. Пфафф тәнлијинин интеграл сәтһләринин варлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 9. *Тутаг ки, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функсијаларынын G областында кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар вә областын һәр бир нөгтәсиндә һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир. Онда (69) тәнлијинин интеграл сәтһинин варлығы үчүн G областында*

$$P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x) = 0 \tag{70}$$

ејнилијинин өдәнмәси зәрури вә кафидир.

Бу ејнилик өдәндикдә һәр бир $(x_0, y_0, z_0) \in G$ нөгтәсиндән (69) тәнлијинин јеканә интеграл сәтһи кечир.

Зәрурилијин исбаты. Тутаг ки, (69) тәнлијинин $(x_0, y_0, z_0) \in G$ нөгтәсиндән кечән интеграл сәтһи вар. Үмумилији позмадан $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ гәбул едиб, (x_0, y_0, z_0) нөгтәсинин мүәјјән U әтрафында (69) тәнлијини

$$dz = A(x, y, z)\,dx + B(x, y, z)\,dy \tag{71}$$

шәклиндә јазаг; бурада

$$A(x, y, z) = -\frac{P(x, y, z)}{R(x, y, z)}, \quad B(x, y, z) = -\frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)}. \tag{72}$$

Гејд едәк ки, $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ гәбул етдијимиздән, $(x_0, y_0, z$ нөгтәсиндән кечән интеграл сәтһ, (x_0, y_0) нөгтәсинин јахын әтрафында $z = z(x, y)$ шәклиндә верилә биләр. Дикәр тәрәфдән, ики дәјишәнли функсијанын там диференсиалы

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

дүстуру илә верилдијиндән вә dx, dy диференсиаллары асылы олмадығындан, бу сәтһ үчүн

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = A(x, y, z), \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = B(x, y, z) \end{cases} \tag{73}$$

ејниликләри өдәнир.

Гејд едәк ки, (73) мүнасибәтләринин һәр биринә z-ә нәзәрән хүсуси төрәмәли тәнлик, икисинә бирликдә исә тәнликләр системи кими бахмаг олар. Әкәр (73) тәнликләринин һәр бирини өдәјән $z = \psi(x, y)$ сәтһи варса, бу системә *ујушан систем*, сәтһә исә онун *интеграл сәтһи* дејилир.

Демәли, (69) тәнлијинин һәр бир $z = z(x, y)$ интеграл сәтһи һәм дә (73) системинин интеграл сәтһидир.

Теоремин шәртинә көрә U әтрафында $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ функсијаларынын кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Она көрә дә, (73) ејнилијиндән x, y-ә нәзәрән төрәмә алсаг,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = A_y(x, y, z) + A_z(x, y, z)\,B(x, y, z), \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B_x(x, y, z) + B_z(x, y, z)\,A(x, y, z) \end{cases}$$

ејниликләрини аларыг. Бурадан ајдындыр ки, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ гарышыг төрәмәләри U-да кәсилмәздир. Онда Шварс теореминә әсасән аларыг ки,

$$A_y + A_z B = B_x + B_z A \tag{74}$$

шәрти өдәнир. Бурада (72) ифадәләрини нәзәрә алсаг, (70) шәртини өдәндијини аларыг.

Кафилијин исбаты. Тутаг ки, (70) шәрти өдәнир вә верилмиш $(x_0, y_0, z_0) \in G$ нөгтәсиндә $R(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Көстәрәк ки, бу заман (69) тәнлијинин (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндән кечән јеканә $z = z(x, y)$ интеграл сәтһи вар.

Зәрурилијин исбатындакы мүһакимәләрдән ајдындыр ки, (73) системинин (x_0, y_0, z_0) нөгтәсиндән кечән интеграл сәтһи һәм дә (69) тәнлијинин интеграл сәтһидир. Она көрә дә (73) системинин ујушан олдуғуну көстәрмәк кифајәтдир.

Бунун үчүн (73) системинин биринчи тәнлијиндә y-и параметр һесаб едәрәк

$$\frac{dz}{dx} = A(x, y, z) \tag{75}$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$z(x_0) = h(y) \tag{76}$$

шәртини өдәјән һәллинә бахаг; бурада $h(y)$ һәләлик намә'лум һамар функсијадыр. Теоремин шәртләри дахилиндә (75), (76) мәсәләсинин (x_0, y_0) нөгтәсинин јахын әтрафында јеканә

$$z = \varphi(x, y, x_0, h(y)) \tag{77}$$

һәлли вар.

Һәллин параметрләрә нәзәрән дифференсиалланмасы һаггында теоремә әсасән (VI фәсил, § 3), $z = \varphi(x, y, x_0, u)$ функсијасынын бүтүн аргументләрә нәзәрән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Бундан башга $\varphi(x, y, x_0, u)$ функсијасынын y параметринә нәзәрән $\varphi_y(x, y, x_0, h(y))$ төрәмәси

$$\frac{d}{dx}(\varphi_y) = A_z(x, y, \varphi(x, y, x_0, h(y)))\varphi_y + A_y(x, y, \varphi(x,y,x_0,h(y))) \quad (78)$$

вариасиjаларла тәнлиjинин

$$\varphi_y|_{x=x_0} = 0 \quad (79)$$

шәртини өдәjән һәлли, u аргументинә нәзәрән $\varphi_u(x, y, x_0, h(y))$ төрәмәси исә

$$\frac{d}{dx}(\varphi_u) = A_z(x,y,\varphi(x,y,x_0,h(y)))\varphi_u \quad (80)$$

вариасиjаларла тәнлиjинин

$$\varphi_u|_{x=x_0}=1 \quad (81)$$

шәртини өдәjән һәллидир (VI фәсил, § 3).

Теоремин шәртләринә әсасән, (78), (79) вә (80), (81) хәтти мәсәләләринин jеканә һәлләри вар. Бурадан алыныр ки, кәсилмәз $\varphi_{yx}(x, y, x_0, h(y))$, $\varphi_{ux}(x,y,x_0,h(y))$ төрәмәләри вар вә $\varphi_u(x,y,x_0,h(y)) \neq 0$.

Дикәр тәрәфдән, (76) шәртиндән аjдындыр ки,

$$\varphi(x_0, y, x_0, h(y)) = h(y). \quad (82)$$

Бурадан y-ә нәзәрән төрәмә алсаг,

$$\varphi_y(x_0,y,x_0,h(y)) + \varphi_u(x_0,y,x_0,h,(y))h'(y) = h'(y) \quad (83)$$

олар. Инди $h(y)$ функсиjасыны елә сечәк ки, (77) функсиjасы (73) тәнликләриндән икинчисини дә өдәсин. Бунун үчүн (77) функсиjасыны (73) системинин икинчи тәнлиjиндә jазаг. Онда $h(y)$-ә нәзәрән

$$\varphi_y(x,y,x_0,h(y)) + \varphi_u(x,y,x_0,h(y))h'(y) = B(x, y, \varphi(x,y,x_0,h(y)),$$

тәнлиjи алынар вә $\varphi_u(x,y,x_0,h(y)) \neq 0$ олдуғундан, ону

$$h'(y) = \frac{B(x,y,\varphi(x,y,x_0,h(y))) - \varphi_y(x,y,x_0,h(y))}{\varphi_u(x,y,x_0,h(y))} \quad (84)$$

шәклиндә jазмаг олар. Бу тәнлиjин сол тәрәфи анчаг y-дән асылы олдуғундан, сағ тәрәфи дә анчаг y-дән асылы олмалыдыр. Әкс һалда (84) тәнлиjиндән $h(y)$ функсиjасыны тә'jин етмәк олмаз.

Көстәрәк ки, (70) шәрти өдәндикдә (84) тәнлиjинин сағ тәрәфиндәки

$$H(x,y) = \frac{B(x,y,\varphi(x,y,x_0,h(y))) - \varphi_y(x,y,x_0,h(y))}{\varphi_u(x,y,x_0,h(y))}$$

функсиjасы x-дән асылы деjил. Аjдындыр ки, бу функсиjанын x-ә нәзәрән төрәмәси вар вә

$$H_x = \frac{1}{\varphi_u^2}[(B_x + B_z\varphi_x - \varphi_{yx})\varphi_u - (B-\varphi_y)\varphi_{ux}].$$

Бурада φ, φ_y вә φ_u функсиjаларынын уjғун олараг (75), (78) вә (80) тәнликләринин һәлләри олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$H_x = \frac{1}{\varphi_u}[B_x + B_zA - A_y - A_zB]$$

олар. Одур ки, (74) шәртинә әсасән $H_x \equiv 0$. Демәли, (84) тәнлиjинин сағ тәрәфи x-дән асылы деjил. Она көрә дә (84) тәнлиjинин сағ тәрәфиндә x әвәзинә x_0 көтүрә биләрик. Онда (79), (81), (82) шәртләринә әсасән

$$\varphi_y(x_0,y,\varphi(x_0,y,h(y))) = 0,\quad \varphi_u(x_0,y,\varphi(x_0,y,h(y)))=1,$$

$$B(x_0,y,\varphi(x_0,y,h(y))) = B(x_0,y,h(y))$$

олдуғундан, (84) тәнлиjи

$$h' = B(x_0,y,h) \quad (85)$$

шәклинә дүшәр. Бу тәнлиjин $h(y_0)=z_0$ шәртини өдәjән jеканә $h=\psi(y,y_0,z_0)$ һәлли вар. Ону (77) дүстурунда jазсаг, алынан

$$z = \varphi(x,y,x_0,\psi(y,y_0,z_0))$$

сәтһи (69) тәнлиjинин (x_0,y_0,z_0) нөгтәсиндән кечән интеграл сәтһи олур. Интеграл сәтһинин jеканәлиjи онун гурулма гаjдасындан аjдындыр. Теорем исбат олунду.

Теорем көстәрир ки, (70) шәрти өдәнмәдикдә (69) тәнлиjинин интеграл сәтһләри jохдур. Jухарыда бахылан физики мәсәлә илә әлагәдар олараг бу о демәкдир ки, (70) шәрти өдәнмәдикдә, саһәнин векторлар хәттинә ортогонал олан һамар сәтһләр jохдур. Лакин бу заман саһәнин векторлар хәттинә ортогонал олан әjриләр ола биләр. Бу хәтләрә Пфафф тәнлиjинин *интеграл әjриләри* деjилир.

Пфафф тәнлиjинин интеграл әjриләрини ашағыдакы гаjда илә тапмаг олар. Еjнилик кими сабит олмаjан вә кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олан $\Phi(x,y,z)$ функсиjасы көтүрүб

$$\Phi(x,y,z)=0 \quad (86)$$

мүнасибәтини jазаг. Аjдындыр ки, (86) тәнлиjи бир һамар сәтһ тә'jин едир. Бу сәтһ үзәриндә (x_0,y_0,z_0) нөгтәси көтүрүб, нөгтәнин jахын әтрафында (86) мүнасибәтиндән x, y, z дәjишәнләриндән бирини о бириләри васитәсилә ифадә етмәк олар. Хүсуси һалда, сәтһин тәнлиjи

$$z = \varphi(x,y) \quad (87)$$

шәклиндә олан һала бахаг. (87) әвәзләмәсини Пфафф тәнлиjиндә нәзәрә алсаг,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (88)$$

тәнлиjи алынар; бурада

$$M(x,y) = P(x,y,\varphi(x,y)) + R(x,y,\varphi(x,y))\varphi_x(x,y),$$

$$N(x,y)=Q(x,y,\varphi(x,y))+R(x,y,\varphi(x,y))\varphi_y'(x,y).$$

Тутаг ки, $y=\omega(x,c)$ аиләси (88) тәнлијинин үмуми һәллидир. Онда

$$y=\omega(x,c),$$
$$z=\varphi(x,\omega(x,c))$$

әјриләр аиләси Пфафф тәнлијинин интеграл әјриләри олур.

Мисал 12. $(y+3z^2)dx+(x+y)dy+6xzdz=0$ тәнлијиндә (70) шәрти өдәндијиндән, бу тәнлијин интеграл сәтһини тапмаг үчүн

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y+3z^2}{6xz},\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x+y}{6xz}\end{cases}$$

системинин интеграл сәтһини тапаг.

Системин биринчи тәнлијиндә y-ә параметр кими бахсаг, алынан

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{y+3z^2}{6xz}$$

тәнлијинин үмуми һәлли

$$xy+3xz^2=h(y)$$

олар. Бурада $h(y)$ функсијасыны елә сечәк ки, системин икинчи тәнлији дә өдәнсин. Онда $h'(y)=-y$ тәнлији алыныр вә онун һәлли $h(y)=-\frac{y^2}{2}+c$ олур. Демәли, бахылан тәнлијин интеграл сәтһләри $y^2+2xy+6x^2z=c$ олар.

Мисал 13. $ydx+(z-y)dy+xdz=0$ тәнлијини өдәјән вә $2x-y-z=1$ мүстәвиси үзәриндә јерләшән әјриләри тапаг.

Асанлыгла јохламаг олар ки, бахылан тәнлик үчүн (70) шәрти өдәнмир. Одур ки, тәнлијин анҹаг интеграл әјриләри вар вә бу әјриләри тапмаг үчүн x, y, z дәјишәнләри арасында бир мүнасибәт верилмәлидир. Бу мүнасибәт, интеграл әјриләринин $2x-y-z=1$ мүстәвиси үзәриндә јерләшмәси шәртидир. Бурадан алынан $z=2x-y-1$ ифадәсини тәнликдә јазсаг

$$(2x+y)dx+(x-2y-1)dy=0$$

тәнлијини аларыг. Бу тәнлик исә $x=\xi+\frac{1}{5}$, $y=\eta-\frac{2}{5}$ әвәзләмәси илә

$$(2\xi+\eta)d\xi+(\xi-2\eta)d\eta=0$$

бирҹинс тәнлијинә кәтирилир вә онун үмуми һәлли $\xi^2+\xi\eta-\eta^2=c$ шәклиндәдир. Бурадан да алыныр ки, бахылан тән-

лијин $2x-y-z=1$ мүстәвиси үзәриндә јерләшән интеграл әјриләри $x^2+xy-y-y^2=c$ $(c>0)$ аиләси олур.

Чалышмалар

1. Верилмиш функсијанын верилмиш тәнлији өдәдијини көстәрин:

а) $z=at+bx+cy$, $\quad t\frac{\partial z}{\partial t}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$;

б) $z=\varphi(x\cdot y)$, $\quad x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$;

в) $z=xy\,\varphi(x+y)$, $\quad xy\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$;

бурада $\varphi(u)$ кәсилмәз төрәмәси олан ихтијари функсијадыр.

2. Ашағыдакы тәнликләрин үмуми һәлләрини тапын:

а) $\frac{\partial z}{\partial t}+x\sin t\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, *Ҹаваб*: $z=\Phi\left(xe^{\cos t}, ye^{-t}\right)$;

б) $\frac{\partial z}{\partial t}+(x+t)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, *Ҹаваб*: $z=\Phi((1+t+x)e^{-t}-1,\ ye^{-t})$;

в) $(ax^2+bxy)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(a_1x^2+2axy+\frac{3}{2}by^2\right)\frac{\partial z}{\partial y}=0$, *Ҹаваб*: $z=\Phi\left(b\frac{y^2}{x^3}+\frac{2ay}{x^2}+\frac{2a_1}{x}\right)$;

г) $(t^2+tx)\frac{\partial z}{\partial t}+x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$, *Ҹаваб*: $z=\Phi\left(xy, \ln x+\frac{x}{t}\right)$;

д) $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-y)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$, *Ҹаваб*: $\Phi(x+y-z, 2xy-z^2)=0$;

е) $t\frac{\partial z}{\partial t}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$, *Ҹаваб*: $z=t^2\Phi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$.

3. Верилмиш тәнликләрин көстәрилән башланғыҹ шәртини өдәјән һәлләрини тапын:

а) $(x^2+2xy)\frac{\partial z}{\partial x}-(x^2-2xy-3y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=0$, $z|_{x=1}=g(y)$,

Ҹаваб: $z=g\left(0{,}5\sqrt{5+4\frac{y^2}{x^3}+4\frac{y}{x^2}-\frac{4}{x}}-0{,}5\right)$;

б) $\frac{\partial z}{\partial t}+(t+y)\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$, $z|_{t=0}=x+y$,

Ҹаваб: $z=(1+t+x+y)e^{-t}-1$;

в) $\frac{\partial z}{\partial t}+\left(x+\frac{y}{t}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{x}{t}+y\right)\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ z|_{t=1}=g(x, y)$,

Чаваб: $z=g\left(\frac{x+y+t^2(x-y)}{2t}e^{1-t},\ \frac{x+y-t^2(x-y)}{2t}e^{1-t}\right)$;

г) $\frac{\partial z}{\partial t}+(x-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ z|_{t=0}=x+y$,

Чаваб: $z=(x+y)e^{-t}$;

д) $\frac{\partial z}{\partial t}+2t\frac{\partial z}{\partial x}=z,\ z|_{t=0}=g(x)$, *Чаваб*: $z=e^t g(x-t^2)$;

е) $\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial z}{\partial x}=x,\ z|_{t=0}=g(x)$, *Чаваб*: $z\cos t-x\sin t-g(x\cos t+z\sin t)=0$.

4. Верилмиш тәнликләрин көстәрилән әјриләрдән кечән интеграл сәтһләрини тапмалы:

а) $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=1+z^2,\ x=-s,\ y=2s+1,\ z=\operatorname{tg}s,\ -\frac{\pi}{2}<s<\frac{\pi}{2}$,

Чаваб: $z=\operatorname{tg}(3x+2y-2)$;

б) $\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-z,\ x=s,\ y=e^s,\ z=e^{-s},\ -\infty<s<+\infty$,

Чаваб: $z=e^{-x}f(ye^{-x})$; бурада $f(u)$ функсијасы диференсиалланан вә $f(1)=1$ шәртини өдәјән ихтијари функсијадыр;

в) $(1+x^2)\frac{\partial z}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=1+z^2,\ x=s,\ y=-s,\ z=-s^3$, $-\infty<s<+\infty$,

Чаваб: $z=\frac{x+y+2x^2y}{x^2+xy+2}$;

г) $z\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial z}{\partial y}=z^2+(x+y)^2,\ x=s,\ y=s-1,\ z=s+1$, $-\infty<s<+\infty$.

Чаваб: $z=\{e^{x-y-1}\left[\frac{5}{4}(x+y+1)^2-x-y+1\right]-(x+y)^2\}^{1/2}$

д) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1+z^2,\ x=s,\ y=s+1,\ z=\operatorname{tg}s,\ -\frac{\pi}{2}<s<\frac{\pi}{2}$;

Чаваб: $z=\operatorname{tg}(x+f(x-y+1))$; бурада $f(u)$ функсијасы диференсиалланан вә $f(0)=0$ шәртини өдәјән ихтијари функсијадыр.

5. $(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz=0$ Пфафф тәнлијинин интеграл сәтһләр аиләсини тапмалы.

Чаваб: $xy+xz+yz=c$.

6. $dx-zdy+xdz=0$ Пфафф тәнлијинин $x=y^2z$ сәтһи үзәриндә јерләшән интеграл әјриләр аиләсини тапмалы.

Чаваб: $y^2ze^{z+\frac{1}{y}}=c$.

XI ФӘСИЛ

МЕЈЛ ЕДӘН АРГУМЕНТЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Әввәлки фәсилләрдә верилмиш садә мисаллар көстәрир ки бир чох физики мәсәләләрин һәлли ади диференсиал тәнликләрә кәтирилир. Белә мәсәләләрдә просесин дәјишмә сүр'әти системин анчаг бахылан андакы вәзијјәтиндән асылы олур. Она көрә алынан диференсиал тәнликләрә ахтарылан функсија вә онун төрәмәләри аргументин ејни гијмәтләриндә дахил олур. Лакин бә'зи физики системләрин даһа дәриндән өјрәнилмәси көстәрир ки, просесин дәјишмә сүр'әти системин тәкчә һәмин андакы вәзијјәтиндән дејил, һәм дә онун кечмиш вә һәтта кәләчәк вәзијјәтләриндән дә асылы ола биләр. Бу чүр просесләри тәсвир едән диференсиал тәнликләрә ахтарылан функсијанын өзү вә төрәмәләри аргументин мүхтәлиф гијмәтләриндә дахил олур. Белә тәнликләрә мејл едән аргументли диференсиал тәнликләр дејилир.

Сон заманлар автоматик идарәетмә нәзәријјәсинә, ракет техникасына, биофизикаја вә с. саһәләрә кениш тәтбигләри илә әлагәдар олараг мејл едән аргументли диференсиал тәнликләрин өјрәнилмәсинә даһа чох диггәт верилир.

Бу фәсилдә мејл едән аргументли диференсиал тәнликләр нәзәријјәсинин үмуми анлајышлары верилир вә белә тәнликләрин бә'зи һәлл үсуллары өјрәнилир.

§ 1. ҮМУМИ АНЛАЈЫШЛАР

а) *Мејл едән аргументли тәнликләр*. Ахтарылан функсијанын өзү вә төрәмәләри аргументин мүхтәлиф гијмәтләриндә дахил олан

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(m_0)}(t), x(h_1(t)), \dot{x}(h_1(t)), \dots, x^{(m_1)}(h_1(t)), \dots, x(h_n(t)), \dot{x}(h_n(t)), \dots, x^{(m_n)}(h_n(t)))=0 \tag{1}$$

тәнлијинә *мејл едән аргументли диференсиал тәнлик* дејилир; бурада t сәрбәст дәјишән, $x(t)$ ахтарылан функсија, $h_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$ верилмиш функсијалар, $x^{(j)}(h_i(t))$ исә $x(t)$ функсијасынын j-чу тәртиб төрәмәсинин $z=h_i(t)$ нөгтәсиндәки гијмәтидир.

Чох заман $h_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$ функсијалары $h_i(t)=t-\tau_i(t)$ шәклиндә көтүрүлүр. Бу һалда (1) тәнлији

$$F(t, x(t), \dot x(t), \dots, x^{(m_0)}(t), x(t-\tau_1(t)), \dot x(t-\tau_1(t)), \dots, x^{(m_1)}(t-\tau_1(t)), \dots, x(t-\tau_n(t)), \dot x(t-\tau_n(t)), \dots, x^{(m_n)}(t-\tau_n(t)))=0 \qquad (2)$$

шәклинә дүшүр. Бурада $\tau_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$ функсијаларына *аргументин мејли*, $\tau_i(t)\geqslant 0$ олдугда исә *аргументин кечикмәси дејилир.* Хүсуси һалда, $\tau_i(t)$ сабит олдугда (2) тәнлијинә бә'зән *диференсиал-фәрг тәнлик дејилир.*

Бу фәсилдә $\tau_i(t)\geqslant 0$, $i=1, 2, \dots, n$ олдуғу фәрз олунур вә

$$x^{(m_0)}(t)=f(t, x(t), \dot x(t), \dots, x^{(m_0-1)}(t), x(t-\tau_1(t)), \dot x(t-\tau_1(t)), \dots, x^{(m_1)}(t-\tau_1(t)), \dots, x(t-\tau_n(t)), \dots, x^{(m_n)}(t-\tau_n(t))) \qquad (3)$$

шәклиндә тәнликләр өјрәнилир.

б) *Башланғыч мәсәләнин гојулушу.* Тутаг ки, бир сабит кечикмәси олан

$$\dot x(t)=f(t, x(t), x(t-\tau)),\quad \tau>0 \qquad (4)$$

мејл едән аргументли диференсиал тәнлији верилмишдир; бурада $f(t, x_1, x_2)$ функсијасы t, x_1, x_2 дәјишәнләри фәзасынын мүәјјән G областында тә'јин олунмуш функсијадыр.

Мүәјјән (t_0, T) интервалында диференсиалланан $\varphi(t)$ функсијасы үчүн

1) $(t, \varphi(t), \varphi(t-\tau))\in G$, $\quad t\in(t_0, T)$

2) $\dot\varphi(t)=f(t, \varphi(t), \varphi(t-\tau))$, $\quad t\in(t_0, T)$

шәртләри өдәнәрсә, $x=\varphi(t)$ функсијасына (4) тәнлијинин һәмин интервалда *һәлли* дејилир.

Ајдындыр ки, t аргументи (t_0, T) $(t_0+\tau<T)$ интервалында дәјишдикдә, $t-\tau$ аргументи $(t_0-\tau, T-\tau)$ интервалында дәјишәр. Она көрә дә (4) тәнлијинин (t_0, T) интервалында һәлли олан $x=\varphi(t)$ функсијасы һәм дә $(t_0-\tau, t_0]$ јарыминтервалында тә'јин олунмалыдыр. Демәли, (4) тәнлијинин (t_0, T)

интервалында мүәјјән һәллини тапмаг үчүн $(t_0-\tau, t_0]$ јарыминтервалында әлавә шәрт верилмәлидир.

$(t_0-\tau, t_0]$ јарыминтервалында верилмиш $\varphi_0(t)$ функсијасына бәрабәр олан вә (t_0, T) интервалында (4) тәнлијини өдәјән функсијанын тапылмасы мәсәләсинә *башланғыч мәсәлә*, t_0 нөгтәсинә *башланғыч нөгтә*, $(t_0-\tau, t_0]$ јарыминтервалы на *башланғыч чохлуг*, $\varphi_0(t)$ функсијасы на исә *башланғыч функсија* дејилир

Чох вахт (4) тәнлијинин һәллини $[t_0, T)$ јарыминтервалында тапмаг лазым кәлир. Бу һалда t аргументи $[t_0, t_0+T]$, $(t_0+\tau<T)$ парчасында дәјишдикдә, $t-\tau$ аргументи $[t_0-\tau, t_0]$ парчасында дәјишир. Она көрә (4) тәнлијинин $[t_0, T)$ јарыминтервалында һәллини тапмаг үчүн башланғыч чохлуг олараг $E_{t_0}=[t_0-\tau, t_0]$ парчасы, башланғыч функсија олараг бу парчада тә'јин олунан мүәјјән $\varphi_0(t)$ функсијасы көтүрүлүр.

Инди (3) тәнлији үчүн башланғыч мәсәлә гојаг. Бу мәгсәдлә $t\in(t_0, T)$ олдугда $t-\tau_i(t)$ функсијасынын t_0-дан кичик гијмәтләр чохлуғуну E_i илә ишарә едәк, јәни

$$E_i=\{z : z=t-\tau_i(t)<t_0,\ t_0<t<T\},\quad i=1, 2, \dots, n.$$

Бу чохлуглардан дүзәлдилмиш $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ чохлуғуна *башланғыч чохлуг*, һәмин чохлугда тә'јин олунан вә $p=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{m_i\}$ тәртибдән төрәмәси олан $\varphi_0(t)$ функсијасына *башланғыч функсија* дејилир.

Әлавә олараг, тутаг ки, t_0 нөгтәсиндә

$$x(t_0)=x_0,\ \dot x(t_0)=x_1, \dots, x^{(m_0-1)}(t_0)=x_{m_0-1} \qquad (5)$$

башланғыч шәртләри верилмишдир.

Башланғыч чохлугда $\varphi_0(t)$ функсијасына бәрабәр олан, t_0 нөгтәсиндә (5) шәртләрини вә (t_0, T) интервалында (3) тәнлијини өдәјән функсијанын тапылмасы мәсәләсинә *башланғыч мәсәлә* дејилир

Хүсуси һалда $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ чохлуғу бош олдугда, (3) тәнлији үчүн башланғыч мәсәлә, бу тәнлијин (5) шәртләрини өдәјән һәллини тапмагдан ибарәтдир.

Гејд едәк ки, (3) тәнлијинин $[t_0, T)$ јарыминтервалында һәллини тапмаг үчүн, адәтән, башланғыч чохлуг олараг t_0 илә $\bigcap\limits_{i=1}^{n} E_i$ чохлуғунун бирләшмәсиндән ибарәт олан E_{t_0} чохлуғу, башланғыч функсија олараг E_{t_0} чохлуғунда p тәртибдән төрәмәси олан $\varphi_0(t)$ функсијасы вә $x_0=\varphi_0(t_0)$, $x_1=\dot\varphi_0(t_0), \dots, x_p=\varphi_0^{(p)}(t_0)$ көтүрүлүр.

Бә'зи практики мәсәләләри һәлл едәркән алынан мејл едән аргументли диференсиал тәнликләрдә кечикмә һәм дә ахта-

рылан функсиjа вә онун төрәмәләриндән асылы олур. Белә тәнликләр үчүн башланғыч чохлуг тә'јин етмәк даһа мүрәккәбдир. Она көрә дә белә тәнликләри арашдыраркән чох заман *башланғыч чохлуг* олараг, $(-\infty, t_0]$ јарымоху көтүрүлүр, башланғыч мәсәлә исә јухарыдакы гајда илә гојулур.

в) *Мејл едән аргументли тәнликләрин тәснифаты.* Јухарыда (3) тәнлији үчүн гојулмуш башланғыч мәсәләнин һәллинин варлығы вә хассәләри m_0 вә $p=\max\limits_{1\leqslant l\leqslant n}\{m_l\}$ әдәдләри арасында мүмкүн олан 1) $m_0>p$, 2) $m_0=p$, 3) $m_0<p$ мүнасибәтләринин һансынын өдәнмәсиндән асылы олур. Бунунла әлагәдар олараг (3) тәнлији үч синфә бөлүнүр: 1) $m_0>p$ олдугда (3) тәнлијинә ***кечикән аргументли,*** 2) $m_0=p$ олдугда *нејтрал тип,* 3) $m_0<p$ олдугда исә ***габаглајан аргументли*** диференсиал тәнлик дејилир.

Бу синифләрин һәр биринә дахил олан тәнликләрин һәлләринин варлығы вә хассәләри ejни характерли олурлар.

Тә'рифә әсасән

$$\dot x(t)=x(t-1)$$

тәнлији кечикән аргументли,

$$\dot x(t)=x(t)-\dot x(t-1)$$

тәнлији нејтрал тип,

$$\dot x(t)=\ddot x(t-1)+x(t)$$

тәнлији исә габаглајан аргументли диференсиал тәнликдир.

Гејд едәк ки, тәтбиги мәсәләләрдә ән чох кечикән аргументли диференсиал тәнликләрә тәсадүф олунур вә белә тәнликләр даһа кениш өјрәнилмишдир.

§ 2. АДДЫМ ҮСУЛУ

а) *Бир сабит кечикмәси олан кечикән аргументли тәнликләр.* Тутаг ки,

$$\dot x(t)=f(t,x(t),\ x(t-\tau)),\quad t\geqslant t_0 \tag{4}$$

тәнлијинин

$$x(t)=\varphi_0(t),\quad t\in E_{t_0} \tag{6}$$

шәртини өдәјән һәллини тапмаг тәләб олунур; бурада $\tau>0$ сабит кечикмәдир, $\varphi_0(t)$ функсијасы E_{t_0} парчасында, $f(t,x_1,x_2)$ функсијасы исә $G=\{t\geqslant t_0,\ -\infty<x_i<+\infty,\ i=1,2\}$ чохлуғунда кәсилмәздир.

Әввәлчә (4), (6) мәсәләсинин $I_1=[t_0,\ t_0+\tau]$ парчасында һәллинә бахаг. Ајдындыр ки, $t_0\leqslant t\leqslant t_0+\tau$ олдугда $t_0-\tau\leqslant$

$\leqslant t-\tau\leqslant t_0$. Она көрә $t\in I_1$ үчүн $x(t-\tau)=\varphi_0(t-\tau)$ олур вә бахылан мәсәлә

$$\dot x=f(t,x,\varphi_0(t-\tau)) \tag{7}$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0)=\varphi_0(t_0) \tag{8}$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир. Бурада $g_0(t,x)=f(t,x,\varphi_0(t-\tau))$ функсијасы $G_0=\{t_0\leqslant t\leqslant t+\tau;\ -\infty<x<+\infty\}$ золағында кәсилмәз олдуғундан, һәллин варлығы һаггында Пеано теореминә әсасән, (7), (8) мәсәләсинин мүәјјән $[t_0,\ t_0+\alpha]$, $(0<\alpha\leqslant\tau)$ парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир һәлли вар.

Тутаг ки, $\alpha<\tau$ олдугда һәлл I_1 парчасына давам етдириләндир. Давамәтдирилән һәлли $\varphi_1(t)$ илә ишарә едәк вә (4), (6) мәсәләсинин $I_2=[t_0+\tau,\ t_0+2\tau]$ парчасында һәллини тапаг. Бу парчада $x(t-\tau)=\varphi_1(t-\tau)$ олдуғундан, бахылан мәсәлә

$$\dot x=f(t,x,\varphi_1(t-\tau)) \tag{9}$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0+\tau)=\varphi_1(t_0+\tau) \tag{10}$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир. Бурада $g_1(t,x)=f(t,x,\varphi_1(t-\tau))$ функсијасы $G_1=\{t_0+\tau\leqslant t\leqslant t_0+2\tau;\ -\infty<x<+\infty\}$ золағында кәсилмәз олдуғундан, (9), (10) мәсәләсинин һәлли вар. Тутаг ки, (9), (10) мәсәләсинин $\varphi_2(t)$ һәлли I_2-дә тә'јин олунмушдур. Онда $I_3=[t_0+2\tau,\ t_0+3\tau]$ парчасында $x(t-\tau)=\varphi_2(t-\tau)$ олар вә бу парчада бахылан мәсәләнин һәлли

$$\dot x=f(t,x,\varphi_2(t-\tau)) \tag{11}$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0+2\tau)=\varphi_2(t_0+2\tau) \tag{12}$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтириләр.

Просеси бу гајда илә ардычыл давам етдирмәклә гурулан

$$x=\begin{cases}\varphi_0(t), & t\in E_{t_0},\\ \varphi_1(t), & t\in I_1,\\ \varphi_2(t), & t\in I_2,\\ \dots\dots\dots\end{cases} \tag{13}$$

функсијасы (4), (6) мәсәләсинин һәлли олур.

Башланғыч мәсәләнин һәллинин көстәрилән гајда илә тапылмасы үсулуна, ***аддым үсулу*** вә ја ***ардычыл интеграллама үсулу*** дејилир.

Аддым үсулунун маһијјәти, һәр бир сонлу парчада мејл едән аргументли диференсиал тәнликдән ади диференсиал тәнлијә кечмәкдән ибарәтдир. Бу үсул илә гурулан һәллин һамарлығыны өјрәнмәк үчүн фәрз едәк ки, $f(t,x_1,x_2)$ функ-

260—26

сиjасынын G чохлуғунда истәнилән тәртибдән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Гојулан шәртләр дахилиндә (4), (6) мәсәләсинин јеканә һәлли вар.

Һәллин һамарлығы һаггында теоремә әсасән (бах: II фәсил, теорем 11) (7), (8) мәсәләсинин $\varphi_1(t)$ һәллинин I_1 парчасында кәсилмәз төрәмәси вар. Лакин (13) дүстуру илә тә'јин олунан функсијанын t_0 нөгтәсиндә төрәмәси олмаја биләр. Көстәрәк ки, $\varphi_0(t)$ функсијасынын E_{t_0}-да кәсилмәз төрәмәси варса, һәллин t_0 нөгтәсиндә кәсилмәз төрәмәсинин варлығы үчүн

$$\dot\varphi_0(t_0-0)=f(t_0,\ \varphi_0(t_0),\ \varphi_0(t_0-\tau)) \qquad (14)$$

шәрти өдәнмәлидир.

Доғрудан да, (13) функсијасынын t_0 нөгтәсиндә сол төрәмәси $\dot\varphi_0(t_0-0)$, сағ төрәмәси исә $\dot\varphi_1(t_0+0)=f(t_0,\varphi_0(t_0),\varphi_0(t_0-\tau))$ олур. Бу төрәмәләрин бәрабәрлијиндән (14) шәрти алыныр.

Һәллин һамарлығы һаггында теореми (9), (10) мәсәләсинин һәллинә тәтбиг едәк. Ајдындыр ки, $g_1(t,\ x)=f(t,\ x,\ \varphi_1(t-\tau))$ функсијасы G_1 золағында кәсилмәздир вә биринчи тәртиб кәсилмәз хүсуси төрәмәләри вар. Она көрә (9), (10) мәсәләсинин $\varphi_2(t)$ һәллинин I_2 парчасында икинчи тәртиб кәсилмәз төрәмәси вар. Үмумијјәтлә, $t_0+\tau$ нөгтәсиндә (13) функсијасынын икинчи тәртиб төрәмәси јохдур. Лакин $\varphi_0(t)$ функсијасынын кәсилмәз төрәмәси варса вә (14) шәрти өдәнирсә, һәллин $t_0+\tau$ нөгтәсиндә икинчи тәртиб кәсилмәз төрәмәси вар.

Ујғун мүһакимәләри (11), (12) мәсәләси үчүн апарсаг аларыг ки, (13) функсијасынын $(t_0+2\tau,\ t_0+3\tau)$ интервалында үчүнчү тәртиб кәсилмәз төрәмәси вар. Бундан башга, $t_0+2\tau$ нөгтәсиндә икинчи тәртиб төрәмә кәсилмәздир. Үмумијјәтлә, $t_0+2\tau$ нөгтәсиндә (13) функсијасынын үчүнчү тәртиб төрәмәси јохдур.

Бу мүһакимәни сонракы парчалар үчүн дә апарсаг, аларыг ки, (4), (6) мәсәләсинин һәлли интервалдан-интервала кечдикчә бир ваһид һамарлашыр.

Мисал 1. Аддым үсулуну

$$\dot x(t)=x(t-1),\ x(t)=1,\ t\in[0,1]$$

мәсәләсинин һәллинә тәтбиг етсәк, алынан

$$x=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 1+(t-1), & 1<t\leqslant 2,\\ 1+(t-1)+\dfrac{(t-2)^2}{2!}, & 2<t\leqslant 3,\\ \dots\dots\dots\dots & \end{cases}$$

функсијасы бахылан мәсәләнин һәлли олур. Тапылан һәлли

$$x=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{(t-\kappa)^{\kappa}}{\kappa!},\quad n<t\leqslant n+1$$

дүстуру илә ифадә етмәк олар.

Тәнлијин сағ тәрәфинин вә башланғыч функсијанын истәнилән тәртибдән төрәмәсинин олмасына бахмајараг, һәллин $t=1$ нөгтәсиндә биринчи тәртиб, $t=2$ нөгтәсиндә икинчи тәртиб вә с. $t=n$ нөгтәсиндә n-чи тәртиб төрәмәси јохдур.

Гејд 1. Тутаг ки, m сајда сабит $\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m$ кечикмәси олан

$$\dot x(t)=f(t,x(t),\ x(t-\tau_1),\ \dots,\ x(t-\tau_m)) \qquad (15)$$

тәнлијинин

$$x(t)=\varphi_0(t),\quad t\in E_{t_0}=[t_0-\tau_m,\ t_0] \qquad (15')$$

шәртини өдәјән һәллини тапмаг тәләб олунур; бурада $0<\tau_1<\tau_2<\dots<\tau_m$.

Әввәлчә бахылан мәсәләнин һәллини $[t_0,\ t_0+\tau_1]$ парчасында гураг. Ајдындыр ки, $t\in[t_0,\ t_0+\tau_1]$ олдугда $t-\tau_1\in E_{t_0},\dots,t-\tau_m\in E_{t_0}$. Она көрә $[t_0,t_0+\tau_1]$ парчасында $x(t-\tau_1)=\varphi_0(t-\tau_1),\dots,x(t-\tau_m)=\varphi_0(t-\tau_m)$ олур вә бахылан мәсәлә

$$\dot x=f(t,\ x,\ \varphi_0(t-\tau_1),\dots,\varphi_0(t-\tau_m))$$

ади диференсиал тәнлијинин $x(t_0)=\varphi_0(t_0)$ шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир. Алынан мәсәләнин $[t_0,\ t_0+\tau_1]$ парчасында тә'јин олунмуш һәллини $\varphi_1(t)$ илә ишарә едәк вә икинчи аддым олараг $[t_0+\tau_1,\ t_0+2\tau_1]$ парчасыны көтүрәк. Бу парчадан олан t-ләр үчүн $t-\tau_i\in[t_0+\tau_1-\tau_i,\ t_0+2\tau_1-\tau_i]$, $i=1,\ 2,\dots,m$ олдуғундан, $x(t-\tau_i)$ гијмәтләри $\varphi_0(t)$ вә $\varphi_1(t)$ функсијалары илә тә'јин олунур. Она көрә дә

$$\psi_1(t)=\begin{cases}\varphi_0(t), & t_0-\tau_m\leqslant t\leqslant t_0\\ \varphi_1(t), & t_0<t\leqslant t_0+\tau_1\end{cases}$$

ишарә етсәк, икинчи аддымда (15), (15′) мәсәләсинин һәлли

$$\dot x=f(t,\ x,\ \psi_1(t-\tau_1),\ \dots,\ \psi_1(t-\tau_m))$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0+\tau_1)=\psi_1(t_0+\tau_1)$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасына кәтирилир вә с.

Мисал 2. Аддым үсулу илә

$$\dot x(t)=2x(t-0{,}6)-x(t-1)$$

тәнлијинин

$$x(t)=1,\quad -1\leqslant t\leqslant 0$$

шәртини өдәјән һәллини тапаг.

Биринчи аддым олараг [0, 0,6] парчасыны көтүрмәк лазымдыр. Бу парчада бахылан мәсәлә

$$\dot{x} = 1, \quad x(0) = 1$$

мәсәләсинин һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Ајдындыр ки, $x = 1 + t$ функсијасы ахырынчы мәсәләнин һәллидир. Одур ки,

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ 1 + t, & 0 < t \leqslant 0,6 \end{cases}$$

ишарә етсәк, [0,6, 1,2] парчасында бахылан мәсәлә

$$\dot{x} = 2\varphi(t - 0,6) - \varphi(t - 1)$$

$$x(0,6) = 1,6$$

мәсәләсинә кәтирилир.

Бурадан

$$\dot{x} = \begin{cases} 2t - 0,2, & 0,6 < t \leqslant 1, \\ t + 0,8, & 1 < t \leqslant 1,2 \end{cases}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$x = \begin{cases} t^2 - 0,2t + 1,36, & 0,6 < t \leqslant 1, \\ 0,5t^2 + 0,8t + 0,86, & 1 < t \leqslant 1,2. \end{cases}$$

Бу гајда илә һәлли истәнилән сонлу парчаја давам етдирә биләрик.

б) *Бир дәјишән кечикмәси олан кечикән аргументли тәнликләр.* Тутаг ки,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))) \tag{16}$$

тәнлијинин

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0} \tag{17}$$

шәртини өдәјән һәллини тапмаг лазымдыр. Бурада $\tau(t) \geqslant 0$, $\varphi_0(t)$ вә $f(t, x_1, x_2)$ функсијалары ујғун олараг $[t_0, T]$, E_{t_0} вә

$$G = \{t_0 \leqslant t \leqslant T; \quad -\infty < x_i < +\infty, \quad i = 1, 2\}$$

чохлугларында кәсилмәздир.

Ашағыдакы һаллара бахаг:

I. Тутаг ки, $\inf\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \tau(t) = \Delta > 0$. Бу һалда, t аргументи $I_1 = [t_0, t_0 + \Delta]$, $(t_0 + \Delta < T)$ парчасында дәјишдикдә, $h(t) = t - \tau(t) \leqslant t_0$. Она көрә I_1 парчасында (16), (17) мәсәләсинин һәлли

$$\dot{x} = f(t, x, \varphi_0(t - \tau(t))) \tag{18}$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0) = \varphi_0(t_0) \tag{19}$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир. Гојулан шәртләр дахилиндә $g_0(t, x) = f(t, x, \varphi_0(t - \tau(t)))$ функсијасы $G_1 = \{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta; -\infty < x < +\infty\}$ золағында кәсилмәз олдуғундан, Пеано теореминә әсасән (18), (19) мәсәләсинин мүәјјән $[t_0, t_0 + \alpha]$, $(0 < \alpha \leqslant \Delta)$ парчасында тә'јин олунан һеч олмаса бир $\varphi_1(t)$ һәлли вар. Онда

$$\psi_1(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t \in E_{t_0}, \\ \varphi_1(t), & t \in (t_0, t_0 + \alpha] \end{cases}$$

функсијасы $[t_0, t_0 + \alpha]$ парчасында (16), (17) мәсәләсинин һәлли олур. Бу һәллин I_1 парчасына давам етдирилдијини фәрз едәрәк (16), (17) мәсәләсинә $I_2 = [t_0 + \Delta, t_0 + 2\Delta]$, $(t_0 + 2\Delta < T)$ парчасында бахаг. Онда мәсәлә

$$\dot{x} = f(t, x, \psi_1(t - \tau(t)))$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0 + \Delta) = \psi_1(t_0 + \Delta)$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә кәтирилир вә с.

Беләликлә, $\inf\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant T} \tau(t) = \Delta > 0$ олдугда (16), (17) мәсәләсинин һәллинә аддым үсулу тәтбиг олунур вә һәр аддымда узунлуғу Δ олан парчада һәлли тапмаг мүмкүндүр.

II. Тутаг ки, $\tau(t)$ функсијасы диференсиалланандыр вә $\dot{\tau}(t) < 1$. Бу һалда $h(t) = t - \tau(t)$ функсијасы чидди монотон артан олур. Она көрә $E_{t_0} = [t_0 - \tau(t_0), t_0]$ вә $h(t)$ функсијасының тәрси вар. $h(t)$ функсијасынын тәрсини $\gamma(t)$ илә ишарә едәк. Әввәлчә $\gamma(t_0) > t_0$ олдуғу һала бахаг. Бу һалда $t \in \mathscr{E}_{t_0} = [t_0, \gamma(t_0)]$ үчүн $h(t) \leqslant t_0$ олур вә $\mathscr{E}_{t_0}$ belə t-ләри өзүндә сахлајан ән бөјүк парчадыр. Биринчи аддымда (16), (17) мәсәләсинә $\mathscr{E}_{t_0}$ парчасында бахаг. Онда мәсәлә $\mathscr{E}_{t_0}$ парчасында (18), (19) мәсәләсинин һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Ајдындыр ки, $\gamma(t_0) = t_0$ олдугда $\mathscr{E}_{t_0}$ анчаг t_0 нөгтәсиндән ибарәт олур. Дикәр тәрәфдән, $\gamma(h(t_0)) = t_0$ вә $\gamma(t)$ монотон артан функсија олдуғундан, бурадан алырыг ки, $E_{t_0} = \{t_0\}$. Бу исә анчаг $\tau(t_0) = 0$ олдугда мүмкүндүр. Она көрә $\gamma(t_0) = t_0$ олдугда аддым үсулу тәтбиг олунмур вә бу һала *мәхсуси һал* дејилир.

Мәхсуси һал олмадыгда вә (18), (19) мәсәләсинин һәлли олан $x = \varphi_1(t)$ функсијасы $\mathscr{E}_{t_0}$ парчасында тә'јин олундугда, икинчи аддымда (16), (17) мәсәләсинә $\mathscr{E}_{\gamma(t_0)} = [\gamma(t_0), \gamma(\gamma(t_0))]$ парчасында бахылыр. Бу парчада бахылан мәсәләнин һәлли

$$\dot{x} = f(t, x, \varphi_1(t - \tau(t))), \quad x(\gamma(t_0)) = \varphi_1(\gamma(t_0))$$

мәсәләсинин һәллинә кәтирилир вә с.

Гејд 2. Бә'зән $\tau(t_0)=0$ олдугда да аддым үсулу тәтбиг олунур.

Мисал 3. $t\geq 0$ јарымохунда $\dot x(t)=x(t-\sqrt{t})$ тәнлијинә бахаг. Бурада $\tau(t)=\sqrt{t}$ олдуғундан, $t_0=0$ нөгтәси үчүн $\tau(0)=0$ олур вә јухарыдакы һаллар јарамыр. Лакин, $t\geq 0$ үчүн $h(t)=t-\sqrt{t}$ функсијасынын $t-\sqrt{t}\leq 0$ шәртини өдәјән гијмәтләри чохлуғу $E_0=\left[-\frac{1}{4},\ 0\right]$ олдуғундан, бу тәнлијә аддым үсулу тәтбиг олунур. Тәнлијин $x(t)=1$, $t\in E_0$ шәртини өдәјән һәллини ики аддым үчүн һесаблајаг. Биринчи аддымда мәсәләјә $\mathscr{E}_0=[0, 1]$ парчасында бахылыр вә бу парчада

$$\dot x=1,\quad x(0)=1$$

мәсәләси алыныр. Бурадан $x(t)=1+t$, $t\in\mathscr{E}_0$. Икинчи аддымда $t_0=1$ вә $t\geq 1$ үчүн $h'(t)=1-\frac{1}{2\sqrt{t}}<1$ олдуғундан, 2-чи һал јарајыр. Бу заман

$$\gamma(t)=\frac{2t+1+\sqrt{1+4t}}{2},\quad \mathscr{E}_1=\left[1,\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Она көрә икинчи аддымда бахылан мәсәлә $\mathscr{E}_1$ парчасында

$$\dot x=t-\sqrt{t}+1,\quad x(1)=2$$

мәсәләсинә кәтирилир. Бурадан

$$x(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+t+\frac{7}{6},\quad t\in\mathscr{E}_1.$$

в) *Нејтрал тип тәнликләр.* Бир сабит кечикмәси олан нејтрал тип

$$\dot x(t)=f(t, x(t), x(t-\tau), \dot x(t-\tau))\qquad(20)$$

тәнлијинин

$$x(t)=\varphi_0(t),\ t\in E_{t_0}\qquad(20')$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә аддым үсулуну тәтбиг едәк. Бурада $f(t, x_1, x_2, x_3)$ функсијасы $G=\{t_0\leq t<+\infty;\ -\infty<x_i<+\infty,\ i=1, 2, 3\}$ чохлуғунда кәсилмәздир, $\varphi_0(t)$ функсијасынын исә E_{t_0} чохлуғунда кәсилмәз төрәмәси вар. Бахылан мәсәлә $I_1=[t_0,\ t_0+\tau]$ парчасында

$$\dot x=f(t, x, \varphi_0(t-\tau), \dot\varphi_0(t-\tau))$$

ади диференсиал тәнлијинин

$$x(t_0)=\varphi_0(t_0)$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасына кәтирилир. Ајдындыр ки, гојулан шәртләр дахилиндә бу мәсәләнин һәлли вар. Тутаг ки, $x=\varphi_1(t)$ функсијасы һәмин мәсәләнин I_1 парчасында

тә'јин олунмуш һәллидир. Онда $I_2=[t_0+\tau,\ t_0+2\tau]$ парчасында (20), (20') мәсәләсинин һәллини тә'јин етмәк үчүн

$$\dot x=f(t, x, \varphi_1(t-\tau), \dot\varphi_1(t-\tau))$$

тәнлијинин

$$x(t_0+\tau)=\varphi_1(t_0+\tau)$$

шәртини едәјән һәллини тапмаг лазымдыр вә с.

Гојулан шәртләрдән ајдындыр ки, һәллин $(t_0-\tau,\ t_0)$, $(t_0,\ t_0+\tau)$, $(t_0+\tau,\ t_0+2\tau)$, ... интервалларында кәсилмәз төрәмәләри, t_0, $t_0+\tau$, $t_0+2\tau$, ... нөгтәләриндә исә сол вә сағ төрәмәләри вар. Лакин һәллин t_0, $t_0+\tau$, $t_0+2\tau$, ... нөгтәләриндә төрәмәси олмаја биләр.

Доғрудан да, t_0 нөгтәсиндә һәллин сол төрәмәси $\dot\varphi_0(t_0-0)$-а, сағ төрәмәси исә $\dot\varphi_1(t_0+0)=f(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0-\tau), \dot\varphi_0(t_0-\tau))$-ја бәрабәрдир. Она көрә дә анҹаг

$$\dot\varphi_0(t_0-0)=f(t_0, \varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0-\tau), \dot\varphi_0(t_0-\tau))\qquad(21)$$

шәрти өдәндикдә t_0 нөгтәсиндә һәллин төрәмәси вар.

Ајдындыр ки, $t_0+\tau$ нөгтәсиндә һәллин сол төрәмәси $f(t_0+\tau, \varphi_1(t_0+\tau), \varphi_0(t_0), \dot\varphi_0(t_0-0))$-а, сағ төрәмәси исә $f(t_0+\tau, \varphi_1(t_0+\tau), \varphi_0(t_0), \dot\varphi_1(t_0+0))$-а бәрабәрдир. Бурадан ајдындыр ки, (21) шәрти өдәндикдә

$$f(t_0+\tau, \varphi_1(t_0+\tau), \varphi_0(t_0), \dot\varphi_0(t_0-0))=$$
$$=f(t_0+\tau, \varphi_1(t_0+\tau), \varphi_0(t_0), \dot\varphi_1(t_0+0))$$

олур вә демәли, $t_0+\tau$ нөгтәсиндә һәллин кәсилмәз төрәмәси вар.

Бу гајда илә көстәрмәк олар ки, (21) шәрти өдәндикдә һәллин $t_0+2\tau$, $t_0+3\tau$, ... нөгтәләриндә кәсилмәз төрәмәси вар. Лакин, үмумијјәтлә, (20′), (21) мәсәләсинин һәлли интервалдан интервала кечдикчә, һамарлашмыр. Бу хассәсинә көрә нејтрал тип тәнликләр кечикән аргументли тәнликләрдән фәргләнирләр.

Гејд едәк ки, ујғун мүһакимәләри дәјишән кечикмәли нејтрал тип тәнликләр үчүн дә апармаг олар.

Мисал 4. Тутаг ки, $\dot x(t)=\dot x\left(\frac{t}{3}\right)+t$ тәнлијинин $x(t)=1$, $\frac{1}{3}\leq t\leq 1$ шәртини өдәјән һәллини тапмаг тәләб олунур.

Бу тәнлик үчүн $h(t)=\frac{t}{3}$ олдуғундан, $\gamma(t)=3t$. Она көрә [1, 3] парчасында бахылан мәсәлә $\dot x(t)=t$ тәнлијинин $x(1)=1$ шәртини өдәјән һәллини тапмаға кәтирилир. Бурадан $x=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}$.

Онда [3, 9] парчасында бахылан мәсәлә $\dot{x} = \frac{4t}{3}$ тәнлијинин $x(3) = 5$ шәртини өдәјән һәллини тапмаға кәтирилир. Демәли, [3, 9] парчасында $x = \frac{2t^2}{3} - 1$ вә с.

г) *Габаглајан аргументли тәнликләр.* Аддым үсулуну

$$x(t) = f(t, x(t-\tau), \dot{x}(t-\tau))$$

тәнлијинин

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0}$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә тәтбиг едәк.

Тутаг ки, $\varphi_0(t)$ функсијасынын E_{t_0} парчасында κ тәртибә гәдәр, $f(t, x_1, x_2)$ функсијасынын исә $G = \{t_0 \leqslant t < +\infty; -\infty < x_i < +\infty, i = 1, 2\}$ чохлуғунда $\kappa - 1$ тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри вар.

Биринчи аддымда, јә'ни $(t_0, t_0 + \tau]$ јарыминтервалында мәсәләнин һәлли

$$\varphi_1(t) = f(t, \varphi_0(t-\tau), \dot{\varphi}_0(t-\tau))$$

олур вә $x = \varphi_1(t)$ функсијасынын $(t_0, t_0 + \tau]$ јарыминтервалында, үмумијјәтлә, $\kappa - 1$ тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәси вар.

Икинчи аддымда, јә'ни $(t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ јарыминтервалында бахылан мәсәләнин һәлли

$$\varphi_2(t) = f(t, \varphi_1(t-\tau), \dot{\varphi}_1(t-\tau))$$

олур вә с. Ајдындыр ки, $x = \varphi_2(t)$ функсијасынын $(t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ јарыминтервалында, үмумијјәтлә, $\kappa - 2$ тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәси вар. Бу гајда илә алaрыг ки,

$$\varphi_\kappa(t) = f(t, \varphi_{\kappa-1}(t-\tau), \dot{\varphi}_{\kappa-1}(t-\tau))$$

функсијасы $(t_0 + (\kappa-1)\tau, t_0 + \kappa\tau]$ јарыминтервалында бахылан мәсәләнин һәллидир вә онун $(t_0 + (\kappa-1)\tau, t_0 + \kappa\tau]$ јарыминтервалында, үмумијјәтлә, төрәмәси јохдур.

Беләликлә, $(t_0, t_0 + \kappa\tau]$ јарыминтервалында бахылан мәсәләнин һәлли

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0, \\ \varphi_1(t), & t_0 < t \leqslant t_0 + \tau, \\ \varphi_2(t), & t_0 + \tau < t \leqslant t_0 + 2\tau, \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \varphi_\kappa(t), & t_0 + (\kappa-1)\tau < t \leqslant t_0 + \kappa\tau. \end{cases}$$

шәклиндә гурулур.

Ајдындыр ки, $\dot{\varphi}_1(t_0 + 0) \neq f(t_0, \varphi_0(t_0 - \tau), \dot{\varphi}_0(t_0 - \tau))$ олдугда һәлл $t = t_0$ нөгтәсиндә, $\dot{\varphi}_2(t_0 + \tau + 0) \neq f(t_0 + \tau, \varphi_1(t_0 + 0), \dot{\varphi}_1(t_0 + 0))$ олдугда $t = t_0 + \tau$ нөгтәсиндә кәсилир вә с.

Бу мүһакимәләрдән алынар ки, t артдыгча бир интервалдан гоншу интервала кечдикдә бахылан мәсәләнин һәллинин һамарлығы, үмумијјәтлә, бир ваһид азалыр.

§ 3 ҺӘЛЛИН ВАРЛЫҒЫ ВӘ ДАВАМЫ ҺАГГЫНДА

Бу параграфда

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))), \quad t > t_0 \tag{16}$$

тәнлијинин

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0} \tag{17}$$

шәртини өдәјән һәллинин варлығы вә јеканәлији һаггында теорем исбат олунур, сонра исә һәллин давамы мәсәләси арашдырылыр.

Теорем 1. *Тутаг ки, 1) $\varphi_0(t)$ башланғыч функсијасы E_{t_0} чохлуғунда кәсилмәздир; 2) мүәјјән $h > 0$ әдәди үчүн $\tau(t)$ функсијасы $[t_0, t_0 + h]$ парчасында кәсилмәздир вә $\tau(t) \geqslant 0$; 3) $f(t, x_1, x_2)$ функсијасы гапалы $\overline{D} = \{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h; \varphi_0(t_0) - b \leqslant x_i \leqslant \varphi_0(t_0) + b, i = 1, 2\}$ областында кәсилмәздир вә x_1, x_2 аргументләринә нәзәрән Липшис шәртини өдәјир:*

$$| f(t, x_1, x_2) - f(t, y_1, y_2) | \leqslant N [\, | x_1 - y_1 | + | x_2 - y_2 | \,].$$

Онда (16), (17) мәсәләсинин $[t_0, t_0 + \alpha]$ парчасында тә'јин олунмуш јеканә һәлли вар; бурада $\alpha = \min\left\{h, \frac{b}{M}\right\}, M = \sup\limits_{\overline{D}} | f(t, x_1, x_2) |$.

Исбаты. Теореми сыхылмыш ин'икас принсипинин көмәји илә исбат едәк (бах; II фәсил). Бунун үчүн Ф илә $X = E_{t_0} \cup [t_0, t_0 + \alpha]$ чохлуғунда кәсилмәз, E_{t_0}-да $\varphi_0(t)$ функсијасына бәрабәр олан вә $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ олдугда $| \varphi(t) - \varphi_0(t_0) | \leqslant b$ шәртини өдәјән $\{\varphi(t)\}$ функсијалар аиләсини ишарә едәк. Һәр бир $\varphi(t) \in Ф$ үчүн $A(\varphi(t))$ функсијасыны

$$\begin{aligned} A(\varphi(t)) &= \varphi_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s), \varphi(s - \tau(s)) ds, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha \\ A(\varphi(t)) &= \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0} \end{aligned} \tag{22}$$

дустуру илә тә'јин едәк.

Бу гајда илә, Ф чохлуғунда бир A оператору тә'јин етмыш олуруг.

Ајдындыр ки, (22) дүстуру илә тә'јин олунан $A(\varphi(t))$ функсијасы X чохлуғунда кәсилмәздир. Шәртә көрә $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ үчүн $(t, \varphi(t), \varphi(t - \tau(t))) \in \overline{D}$ вә $|f(t, \varphi(t), \varphi(t - \tau(t)))| \leqslant M$ олдуғундан, $| A(\varphi(t)) - \varphi_0(t_0) | \leqslant M\alpha \leqslant b$. Бурадан алынар ки, A оператору Ф чохлуғунда тә'сир едир. Бундан башга

$f(t, x_1, x_2)$ функсиjасы кәсилмәз олдуғундан, A оператору Φ чохлуғунда кәсилмәздир.

Дикәр тәрәфдән, $f(t, x_1, x_2)$ функсиjасы Липшис шәртини өдәдиjиндән, истәнилән $\varphi(t), \psi(t) \in \Phi$ үчүн

$$| A(\varphi(t)) - A(\psi(t)) | \leqslant \int_{t_0}^{t} | f(s, \varphi(s), \varphi(s-\tau(s))) -$$

$$- f(s, \psi(s), \psi(s-\tau(s)))| \, ds \leqslant N \int_{t_0}^{t} [| \varphi(s) - \psi(s) | +$$

$$+ | \varphi(s-\tau(s)) - \psi(s-\tau(s)) |] \, ds \leqslant 2N \int_{t_0}^{t} | \varphi(s) - \psi(s) | \, ds \leqslant$$

$$\leqslant 2N(t - t_0) \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\alpha} | \varphi(t) - \psi(t) | .$$

Бу бәрабәрсизлиjә әсасән алырыг ки,

$$| A^2(\varphi(t)) - A^2(\psi(t)) | = \left| \int_{t_0}^{t} [f(s, A(\varphi(s)), A(\varphi(s-\tau(s)))) - \right.$$

$$\left. - f(s, A(\psi(s)), A(\psi(s-\tau(s))))] \, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2N \int_{t_0}^{t} | A(\varphi(s)) - A(\psi(s)) | \, ds \leqslant (2N)^2 \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\alpha} | \varphi(t) - \psi(t) | \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t} (s - t_0) \, ds = \frac{[2N(t-t_0)]^2}{2!} \sup_{t_0 < t \leqslant t_0+\alpha} | \varphi(t) - \psi(t) | .$$

Бурадан да, риjази индуксиjа үсулу илә көстәрмәк олар ки, истәнилән κ тәбии әдәди үчүн

$$| A^\kappa(\varphi(t)) - A^\kappa(\psi(t)) | \leqslant \frac{[2N(t-t_0)]^\kappa}{\kappa!} \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\alpha} | \varphi(t) - \psi(t) |$$

бәрабәрсизлиjи өдәнир.

Мә'лумдур ки, кифаjәт гәдәр бөjүк κ-лар үчүн $\frac{[2N(t-t_0)]^\kappa}{\kappa!} \leqslant$ $\leqslant \frac{(2N\alpha)^\kappa}{\kappa!} = q < 1$. Демәли белә κ-лар үчүн, A операторунун κ-чы итерасиjасы

$$| A^\kappa(\varphi(t)) - A^\kappa(\psi(t)) | \leqslant q \sup_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\alpha} | \varphi(t) - \psi(t) |$$

шәртини өдәjир. Бу исә көстәрир ки, мүәjjән κ_0 нөмрәси вар ки, A^{κ_0} оператору сыхылмыш ин'икас принсипинин шәртләрини өдәjир. Она көрә дә үмумиләшмиш сыхылмыш ин'икас принсипинә әсасән

$$\varphi(t) = \varphi_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s), \varphi(s-\tau(s))) ds, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \alpha$$

$$\varphi(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_{t_0}$$

интеграл тәнлиjинин Φ чохлуғунда jеканә кәсилмәз һәлли вар. Дикәр тәрәфдән (16), (17) мәсәләсинин һәллинин тапылмасы бу интеграл тәнлиjин кәсилмәз һәллинин тапылмасына еквивалент олдуғундан, теорем исбат олунду.

Геjд 3. Пеано теореминин исбат гаjдасы илә көстәрмәк олар ки, теоремин 1), 2) шәртләри өдәнирсә вә $f(t, x_1, x_2)$ функсиjасы гапалы $\overline{D}$ областында анчаг кәсилмәздирсә, (16), (17) мәсәләсинин һеч олмаса бир һәлли вар.

Инди исә һәллин давамы мәсәләсини арашдыраг. Тутаг ки, $f(t, x_1, x_2)$ функсиjасы t дәjишәнинә нәзәрән $[t_0, t_1]$ парчасында, x_1, x_2 дәjишәнләринә нәзәрән исә $(\varphi_0(t_0), \varphi_0(t_0-\tau(t_0)))$ нөгтәсини дахилиндә сахлаjан областда тә'jин олунуб вә аргументләринин күллисинә нәзәрән кәсилмәздир, $\varphi_0(t)$ функсиjасы E_{t_0}-да, $\tau(t) \geqslant 0$ функсиjасы исә $[t_0, t_1]$ парчасында кәсилмәздир. Онда (16), (17) мәсәләсинин мүәjjән α $(\alpha \leqslant t_1 - t_0)$ үчүн $[t_0, t_0 + \alpha]$ парчасында тә'jин олунмуш һеч олмаса бир $x = \varphi(t)$ һәлли вар. Аjдындыр ки, $t_0 + \alpha < t_1$ олдугда $x = \varphi(t)$ һәллини $t_0 + \alpha$-дан сағa давам етдирмәк олар.

G илә $f(t, x_1, x_2)$ функсиjасынын тә'jин олундуғу чохлуғу ишарә едәк вә ашағыдакы һаллара бахаг:

1) һәлл бүтүн $[t_0, t_1]$ парчасына давам етдирилир;

2) елә $t' \in (t_0 + \alpha, t_1)$ нөгтәси вар ки, һәлл $[t_0, t')$ jарыминтервалына давам етдириләндир вә t дәjишәни солдан t' нөгтәсинә jахынлашдыгда $T(t) = (t, \varphi(t), \varphi(t-\tau(t)))$ нөгтәси G чохлуғунун сәрһәдинә jахынлашыр. Башга сөзлә десәк, G чохлуғунун ихтиjари F компакт* алт чохлуғу үчүн елә $s \in (t_0, t')$ нөгтәси вар ки, $t \in (s, t')$ олдугда $T(t) \in G \setminus F$;

3) һәлл $[t_0, t')$, $t_0 < t' < t_1$ jарыминтервалына даваметдириләндир вә t дәjишәни солдан t' нөгтәсинә jахынлашдыгда $T(t)$ нөгтәси G чохлуғунун сәрһәдинә сонсуз дәфә jахынлашыб узаглашыр. Башга сөзлә десәк, G чохлуғунун елә F_0 компакт алт чохлуғуну вә t' нөгтәсинә jығылан монотон артан $\{\xi_\kappa^0\}$ ардычыллығы тапмаг олар ки, $T(\xi_\kappa^0) \in F_0$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ лакин G чохлуғунун истәнилән F компакт алт чохлуғу вә t' нөгтәсинә jығылан елә монотон артан $\{\xi_\kappa^F\}$ ардычыллығы тапмаг олар ки, $T(\xi_\kappa^F) \in G \setminus F$, $\kappa = 1, 2, \ldots$.

Геjд едәк ки, $\tau(t) = 0$ вә jа $\tau(t) > 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ олдугда 3-чү һал ола билмәз. Демәли, ади диференсиал тәнликләр үчүн анчаг 1-чи вә 2-чи һаллар мүмкүндүр.

Геjд 4. Ади диференсиал тәнликләрдән фәргли олараг, мејл едән аргументли тәнлиjин һәллинин варлығы вә jеканәлиjи тә'мин олунан шәртләр дахилиндә ики мүхтәлиф һәлл

* Истәнилән сонсуз алт чохлуғундан jығылан ардычыллыг сечмәк мүмкүн олан чохлуға компакт чохлуг дејилир.

бир нөгтәдә вә һәтта мүәјјән бир парчада үст-үстә дүшә биләр: Буну көстәрмәк үчүн

$$\dot{x}(t) = \cos t + (\sin t - x(t))\, f(x(t-1)),\ t > 0$$

тәнлијинин

$$x(t) = \varphi_1(t),\ x(t) = \varphi_2(t),\ t \in E_0 = [-1,\ 0]$$

шәртләрини өдәјән һәлләринә бахаг; бурада $f(t)$ функсијасы һәгиги охда кәсилмәздир, $\varphi_1(t)$ вә $\varphi_2(t)$ функсијалары исә E_0 парчасында кәсилмәз вә $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ шәртини өдәјән ихтијари функсијалардыр.

Бахылан мәсәләләрә аддым үсулуну тәтбиг етсәк, биринчи аддымда, јә'ни [0, 1] парчасында

$$\dot{x} = \cos t + (\sin t - x)\, f(\varphi_1(t-1)),\quad x(0) = \varphi_1(0) = 0,$$

$$\dot{y} = \cos t + (\sin t - y)\, f(\varphi_2(t-1)),\ y(0) = \varphi_2(0) = 0$$

мәсәләләрини аларыг вә онларын јеканә $x = y = \sin t$ һәлли вар. Сонракы аддымларда алынан хәтти тәнликләрин сағ тәрәфләри ејни олдуғундан һәлләр үст-үстә дүшүрләр. Демәли, бахылан тәнлијин ики мүхтәлиф башланғыч функсијаја бир һәлли ујғундур.

§ 4. ХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР

а) *Кечикән аргументли тәнликләр.* Тутаг ки, бир сабит кечикмәси олан

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) + b(t)x(t-\tau) = f(t),\quad t > t_0 \qquad (23)$$

тәнлијинин

$$x(t) = \varphi_0(t),\quad t \in E_{t_0} = [t_0 - \tau,\ t_0] \qquad (24)$$

шәртини өдәјән һәллини тапмаг тәләб олунур. Бурада $\tau > 0$ сабит кечикмәдир, $\varphi_0(t)$ башланғыч функсијасы $[t_0 - \tau,\ t_0]$ парчасында, $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ функсијалары исә $[t_0,\ +\infty)$ јарымохунда кәсилмәздир.

Гејд едәк ки, гојулан мәсәләнин һәллини аддым үсулу илә тә'јин етмәк олар. Доғрудан да, (23), (24) мәсәләси $[t_0,\ t_0+\tau]$ парчасында

$$\dot{x} + a(t)x + b(t)\varphi_0(t-\tau) = f(t)$$

хәтти тәнлијинин

$$x(t_0) = \varphi_0(t_0)$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасына кәтирилир. Ајдындыр ки, алынан мәсәләнин $[t_0,\ t_0+\tau]$ парчасына тә'јин олунмуш јеканә $x = \varphi_1(t)$ һәлли вар. Одур ки, (23), (24) мәсәләси $[t_0+\tau,\ t_0+2\tau]$ парчасында

$$\dot{x} + a(t)x + b(t)\varphi_1(t-\tau) = f(t)$$

хәтти тәнлијинин

$$x(t_0+\tau) = \varphi_1(t_0+\tau,$$

шәртини өдәјән һәллинин тапылмасына кәтирилир вә с.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $x_1(t)$, $x_2(t)$ функсијалары хәтти бирчинс

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) + b(t)x(t-\tau) = 0 \qquad (23')$$

тәнлијинин $\varphi_1(t)$ вә $\varphi_2(t)$ башланғыч функсијаларына ујғун һәлләри исә, ихтијари c_1, c_2 әдәдләри үчүн $c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ функсијасы онун $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$ башланғыч функсијасына ујғун һәллидир. Бундан әлавә, $x(t)$ функсијасы (23′) тәнлијинин $\varphi_0(t)$ башланғыч функсијасына, $\widehat{x}(t)$ функсијасы исә (23) тәнлијинин сыфыр башланғыч функсијасына ујғун олан һәлли исә $x(t) + \widetilde{x}(t)$ функсијасы (23) тәнлијинин $\varphi_0(t)$ башланғыч функсијасына ујғун һәллидир.

Беләликлә, (23) тәнлијинин $\varphi_0(t)$ башланғыч функсијасына ујғун һәллинин тапылмасы даһа садә олан ики мәсәләнин һәллинин тапылмасына кәтирилир.

Бу параграфда әсас мәгсәд гошма тәнлик анлајышындан истифадә етмәклә (23), (24) мәсәләсинин һәллини интеграл шәклиндә көстәрмәкдән ибарәтдир. Онун көмәји илә тәнлијин һәлләринин хассәләрини өјрәнмәк вә бир чох нәзәри мәсәләләри арашдырмаг мүмкүндүр. Гејд едәк ки, белә көстәрилиш даһа үмуми тәнликләр вә системләр үчүн дә доғрудур.

Тутаг ки, $\Phi(t, s)$ функсијасы $G = \{t > t_0;\ t_0 \leqslant s \leqslant t+\tau\}$ чохлуғунда тә'јин олунуб, һәр бир $t > t_0$ үчүн s дәјишәнинә нәзәрән $|t_0,\ t|$ парчасында кәсилмәздир вә $(t_0,\ t)$ интервалында

$$-\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s} + \Phi(t,s)a(s) + \Phi(t, s+\tau)b(s+\tau) = 0 \qquad (25)$$

тәнлијинин

$$\Phi(t,s) = \begin{cases} 0, & t < s \leqslant t+\tau \\ 1, & s = t \end{cases} \qquad (26)$$

шәртини өдәјән һәллидир. (25) тәнлијинә (23) тәнлијинин *гошма тәнлији* дејилир.

Әввәлчә аддым үсулунун көмәји илә (25), (26) мәсәләсинин һәллинин варлығыны көстәрәк. Биринчи аддымда бу мәсәләјә $(t-\tau,\ t]$ јарыминтервалында бахаг. Онда (26) шәртинә әсасән, $s \in (t-\tau,\ t]$ үчүн $\Phi(t,\ s+\tau) = 0$, $\Phi(t,\ t) = 1$ олдуғундан, $(t-\tau, t]$ јарыминтервалында $\Phi(t,\ s)$ функсијасы

$$-\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s} + \Phi(t,s)\,a(s) = 0,\ \Phi(t,\ t) = 1$$

Коши мәсәләсинин һәлли кими тә'јин олунар. Бурадан

$$\Phi(t,s)=\exp\left(-\int_s^t a(\xi)d\xi\right),\quad t-\tau<s\leqslant t.$$

Икинчи аддымда (25), (26) мәсәләсинә $(t-2\tau,\ t-\tau]$ јарыминтервалында бахылыр. Онда $(t-2\tau,\ t-\tau]$ јарыминтервалында

$$-\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}+\Phi(t,s)a(s)+b(s+\tau)\exp\left(-\int_{s+\tau}^t a(\xi)d\xi\right)=0,$$

$$\Phi(t,\ t-\tau)=\exp\left(-\int_{t-\tau}^t a(\xi)d\xi\right)$$

мәсәләси алыныр вә онун һәлли

$$\Phi(t,\ s)=\exp\left(-\int_s^t a(\xi)d\xi\right)\left[1-\int_s^{t-\tau} b(\eta+\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(\int_\eta^{\eta+\tau} a(\xi)d\xi\right)d\eta\right].$$

Бу гајда илә һәр бир $t>t_0$ үчүн сонлу аддымдан сонра $\Phi(t,s)$ функсијасыны $[t_0,\ t]$ парчасында гурмаг олар.

Теорем 2. *Тутаг ки, $\varphi_0(t)$ функсијасы E_{t_0} парчасында, $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ функсијалары исә $[t_0,\ +\infty)$ јарымохунда кәсилмәздир вә $\Phi(t,s)$ функсијасы (25), (26) мәсәләсинин һәллидир. Онда*

$$x(t)=\Phi(t,t_0)\varphi_0(t_0)-\int_{t_0-\tau}^{t_0}\Phi(t,s+\tau)\varphi_0(s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^t\Phi(t,s)f(s)ds,\ t>t_0 \qquad (27)$$

дүстуру илә тә'јин олунан $x(t)$ функсијасы (23), (24) мәсәләсинин һәллидир.

Бу дүстура *кечикән аргументли диференсиал тәнлик үчүн Коши дүстуру* дејилир.

Исбаты. Теоремин шәртләри дахилиндә (23), (24) мәсәләсинин $[t_0,\ +\infty)$ јарымохунда тә'јин олунан јеканә $x(t)$ һәлли вар. Бу һәлли (23) тәнлијиндә јазмагла алынан ејниликдә t дәјишәнини s илә әвәз едәк вә һәр тәрәфини $\Phi(t,s)$ функсијасына вуруб t_0-дан t-јә гәдәр интегралламаг:

$$\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)\dot x(s)ds+\int_{t_0}^t\Phi(t,s)a(s)x(s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^t \Phi(t,\ s)b(s)x(s-\tau)ds=\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)f(s)ds. \qquad (28)$$

Һиссә-һиссә интеграллама дүстуруна әсасән

$$\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)x(s)ds=\Phi(t,\ t)x(t)-\Phi(t,t_0)x(t_0)-$$

$$-\int_{t_0}^t\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}x(s)ds.$$

Интеграллама дәјишәнини әвәз етмәклә аларыг:

$$\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)b(s)x(s-\tau)ds=\int_{t_0-\tau}^{t-\tau}\Phi(t,s+\tau)b(s+\tau)x(s)ds.$$

Лакин шәртә көрә $s\in(t-\tau,\ t)$ үчүн $\Phi(t,\ s+\tau)=0$ олдуғундан

$$\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)b(s)x(s-\tau)ds=\int_{t_0-\tau}^{t_0}\Phi(t,\ s+\tau)b(s+\tau)x(s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^t\Phi(t,s+\tau)b(s+\tau)x(s)ds.$$

Беләликлә, (28) бәрабәрлијини

$$\Phi(t,\ t)x(t)-\Phi(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0-\tau}^{t_0}\Phi(t,s+\tau)b(s+\tau)x(s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^t\left\{-\frac{\partial\Phi(t,\ s)}{\partial s}+\Phi(t,s)a(s)+\Phi(t,s+\tau)b(s+\tau)\right\}x(s)ds=$$

$$=\int_{t_0}^t\Phi(t,\ s)f(s)ds$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан да, (24) шәртинә вә $\Phi(t,\ s)$ функсијасынын тә'јининә әсасән (27) дүстуру алыныр. Теорем исбат олунду.

Гејд 5. Теоремин исбат үсулу илә көстәрмәк олар ки,

$$\dot x(t)+A(t)x(t)+B(t)x(t-\tau(t))=F(t)$$

системинин

$$x(t)=0,\quad t\in E_{t_0}$$

шәртини өдәјән һәлли

$$x(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)F(s)ds$$

дүстуру илә верилир; бурада $A(t)$, $B(t)$ верилмиш матрис-функсијалар, $F(t)$ верилмиш вектор-функсија, $x(t)$ ахтарылан вектор-функсијадыр, $\Phi(t, s)$ матрис-функсијасы

$$-\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}+\Phi(t,s)A(s)+\Phi(t,\gamma(s))B(\gamma(s))\dot\gamma(s)=0$$

матрис-системинин

$$\Phi(t,s)=\begin{cases}0, & t<s\leqslant\gamma(t)\\ E, & s=t\end{cases}$$

шәртини өдәјән һәллидир, $\gamma(t)$ исә $h(t)=t-\tau(t)$ функсијасынын тәрсидир, E ваһид матрисдир.

б) *Һәјәчанланмыш кечикән аргументли тәнликләр.* Јухарыда өјрәнилән (23') тәнлији илә јанашы һәјәчанланмыш

$$\dot y(t)+[a(t)+a_1(t)]y(t)+[b(t)+b_1(t)]y(t-\tau)=0,\quad t>t_0 \tag{29}$$

хәтти бирчинс тәнлијинә бахаг.

Теорем 3. *Тутаг ки, 1) (23') тәнлијинин (24) шәртини өдәјән һәлли $I=[t_0,+\infty)$ јарымохунда мәһдуддур; 2) $a_1(t)$, $b_1(t)$ функсијалары I јарымохунда кәсилмәздир вә $\int_{t_0}^{\infty}|a_1(t)|dt<+\infty$; $\int_{t_0}^{\infty}|b_1(t)|dt<+\infty$; 3) (25), (26) мәсәләсинин һәлли $G=\{t\geqslant t_0;\ t_0\leqslant s\leqslant t+\tau\}$ чохлуғунда мәһдуддур: $|\Phi(t,s)|\leqslant c$ (c=const).*

Онда (29) тәнлијинин (24) шәртини өдәјән һәлли I јарымохунда мәһдуддур.

Исбаты. Тутаг ки, $x(t)$ вә $y(t)$ функсијалары ујғун олараг (23') вә (29) тәнликләринин (24) шәртини өдәјән һәлләридир. Онда $z(t)=y(t)-x(t)$ функсијасы

$$\dot z(t)+a(t)z(t)+b(t)z(t-\tau)=-[a_1(t)y(t)+b_1(t)y(t-\tau)],\quad t>t_0$$

тәнлијинин

$$z(t)=0,\quad t\in E_{t_0}$$

шәртини өдәјән һәлли олар. Бу мәсәләнин һәллини (27) дүстуруна әсасән

$$z(t)=-\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)[a_1(s)y(s)+b_1(s)y(s-\tau)]ds$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан

$$y(t)=x(t)-\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)[a_1(s)y(s)+b_1(s)y(s-\tau)]ds$$

вә интеграллама дәјишәнини әвәз етмәклә аларыг:

$$y(t)=x(t)-\int_{t_0-\tau}^{t_0}\Phi(t,s+\tau)b_1(s+\tau)\varphi_0(s)ds-$$

$$-\int_{t_0}^{t}[\Phi(t,s)a_1(s)+\Phi(t,s+\tau)b_1(s+\tau)]y(s)ds.$$

Теоремин 1) вә 3) шәртләринә әсасән

$$|y(t)|\leqslant c_1+c\int_{t_0}^{t}[|a_1(s)|+|b_1(s+\tau)|]|y(s)|ds,$$

$$c_1=\text{const}>0$$

бәрабәрсизлији алыныр. Бу бәрабәрсизлијә Гронуолл леммасыны тәтбиг етсәк, аларыг ки,

$$|y(t)|\leqslant c_1\exp\left(c\int_{t_0}^{t}[|a_1(s)|+|b_1(s+\tau)|]ds\right).$$

Бурадан да, теоремин 2) шәртинә әсасән, $y(t)$ функсијасынын I јарымохунда мәһдудлуғу алыныр. Теорем исбат олунду.

в) *Нејтрал тип тәнликләр.* Инди исә нејтрал тип

$$\dot x(t)+a(t)\dot x(t-\tau)+b(t)x(t)+c(t)x(t-\tau)=f(t),\quad t>t_0 \tag{30}$$

тәнлијинин

$$x(t)=0,\quad t\in E_{t_0} \tag{31}$$

шәртини өдәјән һәллинин интеграл ифадәсини тапаг; бурада $\tau>0$ сабит кечикмәдир, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ вә $f(t)$ функсијалары исә I јарымохунда кәсилмәздир.

Тутаг ки, $a(t)$ функсијасынын кәсилмәз төрәмәси вар вә $\Phi(t, s)$ функсијасы $s\in(t_0, t)$, $s\neq t-k\tau$, $k=1, 2, \ldots$ үчүн

$$-\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}-\frac{\partial}{\partial s}[\Phi(t,s+\tau)a(s+\tau)]+\Phi(t,s)b(s)+$$

$$+\Phi(t,s+\tau)c(s+\tau)=0 \tag{32}$$

тәнлијинин

$$\Phi(t,s)=\begin{cases}0, & t<s\leqslant t+\tau\\ 1, & s=t\end{cases} \tag{33}$$

шәртини өдәјән вә

$$\Phi(t,s)+\Phi(t,s+\tau)a(s+\tau) \tag{34}$$

ифадәсинин s-ә нәзәрән $[t_0, t]$ парчасында кәсилмәзлијини тә'мин едән һәллидир.

Әввәлчә аддым үсулу илә көстәрәк ки, (32), (33) мәсәләсинин (34) ифадәсинин кәсилмәзлијини тә'мин едән һәлли вар.

Биринчи аддымда (32), (33) мәсәләсинә $(t-\tau,\ t)$ интервалында бахаг. Бу интервалда $\Phi(t,\ s+\tau)=0$ олдуғундан

$$-\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}+\Phi(t,s)\,b(s)=0,\quad \Phi(t,t)=1$$

мәсәләси алыныр. Бурадан

$$\Phi(t,s)=\exp\left(-\int_s^t b(\xi)\,d\xi\right).$$

Онда $s\in(t-2\tau,\ t-\tau)$ үчүн $\Phi(t,\ s+\tau)=\exp\left(-\int_{s+\tau}^t b(\xi)\,d\xi\right)$

олдуғундан, $(t-2\tau,\ t-\tau)$ интервалында (32) тәнлији

$$-\frac{\partial\Phi(t,s)}{\partial s}+\Phi(t,s)\,b(s)=\frac{\partial}{\partial s}\left[a(s+\tau)\exp\left(-\int_{s+\tau}^t b(\xi)\,d\xi\right)\right]-$$

$$-c(s+\tau)\exp\left(-\int_{s+\tau}^t b(\xi)\,d\xi\right) \qquad (35)$$

шәклинә дүшүр. Бу тәнлијин елә һәллини тапмаг лазымдыр ки, һәмин һәлл үчүн (34) ифадәси $s=t-\tau$ нөгтәсиндә кәсилмәз олсун. Јә'ни

$$\lim_{s\to t-\tau+0}[\Phi(t,\ s)+\Phi(t,\ s+\tau)a(s+\tau)]=$$
$$=\lim_{s\to t-\tau-0}[\Phi(t,\ s)+\Phi(t,\ s+\tau)a(s+\tau)]$$

бәрабәрлији өдәнсин. Бурадан $\Phi(t,\ s)$ функсијасынын $s\in(t-\tau,\ t)$ үчүн алынмыш ифадәсинә вә (33) шәртинә әсасән алырыг ки,

$$\Phi(t,\ t-\tau-0)=\exp\left(-\int_{t-\tau}^t b(\xi)\,d\xi\right)-a(t). \qquad (36)$$

Демәли, алынмыш (35) тәнлијинин (36) башланғыч шәртини өдәјән һәллини тапмаг лазымдыр вә ајдындыр ки, бу мәсәләнин $(t-2\tau,\ t-\tau)$ интервалында тә'јин олунмуш јеканә һәлли вар.

Бу гајда илә, гејд олунмуш t $(t>t_0)$ үчүн $[t_0,\ t]$ парчасында јеканә $\Phi(t,\ s)$ функсијасы гурулур.

Гурма гајдасындан ајдындыр ки, $s=t,\ t-\tau,\ t-2\tau,\ldots$ нөгтәләри $\Phi(t,\ s)$ функсијасынын биринчи нөв кәсилмә нөгтәләри ола биләр.

Теорем 4. *Тутаг ки,* $a(t)$, $a'(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ *функсијалары* $I=[t_0,\ +\infty)$ *јарымохунда кәсилмәздир,* $\Phi(t,\ s)$ *функсијасы исә (32), (33) мәсәләсинин (34) ифадәсинин* $[t_0,\ t]$

парчасында s-ә нәзәрән кәсилмәзлијини тә'мин едән һәллидир. Онда (30), (31) мәсәләсинин һәлли

$$x(t)=\int_{t_0}^t \Phi(t,\ s)f(s)\,ds \qquad (37)$$

дүстуру илә верилир.

Исбаты. (30) тәнлијиндән алырыг:

$$\int_{t_0}^t \Phi(t,\ s)[\dot x(s)+a(s)\dot x(s-\tau)+b(s)x(s)+c(s)x(s-\tau)]\,ds=$$

$$=\int_{t_0}^t \Phi(t,\ s)f(s)\,ds,\quad t>t_0. \qquad (38)$$

Интеграллама дәјишәнини әвәз етмәклә аларыг ки,

$$\int_{t_0}^t \Phi(t,s)a(s)\dot x(s-\tau)\,ds=\int_{t_0-\tau}^{t-\tau}\Phi(t,s+\tau)a(s+\tau)\dot x(s)\,ds,$$

$$\int_{t_0}^t \Phi(t,\ s)c(s)x(s-\tau)\,ds=\int_{t_0-\tau}^{t-\tau}\Phi(t,s+\tau)c(s+\tau)x(s)\,ds.$$

Бурада (31) вә (33) шәртләрини нәзәрә алсаг

$$\int_{t_0}^t \Phi(t,\ s)a(s)\dot x(s-\tau)\,ds=\int_{t_0}^t \Phi(t,\ s+\tau)a(s+\tau)\dot x(s)\,ds,$$

$$\int_{t_0}^t \Phi(t,s)c(s)x(s-\tau)\,ds=\int_{t_0}^t \Phi(t,s+\tau)c(s+\tau)x(s)\,ds$$

олар. Онда (38) бәрабәрлијини

$$\int_{t_0}^t[\Phi(t,s)+\Phi(t,s+\tau)a(s+\tau)]\dot x(s)\,ds+\int_{t_0}^t[\Phi(t,s)b(s)+$$

$$+\Phi(t,\ s+\tau)c(s+\tau)]x(s)\,ds=\int_{t_0}^t \Phi(t,\ s)f(s)\,ds \qquad (39)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Ајдындыр ки, $x(s)$ вә $\Phi(t,s)+\Phi(t,\ s+\tau)a(s+\tau)$ функсијалары $[t_0,\ t]$ парчасында s-ә нәзәрән кәсилмәздир вә һиссә-һиссә кәсилмәз төрәмәләри вар. Она көрә (39) бәрабәрлијинин сол тәрәфиндәки биринчи топланана һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг етмәк олар. Бу заман (31), (33) шәртләринә әсасән аларыг ки,

$$\int_{t_0}^t[\Phi(t,\ s)+\Phi(t,\ s+\tau)a(s+\tau)]x(s)\,ds=$$

$$= [\Phi(t, t) + \Phi(t, t+\tau) a(t+\tau)] x(t) -$$
$$- [\Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0+\tau)]\ a(t_0+\tau)] x(t_0) -$$
$$- \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial s} [\Phi(t, s) + \Phi(t, s+\tau) a(s+\tau)] x(s) ds =$$
$$= x(t) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial s} [\Phi(t, s) + \Phi(t, s+\tau) a(s+\tau)] x(s) ds.$$

Онда (39) бәрабәрлиjи

$$x(t) + \int_{t_0}^{t} \Big\{ -\frac{\partial}{\partial s} [\Phi(t, s) + \Phi(t, s+\tau) a(s+\tau)] + \Phi(t, s) b(s) +$$
$$+ \Phi(t, s+\tau) c(s+\tau) \Big\} x(s) ds = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s) f(s) ds$$

шәклинә дүшәр.

Бурадан да, $\Phi(t, s)$ функсиjасы (32) тәнлиjинин һәлли олдуғундан, (37) дүстуру алыныр. Теорем исбат олунду.

§ 5. САБИТ ӘМСАЛЛЫ КЕЧИКӘН АРГУМЕНТЛИ ДИФЕРЕНСИАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Аддым үсулу диференсиал-фәрг тәнликләрин һәлләрини анҹаг сонлу парчада тә'jин етмәjә имкан верир. Лакин бу үсул һәллин даjаныглығыны вә сәрбәст дәjишән сонсузлуға jахынлашдыгда хассәләрини өjрәнмәк үчүн әлверишли олмур. Она көрә дә сабит әмсаллы кечикән аргументли тәнликләрин һәлләрини, ади диференсиал тәнликләр нәзәриjjәсиндә олдуғу кими, $e^{\lambda t}$ шәклиндә функсиjаларын хәтти комбинасиjасы кими тапмаг әлверишли олур.

Бу параграфда

$$L(x) \equiv \dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = 0 \qquad (40)$$

тәнлиjинин $e^{\lambda t}$ шәклиндә һәлләринин тапылмасы мәсәләсинә бахылыр; бурада $\tau > 0$, a, $b \neq 0$ һәгиги әдәдләрдир.

Аjдындыр ки, $h(\lambda) = \lambda + a + be^{-\lambda\tau}$ ишарә етсәк, $L(e^{\lambda t}) = h(\lambda) e^{\lambda t}$ олар.

Бурадан алыныр ки, $e^{\lambda t}$ функсиjасынын (40) тәнлиjинин һәлли олмасы үчүн λ әдәдинин

$$\lambda + a + be^{-\lambda\tau} = 0 \qquad (41)$$

трансендент тәнлиjинин көкү олмасы зәрури вә кафидир.

(41) тәнлиjинә (40) тәнлиjинин *характеристик тәнлиjи*, $h(\lambda)$ функсиjасына исә *характеристик квазичохһәдлиси* деjилир. Геjд едәк ки, характеристик тәнлиjин һәр бир садә λ көкүнә (40) тәнлиjинин $e^{\lambda t}$ һәлли уjғундур вә мүхтәлиф көкләрә уjғун олан һәлләр хәтти асылы деjил. Бундан башга, характеристик тәнлиjин $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ комплекс көкүнә (40) тәнлиjинин хәтти асылы олмаjан $e^{\alpha t} \cos \beta t$, $e^{\alpha t} \sin \beta t$ һәгиги һәлләри уjғундур. Дикәр тәрәфдән

$$h'(\lambda) = 1 - b\tau e^{-\lambda\tau},\ h^{(\kappa)}(\lambda) = (-1)^{\kappa}\, b\tau^{\kappa} e^{-\lambda\tau}, \quad \kappa = 2, 3, \ldots$$

олдуғундан, (41) характеристик тәнлиjинин һәр бир көкү ән чоху ики дәфә тәкрарланан ола биләр.

Тутаг ки, λ_0 әдәди характеристик тәнлиjин ики дәфә тәкрарланан көкүдүр, jә'ни $h(\lambda_0) = 0$, $h'(\lambda_0) = 0$. Онда

$$L(e^{\lambda_0 t}) = h(\lambda_0) e^{\lambda_0 t} = 0,\ L(te^{\lambda_0 t}) = [th(\lambda_0) + h'(\lambda_0)] e^{\lambda_0 t} = 0$$

мүнасибәтләриндән алыныр ки, $e^{\lambda_0 t}$, $te^{\lambda_0 t}$ функсиjалары (40) тәнлиjинин хәтти асылы олмаjан һәлләридир.

Әкәр $h(\lambda_0)=0$ $h'(\lambda_0)=0$ бәрабәрликләриндән λ_0-ы jох етсәк, аларыг ки, $b\tau e^{a\tau+1} = 1$. Бу көстәрир ки, $b\tau e^{a\tau+1} \neq 1$ олдугда (41) тәнлиjинин көкләри садә олур.

Характеристик тәнлик трансендент тәнлик олдуғундан, онун комплекс әдәдләр чохлуғунда, үмумиjjәтлә, сонсуз саjда көкү вар. Она көрә дә (40) тәнлиjинин, үмумиjjәтлә, сонсуз саjда хәтти асылы олмаjан һәлләри вар. Бу һәлләрин хассәләрини өjрәнәркән характеристик тәнлиjин көкләринин комплекс мүстәвидә нечә jерләшдиjини билмәк лазым кәлир.

Аjдындыр ки, $\lambda = \alpha + i\beta$, $(\beta \neq 0)$ әдәди характеристик тәнлиjин көкү исә, $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ әдәди дә һәмин тәнлиjин көкүдүр. Демәли, характеристик тәнлиjин көкләри һәгиги оха нәзәрән симметрик jерләшмишдир. Дикәр тәрәфдән, кифаjәт гәдәр бөjүк $|\lambda|$-лар үчүн $h(\lambda) = \lambda\left(1 + \frac{a}{\lambda}\right) + be^{-\lambda\tau}$ вә $h_1(\lambda) = \lambda + be^{-\lambda\tau}$ функсиjаларынын көкләри бир-биринә jахындыр. Лакин $h_1(\lambda)$ функсиjасынын көкләри үчүн

$$|\lambda e^{\lambda\tau}| = |b|$$

мүнасибәти өдәндиjиндән, бурадан алынан

$$\ln |b| = \ln |\lambda| + \tau \operatorname{Re} \lambda$$

бәрабәрлиjи көстәрир ки, $|\lambda|$ сонсузлуға jахынлашдыгда $\operatorname{Re} \lambda$ мәнфи сонсузлуға jахынлашмалыдыр. Демәли, $|\lambda|$ сонсуз бөjүдүкчә (41) тәнлиjинин көкләринин һәгиги һиссәси һәгиги охун мәнфи һиссәсинә jахынлашыр. Бурадан алыныр ки, онун анҹаг сонлу саjда көкүнүн һәгиги һиссәси мүсбәт ола биләр.

Тутаг ки, $\lambda_\kappa \alpha_\kappa + i\beta_\kappa$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ әдәдләри характеристик

тәнлијин $m_\kappa (m_\kappa \leqslant 2)$ дәфә тәкрарланан көкләридир, $p_\kappa(t)$ вә $q_\kappa(t)$ исә дәрәчәләри $(m_\kappa - 1)$-дән бөјүк олмајан ихтијари әмсаллы чохһәдлиләрдир. Онда

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{\alpha_\kappa t}[p_\kappa(t)\cos\beta_\kappa t + q_\kappa(t)\sin\beta_\kappa t] \qquad (42)$$

сырасы јығылдығы вә диференсиалландығы интервалларда (40) тәнлијинин һәлли олур.

Хүсуси һалда $\alpha_\kappa < 0$, $\kappa = 1, 2, \ldots$ олдугда бу сыра $(0, \infty)$ интервалында јығылыр вә ону һәдбәһәд диференсиалламаг олар.

Тутаг ки, $p_\kappa(t)$, $q_\kappa(t)$ чохһәдлиләри елә сечилмишдир ки,

$$\varphi_0(t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{\alpha_\kappa t}[p_\kappa(t)\cos\beta_\kappa t + q_\kappa(t)\sin\beta_\kappa t], \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

шәрти өдәнир. Онда (42) сырасы (40) тәнлијинин $x(t) = \varphi_0(t)$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ шәртини өдәјән һәлли олур.

§ 6. ЛАПЛАС ЧЕВИРМӘСИ ВӘ ОНУН ТӘТБИГЛӘРИ

Хәтти диференсиал тәнликләрин хүсуси һәлләринин тапылмасы үчүн әлверишли үсуллардан бири Лаплас чевирмәси үсулудур. Лаплас чевирмәси васитәсилә тәнлијин верилмиш башланғыч шәрти өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләси мүәјјән чәбри тәнлијин һәллинә кәтирилир. Сонра исә тәрс чевирмә васитәсилә чәбри тәнлијин һәллиндән диференсиал тәнлијин һәлли алыныр.

Бу параграфда әввәлчә Лаплас чевирмәси вә онун хассәләри өјрәнилир. Сонра исә бу чевирмәнин сабит әмсаллы ади вә кечикән аргументли диференсиал тәнликләрин һәллинә тәтбигләри верилир.

а) *Лаплас чевирмәси.* Тутаг ки, $f(t)$ функсијасы $I = [0, +\infty)$ јарымохунда кәсилмәз, һәгиги функсијадыр вә мүәјјән $M > 0$, c һәгиги әдәдләри үчүн

$$|f(t)| \leqslant Me^{ct}, \quad t \in I$$

бәрабәрсизлији өдәнир. Онда

$$|f(t)e^{-st}\cos\sigma t| \leqslant Me^{-(s-c)t}, \ |f(t)e^{-st}\sin\sigma t| \leqslant Me^{-(s-c)t}$$

бәрабәрсизликләриндән вә $s > c$ үчүн $\int_0^\infty e^{-(s-c)t}\,dt$ интегралының сонлу олмасындан алырыг ки, $s > c$ олдугда

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}\cos\sigma t\,dt, \ \int_0^\infty f(t)e^{-st}\sin\sigma t\,dt$$

гејри-мәхсуси интеграллары мүтләг јығылыр.

Бурадан алыныр ки, $p = s + i\sigma$ әдәди үчүн

$$\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\cos\sigma t\,dt - i\int_0^\infty f(t)e^{-st}\sin\sigma t\,dt$$

интегралы да $s > c$ олдугда мүтләг јығылыр.

Бу гајда илә тә'јин олунан

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt \qquad (43)$$

интегралына $f(t)$ һәгиги функсијасынын *Лаплас чевирмәси* дејилир вә символик олараг $f(t) \doteq F(p)$ ишарә олунур.

Беләликлә, Лаплас чевирмәси васитәсилә $f(t)$ һәгиги функсијасына $F(p)$ комплекс функсијасы гаршы гојулур. Бу гаршыгојмада $f(t)$ функсијасы *орижинал* (*әсл*), $F(p)$ исә *тәсвир* (*сурәт, экс*) адланыр.

Лаплас чевирмәсинин бә'зи хассәләрини өјрәнәк.

I. *Хәттилик хассәси.* Тутаг ки, $f_\kappa(t) \doteq F_\kappa(p)$, $\kappa = 1, 2, \ldots, n$ вә $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ихтијари сабитләрдир. Онда

$$\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa f_\kappa(t) \doteq \sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa F_\kappa(p).$$

Доғрудан да, $|f_\kappa(t)| \leqslant M_\kappa e^{c_\kappa t}$, $t \in I$ оларса, $s > c = \max\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ әдәди үчүн $\left|\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa f_\kappa(t)\right| \leqslant \sum_{\kappa=1}^{n} |a_\kappa| M_\kappa e^{c_\kappa t} \leqslant \left(\sum_{\kappa=1}^{n} |a_\kappa| \times \times M_\kappa\right) e^{ct}$. Она көрә дә $\operatorname{Re} p > c$ үчүн $\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa f_\kappa(t)$ чәминин Лаплас чевирмәси вар вә чәмин Лаплас чевирмәси топлананларын Лаплас чевирмәләринин чәминә бәрабәрдир.

II. *Охшарлыг хассәси.* Тутаг ки, $f(t) \doteq F(p)$ вә $\alpha > 0$. Онда $f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

Хассәнин доғрулуғу $\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}\,dt$ интегралында $z = \alpha t$ әвәзләмәси илә алыныр:

$$\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(z)e^{-\frac{p}{\alpha}z}\,dz = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

III. *Орижиналын төрәмәси.* Тутаг ки, $f(t)$ функсијасынын $f'(t)$ төрәмәси вар вә $f(t)$-нин өдәдији шәртләри өдәјир. Онда, $f(t) \doteq F(p)$ олдугда

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0).$$

Һиссә-һиссә интеграллама дүстуруна әсасән

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = [f(t)e^{-pt}]\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Шәртә көрә $\mathrm{Re}\,p = s > c$ олдуғундан, $|f(t)e^{-pt}| \leqslant Me^{-(s-c)t}$ олар вә демәли, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-pt}=0$. Она көрә

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt - f(0) = pF(p)-f(0).$$

Ејни гајда илә көстәрмәк олар ки, $f(t)$ функсијасынын n-чи тәртиб төрәмәси үчүн

$$f^{(n)}(t)\doteq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

IV. *Тәсвирин төрәмәси.* Тутаг ки, $f(t)\doteq F(p)$. Онда

$$(-1)^n t^n f(t) \doteq F^{(n)}(p)$$

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\mathrm{Re}\,p > c$ олдугда

$$\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}\,dt, \ldots, \int_0^\infty t^n f(t)e^{-pt}dt$$

интеграллары мүтләг јығылырлар. Она көрә, p-јә нәзәрән диференсиалламагла (43) дүстурундан алырыг ки,

$$F'(p) = \int_0^\infty (-1)tf(t)e^{-pt}\,dt, \ldots, F^{(n)}(p) =$$

$$= \int_0^\infty (-1)^n t^n f(t)e^{-pt}dt.$$

V. *Орижиналын интегралланмасы.* Тутаг ки, $f(t)\doteq F(p)$. Онда

$$\int_0^t f(z)dz \doteq \frac{F(p)}{p}$$

Јә'ни орижиналын интегралынын тәсвири, өзүнүн тәсвирини p-јә бөлмәклә алыныр.

Ајдындыр ки, $g(t) = \int_0^t f(z)dz$ функсијасы $f(t)$ функсијасынын өдәдији шәртләри өдәјир вә $g(0)=0$, $g'(t)=f(t)$. Онда III хассәјә әсасән $g(t)\doteq G(p)$ олдугда $f(t)=g'(t)\doteq$

$\doteq pG(p)$ олур. Дикәр тәрәфдән, $f(t)\doteq F(p)$ олдуғундан алырыг ки, $F(p)=pG(p)$. Бурадан $G(p)=\frac{F(p)}{p}$.

VI. *Көчүрмә теореми.* Тутаг ки, $f(t)\doteq F(p)$. Онда истәнилән p_0 комплекс әдәди үчүн

$$e^{p_0t}f(t)\doteq F(p-p_0).$$

Доғрудан да,

$$\int_0^\infty e^{p_0t}f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(p-p_0)t}dt = F(p-p_0).$$

Лаплас чевирмәсинин бир хассәсини дә верәк. Бунун үчүн *Һевисајдын ваһид функсијасы* адланан

$$\theta(t) = \begin{cases}0, & t<0 \text{ оларса}\\ 1, & t>0 \text{ оларса}\end{cases}$$

функсијасыны дахил едәк.

VII. *Кечикмә теореми.* Тутаг ки, $f(t)\doteq F(p)$. Онда истәнилән $t_0>0$ үчүн

$$f(t-t_0)\theta(t-t_0)\doteq e^{-pt_0}F(p).$$

Һевисајд функсијасынын тә'јининә әсасән

$$\int_0^\infty f(t-t_0)\theta(t-t_0)e^{-pt}dt = \int_{t_0}^\infty f(t-t_0)e^{-pt}dt =$$

$$= \int_0^\infty f(z)e^{-p(z+t_0)}dz = e^{-pt_0}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt = e^{-pt_0}F(p).$$

Лаплас чевирмәсинин тә'рифинә вә хассәләринә әсасән бә'зи функсијаларын тәсвирини тапаг.

1. $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$, $\mathrm{Re}\,p>0$. Хүсуси һалда $1\doteq \frac{1}{p}$. Доғрудан да һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну n дәфә тәтбиг етсәк

$$F(p)=\int_0^\infty t^n e^{-pt}dt = -\frac{t^n}{p}e^{-pt}\Big|_0^\infty + \frac{n}{p}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-pt}dt = \cdots$$

$$= \frac{n!}{p^n}\int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

2. $\frac{(t-t_0)^n\theta(t-t_0)}{n!}\doteq p^{-(n+1)}e^{-pt_0}$, $\mathrm{Re}\,p>0$.

Дүстурун доғрулуғу 1-чи дүстура вә кечикмә теореминә әсасән алыныр.

3. $e^{p_0 t} \doteq \frac{1}{p-p_0}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$.

Доғрудан да, Лаплас чевирмәсинин тә'рифинә әсасән

$$F(p)=\int_0^\infty e^{p_0 t} e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-(p-p_0)t}\,dt=\frac{1}{p-p_0}.$$

4. $\operatorname{sh}\omega t \doteq \frac{\omega}{p^2-\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > \omega$.

Һиперболик синусун тә'јининә әсасән $\operatorname{sh}\omega t=\frac{1}{2}e^{\omega t}-\frac{1}{2}e^{-\omega t}$. Онда Лаплас чевирмәсинин хәттилик хассәсинә вә 3-чү дүстура әсасән

$$F(p)=\int_0^\infty \operatorname{sh}\omega t\, e^{-pt}\,dt=\frac{1}{2}\,\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{p+\omega}=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

5. $\operatorname{ch}\omega t \doteq \frac{p}{p^2-\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > \omega$.

Бу дүстурун доғрулуғуну орижиналын төрәмәси теореминә әсасән көстәрәк:

$$\operatorname{ch}\omega t=\frac{1}{\omega}(\operatorname{sh}\omega t)' \doteq \frac{1}{\omega}\;p\;\frac{\omega}{p^2-\omega^2}=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

6. $\sin\omega t \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\cos\omega t \doteq \frac{p}{p^2+\omega^2}$, $\operatorname{Re} p > 0$.

Ејлер дүстуруна әсасән $\sin\omega t=\frac{1}{2i}\left[e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right]$, $\cos\omega t = \frac{1}{2}\left[e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right]$ вә бурадан да, 4-чү мисалдакы гајда илә дүстурларын доғрулуғу алыныр.

7. $t^n e^{p_0 t} \doteq \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$.

Бу дүстур 1-чи мисала вә көчүрмә теореминә әсасән алыныр.

8. $t^n \sin\omega t \doteq \frac{n!\,Jm\,(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$, $t^n\cos\omega t \doteq \frac{n!\,Re\,(p+i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$,

$\operatorname{Re} p > 0$. Бу дүстурларын доғрулуғу Ејлер дүстуруна вә 7-чи дүстура әсасән көстәрилир.

б) *Тәрс чевирмә.* Јухарыда верилән мисалларда $f(t)$ орижиналына әсасән $F(p)$ тәсвирини тапдыг.

Бә'зән верилмиш $F(p)$ тәсвиринә әсасән $f(t)$ орижиналы мә'лум чәдвәлләрдән тапылыр*. Лакин нәзәри мәсәләләрин һәллиндә $F(p)$ тәсвиринә көрә $f(t)$ орижиналыны тә'јин етмәк үчүн дүстур вермәк лазым кәлир.

Лемма (Риман—Лебег). *Тутаг ки, $g(t)$ функсијасы (α, β) интервалында мүтләг интегралланандыр. Онда*

$$\lim_{T\to\infty}\int_\alpha^\beta g(t)\sin Tt\,dt=0,\quad \lim_{T\to\infty}\int_\alpha^\beta g(t)\cos T\,t\,dt=0.$$

Исбаты. Әввәлчә $g(t)$ функсијасынын мүтләг интегралланан төрәмәси олан һала бахаг. Бу һалда һиссә-һиссә интеграллама дүстуруна әсасән

$$\int_\alpha^\beta g(t)\sin Tt\,dt=-\frac{g(t)\cos Tt}{T}\Big|_\alpha^\beta+\frac{1}{T}\int_\alpha^\beta g'(t)\cos Tt\,dt,$$

$$\int_\alpha^\beta g(t)\cos Tt\,dt=\frac{g(t)\sin Tt}{T}\Big|_\alpha^\beta-\frac{1}{T}\int_\alpha^\beta g'(t)\sin Tt\,dt.$$

Бурадан да T сонсузлуға јахынлашмаг шәртилә лимитә кечсәк лемманын доғрулуғуну аларыг.

Инди исә үмуми һала бахаг. Мә'лумдур ки, (бах мәсәлән, С. М. Никольский „Курс математического анализа" т. II, М., 1973, сәһ. 141) $g(t)$ функсијасы (α, β) интервалында мүтләг интегралланан исә, ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә көрә мүтләг интегралланан төрәмәси олан елә $g_\varepsilon(t)$ функсијасы тапмаг олар ки,

$$\int_\alpha^\beta |g(t)-g_\varepsilon(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{2}$$

бәрабәрсизлији өдәнәр. Онда

$$\left|\int_\alpha^\beta g(t)\sin Tt\,dt\right|\leqslant\left|\int_\alpha^\beta [g(t)-g_\varepsilon(t)]\sin Tt\,dt\right|+$$

$$+\left|\int_\alpha^\beta g_\varepsilon(t)\sin Tt\,dt\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\left|\int_\alpha^\beta g_\varepsilon(t)\sin Tt\,dt\right|.$$

Бурадан да, ε-нун ихтијарилијинә вә $g_\varepsilon(t)$-нин мүтләг интегралланан төрәмәсинин варлығына әсасән лемманын биринчи һөкмүнүн доғрулуғу алыныр. Икинчи һөкмүн доғрулуғу ејни гајда илә көстәрилир. Лемма исбат олунду.

* *Бах:* мәсәлән, Г. Дёч. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М., 1965.

Теорем 5. *Тутаг ки, $f(t)$ функсиjасы ашағыдакы шәртләри өдәjир: 1) мүәjjән $c>0$ әдәди үчүн $\int_0^\infty f(t)e^{-ct}dt$ интегралы мүтләг јығылыр; 2) $f(t)$ функсиjасынын $t=u>0$ нөгтәсиндә мәһдуд төрәмәси вар.*

Онда $Re p \geqslant c$ олдугда

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

интегралы јығылыр вә $b>c$ үчүн

$$f(u)=\int_{(b)} F(p)e^{pu}dp;$$

бурада

$$\int_{(b)} F(p)e^{pu}dp=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} F(p)e^{pu}dp.$$

Исбаты. Теоремин биринчи шәртинә әсасән $b>c$ олдугда

$$F(b+it)=\int_0^\infty f(z)e^{-(b+it)z}dz \tag{44}$$

интегралы мүтләг јығылыр. Бу бәрабәрлиjин һәр тәрәфини $e^{(b+it)u}$-ја вуруб, t-јә нәзәрән $(-T, T)$ $(T>0)$ интервалында интеграллаjаг:

$$\int_{-T}^{T} e^{(b+it)u}F(b+it)dt=\int_{-T}^{T} e^{(b+it)u}\left(\int_0^\infty f(z)e^{-(b+it)z}dz\right)dt.$$

Бурадан, интеграллама нөвбәсини дәјишмәклә алырыг:

$$\int_{-T}^{T} e^{(b+it)u}F(b+it)dt=e^{bu}\int_0^\infty f(z)e^{-bz}\left(\int_{-T}^{T} e^{i(u-z)t}dt\right)dz=$$

$$=2e^{bu}\int_0^\infty f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz. \tag{45}$$

Аjдындыр ки, ихтиjари $d>0$ әдәди үчүн бу бәрабәрлиjин сағ тәрәфиндәки интегралы

$$\int_0^\infty f(z)e^{-pz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz=\int_0^{u-d} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz+$$

$$+\int_{u-d}^{u+d} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz+\int_{u+d}^{\infty} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz \tag{46}$$

шәклиндә јазмаг олар вә леммаjа әсасән көстәрмәк олар ки,

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^{u-d} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz=0,$$

$$\lim_{T\to\infty}\int_{u+d}^{\infty} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz=0. \tag{47}$$

Теоремин икинчи шәртинә әсасән кифаjәт гәдәр кичик $d>0$ әдәди үчүн

$$f(z)e^{-bz}=f(u)e^{-bu}+h(u,z)(u-z),\quad u-d\leqslant z\leqslant u+d$$

олар вә бурада $|h(u,z)|\leqslant K$. Она көрә

$$\int_{u-d}^{u+d} f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz=f(u)e^{-du}\int_{u-d}^{u+d}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz+$$

$$+\int_{u-d}^{u+d} h(u,z)\sin T(u-z)\,dz.$$

Алынан интеграллары гиjмәтләндирәк.

Биринчи интегралда $T(u-z)=v$ әвәз етсәк,

$$\int_{u-d}^{u+d}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz=\int_{-Td}^{Td}\frac{\sin v}{v}dv$$

олар. Бурадан алыныр ки,

$$\lim_{T\to\infty}\int_{u-d}^{u+d}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin v}{v}dv=\pi. \tag{48}$$

Икинчи интегралда исә $|h(u,z)\sin T(u-z)|\leqslant K$ олдуғундан

$$\int_{u-d}^{u+d} h(u,z)\sin T(u-z)dz=O(d). \tag{49}$$

Алынан (47), (48), (49) мүнасибәтләрини (46) бәрабәрлиjиндә нәзәрә алсаг

$$\lim_{T\to\infty}2e^{bu}\int_0^\infty f(z)e^{-bz}\frac{\sin T(u-z)}{u-z}dz=2\pi f(u)+O(d)$$

олар. $d>0$ ихтијари кичик әдәд олдуғундан, бурадан вә (45) бәрабәлијиндән алырығ ки,

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} F(b+it)e^{(b+it)u}\,dt = 2\pi f(u).$$

Бурадан да теоремин исбаты алыныр.

в) *Ади диференсиал тәнликләр.* Лаплас чевирмәсини

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{x} + a_nx = f(t) \tag{50}$$

тәнлијинин

$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1,\ \dots,\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \tag{51}$$

шәртләрини өдәјән һәллинин тапылмасы мәсәләсинә тәтбиг едәк; бурада $a_0, a_1, \dots, a_n$ сабитләрдир, $f(t)$ исә I јарымохунда кәсилмәз вә $|f(t)| \leqslant Me^{ct}$ шәртини өдәјән функсијадыр. Хәтти тәнлијин үмуми һәллинин ифадәсинә әсасән алыныр ки, (50), (51) мәсәләсинин $x(t)$ һәллинин вә $\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)$ төрәмәләринин Лаплас чевирмәси вар. Она көрә дә $x(t) \doteq X(p)$, $f(t) \doteq F(p)$ ишарә етсәк, орижиналын төрәмәси хассәсинә әсасән

$$\dot{x}(t) \doteq pX(p) - x_0,\ x^{(\kappa)}(t) \doteq p^{\kappa}X(p) - p^{\kappa-1}x_0 - p^{\kappa-2}x_1 - \dots - x_{\kappa-1}$$
$$\kappa = 2, 3, \dots, n.$$

Она көрә дә (50) тәнлијинин һәр тәрәфинә Лаплас чевирмәсини тәтбиг етсәк, бу чевирмәнин хәттилик хассәсинә әсасән аларыг:

$$a_0\left[p^nX(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x_1 - \dots - x_{n-1}\right] +$$
$$+ a_1\left[p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - p^{n-3}x_1 - \dots - x_{n-2}\right] +$$
$$+ \dots + a_{n-1}[pX(p) - x_0] + a_nX(p) = F(p).$$

Бурада

$$P(p) = \left(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + \dots + a_{n-1}\right)x_0 +$$
$$+ \left(a_0p^{n-2} + a_1p^{n-3} + \dots + a_{n-2}\right)x_1 + \dots + a_0x_{n-1},$$
$$h(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_{n-1}p + a_n$$

ишарә етсәк, сонунчу бәрабәрлији

$$X(p) = \frac{F(p) + P(p)}{h(p)} \tag{52}$$

шәклиндә јазмаг олар. Онда тәрс чевирмә һаггында теоремә әсасән

$$x(t) = \int_{(b)} \frac{F(p) + P(p)}{h(p)} e^{pt}\,dp$$

олар.

Чох вахт Лаплас чевирмәси нәтичәсиндә алынан (52) ифадәсинин сағ тәрәфи расионал кәср олур вә бу кәсри садә кәсрләрә ајырмагла орижинал тапылыр.

Мисал 1. $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 12e^{3t}$ тәнлијинин $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 6$ шәрләртини өдәјән һәллини Лаплас чевирмәси илә тапаг. 2-чи дүстура әсасән $12e^{3t} \doteq \frac{12}{p-3}$ олдуғундан, бахылан мәсәләнин һәллинә Лаплас чевирмәсини тәтбиг етсәк, $X(p)$-јә нәзәрән

$$p^2X(p) - 2p - 6 - 3(pX(p) - 2) + 2X(p) = \frac{12}{p-3}$$

чәбри тәнлији алынар. Бурадан

$$X(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(k-3)}.$$

Сағ тәрәфи садә кәсрләрә ајыраг;

$$\frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)} = \frac{4}{p-1} - \frac{8}{p-2} + \frac{6}{p-3}.$$

Демәли,

$$X(p) = \frac{4}{p-1} - \frac{8}{p-2} + \frac{6}{p-3}.$$

Онда 3-чү дүстура әсасән

$$x(t) = 4e^t - 8e^{2t} + 6e^{3t}$$

функсијасы бахылан мәсәләнин һәлли олур.

Мисал 2. $\ddot{x} - x = 4\sin t + 5\cos 2t$, $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = -2$ мәсәләсини Лаплас чевирмәси илә һәлл едәк. 6-чы дүстура әсасән $\sin t \doteq \frac{1}{1+p^2}$, $\cos 2t \doteq \frac{p}{4+p^2}$. Она көрә дә мәсәләјә Лаплас чевирмәсини тәтбиг етсәк

$$p^2X(p) + p + 2 - X(p) = \frac{4}{p^2+1} + \frac{5p}{p^2+4}$$

олар. Бурадан

$$X(p) = -\frac{p^3 + 2p^2 + p + 8}{(p^2+1)(p^2+4)}$$

вә ја садә кәсрләрә ајырсаг

$$X(p) = \quad - \frac{p}{p^2+4}.$$

Онда 6-чы дүстура әсасән

$$x(t) = -2\sin t - \cos 2t$$

функсијасы тәләб олунан һәлл олур.

Мисал 3.

$$\begin{cases}\dot x = 2x + 4y + \cos t,\\ \dot y = -x - 2y + \sin t\end{cases}$$

системинин $x(0)=1$, $y(0)=0$ шәртләрини өдәјән һәллини Лаплас чевирмәси илә тапаг. Бунун үчүн $x(t) \doteq X(p)$, $y(t) \doteq У(p)$ ишарә едәк вә системин һәр ики тәнлијинә Лаплас чевирмәсини тәтбиг едиб

$$\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}, \quad \cos t \doteq \frac{p}{p^2+1}$$

олдуғуну нәзәрә алаг. Онда

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = 2X(p) + 4У(p) + \dfrac{p}{p^2+1},\\ pУ(p) = -X(p) - 2У(p) + \dfrac{1}{p^2+1}\end{cases}$$

системини аларыг. Бурада алынан

$$\begin{cases}(p-2)X(p) - 4У(p) = \dfrac{p^2+p+1}{p^2+1},\\ X(p) + (p+2)У(p) = \dfrac{1}{p^2+1}\end{cases}$$

системинин һәлли

$$X(p) = \frac{p^2+3p^2+3p+6}{p^2(p^2+1)}, \quad У(p) = -\frac{p^2+3}{p^2(p^2+1)}.$$

Лакин

$$\frac{p^3+3p^2+3p+6}{p^2(p^2+1)} = \frac{3}{p} + \frac{6}{p^2} - \frac{2p}{p^2-1} - \frac{3}{p^2+1}.$$

$$-\frac{p^2+3}{p^2(p^2+1)} = -\frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^2+1}$$

олдуғундан

$$X(p) = \frac{3}{p} + \frac{6}{p^2} - \frac{2p}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+1}, \quad У(p) = -\frac{3}{p^2} + \frac{2}{p^2+1}.$$

Онда 1-чи вә 6-чы дүстурлара әсасән

$$x(t) = 3 + 6t - 2\cos t - 3\sin t, \quad y(t) = -3t + 2\sin t$$

функсијалары бахылан мәсәләнин һәлли олур.

г) *Кечикән аргументли тәнликләр.* Тутаг ки,

$$\dot x(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = f(t), \quad t > 0 \qquad (53)$$

тәнлијинин

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in E_0 = [-\tau, 0] \qquad (54)$$

шәртини өдәјән һәллини тапмаг тәләб олунур; бурада $\tau > 0$,

a, b сабитләрдир, $\varphi_0(t)$ функсијасы E_0 чохлуғунда, $f(t)$ исә $I = [0, +\infty)$ јарымохунда кәсилмәздир вә $|f(t)| \leqslant Me^{ct}$, $M > 0$, $c > 0$.

Мәсәләнин һәллинә Лаплас чевирмәсини тәтбиг едәк. Әввәлчә көстәрәк ки, мүәјјән M_1, c_1 әдәдләри вар ки, (53) (54) мәсәләсинин һәлли

$$|x(t)| \leqslant M_1 e^{c_1 t}, \quad t \in I \qquad (55)$$

бәрабәрсизлијини өдәјир. Бунун үчүн (53) тәнлијинин һәр тәрәфини $[0, t]$, $(t > 0)$ парчасында интеграллајаг:

$$\int_0^t [\dot x(s) + ax(s) + bx(s-\tau)]\,ds = \int_0^t f(s)\,ds.$$

Бурадан, (54) башланғыч шәртинә әсасән

$$x(t) = \varphi_0(0) - b\int_{-\tau}^{0} \varphi_0(s)\,ds - a\int_0^t x(s)\,ds -$$
$$- b\int_0^{t-\tau} x(s)\,ds + \int_0^t f(s)\,ds$$

мүнасибәти алыныр. Бурада $m = \varphi_0(0) - b\int_{-\tau}^{0} \varphi_0(s)\,ds$ ишарә етсәк вә $\int_0^t |f(s)|\,ds \leqslant \frac{M}{c}e^{ct}$, $\left|\int_0^{t-\tau} x(s)\,ds\right| \leqslant \int_0^t |x(s)|\,ds$, $t > \tau$, олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$|x(t)| \leqslant |m| + \frac{M}{c}e^{ct} + (|a| + |b|)\int_0^t |x(s)|\,ds$$

бәрабәрсизлији алынар. Бу бәрабәрсизлијә Гронуолл леммасыны тәтбиг едиб e^{ct} функсијасынын монотон артан олдуғуну да нәзәрә алсаг,

$$|x(t)| \leqslant \left(|m| + \frac{M}{c}e^{ct}\right)e^{(|a|+|b|)t}$$

олар.

Ајдындыр ки, $t \geqslant 0$ олдугда $|m| \leqslant |m|e^{ct}$. Она көрә дә, $M_1 = |m| + \frac{M}{c}$, $c_1 = c + |a| + |b|$ ишарә едиб, сонунчу бәрабәрсизлији

$$|x(t)| \leqslant M_1 e^{c_1 t}, \quad t \in I$$

шәклиндә јазмаг олар.

Бу бәрабәрсизлиjи (53) тәнлиjиндә нәзәрә алсаг, мүәjjән $M_2 > 0$, $c_2 > 0$ әдәдләри үчүн

$$|\dot{x}(t)| \leqslant M_2 e^{c_2 t}, \quad t \in I$$

олдуғуну көстәрмәк олар.

Алынан бәрабәрсизликләр көстәрир ки, (53) тәнлиjинин $x(t)$ һәллинин вә $\dot{x}(t)$ төрәмәсинин Лаплас чевирмәси вар.

Тутаг ки, $Re\, p > c_3 = \max\{c, c_1, c_2\}$. Белә p үчүн (53) тәнлиjинин һәр тәрәфини e^{-pt} функсиjасына вуруб интеграллаjаг:

$$\int_0^\infty \dot{x}(t) e^{-pt}\, dt + a\int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt + b\int_0^\infty x(t-\tau) e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt. \qquad (56)$$

Һиссә-һиссә интеграллама дүстуруна әсасән

$$\int_0^\infty \dot{x}(t) e^{-pt} dt = \dot{x}(t) e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt =$$

$$= -\varphi_0(0) + p\int_0^\infty x(t) e^{-pt}\, dt$$

вә интеграллама дәјишәнини әвәз етмәклә

$$\int_0^\infty x(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_{-\tau}^\infty x(t) e^{-p(t+\tau)} dt =$$

$$= e^{-p\tau}\int_{-\tau}^0 \varphi_0(t) e^{-pt}\, dt + e^{-p\tau}\int_0^\infty x(t) e^{-pt}\, dt$$

олдуғундан, (56) бәрабәрлиjини

$$(p + a + be^{-p\tau})\int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt =$$

$$= \varphi_0(0) - be^{-p\tau}\int_{-\tau}^0 \varphi_0(t) e^{-pt} dt + \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

шәклиндә jазмаг олар. Бурада

$$h(p) = p + a + be^{-p\tau}, P(p) = \varphi_0(0) - be^{-p\tau}\int_{-\tau}^0 \varphi_0(t) e^{-pt} dt,$$

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

ишарә етсәк,

$$\int_0^\infty x(t) e^{-pt}\, dt = \frac{P(p) + F(p)}{h(p)}$$

олар вә тәрс чевирмә һаггында теорема әсасән алырыг ки, (53), (54) мәсәләсинин һәлли

$$x(t) = \int_{(c_4)} \frac{P(p) + F(p)}{h(p)} e^{pt}\, dp, \quad c_4 > c_3, \quad t > 0$$

дүстуру илә тә'јин олунур.

Мисал 4. $\dot{x}(t) - x(t-1) = 1$ тәнлиjинин $x(t) = t$, $-1 \leqslant t \leqslant 0$ шәртини өдәјән һәллини Лаплас чевирмәси үсулу илә тапаг. Тәнлиjин һәр тәрәфини e^{-pt}-jә ($\mathrm{Re}\, p > 0$) вуруб интеграллаjаг:

$$\int_0^\infty \dot{x}(t) e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty x(t-1) e^{-pt} dt + \int_0^\infty 1\cdot e^{-pt}\, dt.$$

Бурадан һиссә-һиссә интеграллама дүстуруну тәтбиг етмәклә вә интеграллама дәјишәнини әвәз етмәклә алырыг:

$$(p - e^{-p})\int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt = e^{-p}\int_{-1}^0 te^{-pt} dt + \frac{1}{p}$$

Дикәр тәрәфдән, һиссә-һиссә интеграллама дүстуруна әсасән

$$\int_{-1}^0 te^{-pt}\, dt = -\frac{t}{p} e^{-pt}\Big|_{-1}^0 + \frac{1}{p}\int_{-1}^0 e^{-pt}\, dt = \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}\right) e^p - \frac{1}{p^2}.$$

Демәли, $x(t) \doteq X(p)$ ишарә етсәк,

$$(p - e^{-p}) X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} e^{-p} + \frac{1}{p}.$$

Бурадан

$$X(p) = \frac{1 - e^{-p}}{p^2(p - e^{-p})}.$$

Алынан бәрабәрлиjин сағ тәрәфини $\frac{1}{1-u} = \sum\limits_{k=0}^\infty u^k$ аjрылышына әсасән

$$\frac{1 - e^{-p}}{p^2(p - e^{-p})} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3}\,\frac{1}{1 - p^{-1} e^{-p}} - \frac{1}{p^2}\,\frac{1}{1 - p^{-1} e^{-p}} =$$

$$= \frac{1}{p^2} + \sum_{k=0}^\infty p^{-(k+3)} e^{-kp} - \sum_{k=0}^\infty p^{-(k+2)} e^{-kp}$$

шәклиндә аjырмаг олар.

Дeмәли,

$$X(p)=\frac{1}{p^2}+\sum_{\kappa=0}^{\infty}p^{-(\kappa+3)}e^{-\kappa p}-\sum_{\kappa=0}^{\infty}p^{-(\kappa+2)}e^{-\kappa p}.$$

1-чи вә 2-чи дүстурлара әсасән

$$t\doteq\frac{1}{p^2},\quad \frac{(t-\kappa)^{\kappa+2}\,\theta(t-\kappa)}{(\kappa+2)!}\doteq p^{-(\kappa+3)}e^{-\kappa p}$$

$$\frac{(t-\kappa)^{\kappa+1}\,\theta(t-\kappa)}{(\kappa+1)!}\doteq p^{-(\kappa+2)}e^{-\kappa p}$$

олдуғундан, $X(p)$ тәсвиринин орижиналы

$$x(t)=t+\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(t-\kappa)^{\kappa+2}\,\theta(t-\kappa)}{(\kappa+2)!}-\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(t-\kappa)^{\kappa+1}\,\theta(t-\kappa)}{(\kappa+1)!},\quad t>0$$

олур. Бурадан Һевисајдын ваһид функсијасынын тә'јининә әсасән, истәнилән n тәбии әдәди үчүн, $n-1\leqslant t\leqslant n$, $n=1$, 2, ... олдугда

$$x(t)=t+\sum_{\kappa=0}^{n-1}\frac{(t-\kappa)^{\kappa+1}}{(\kappa+1)!}\left[\frac{t-\kappa}{\kappa+2}-1\right]$$

олур. Бу дүстур гојулан мәсәләнин һәллини верир.

Мисал 5. $\dot x(t)-2x(t-1)=t,\quad t>0$
$x(t)=1,\quad -1\leqslant t\leqslant 0$

мәсәләсинин һәллини Лаплас чевирмәси үсулу илә тә'јин едәк. 4-чү мисалда олдуғу кими $x(t)\doteq X(p)$ ишарә етсәк, $X(p)$-јә нәзәрән

$$(p-2e^{-p})X(p)=1+2e^{-p}\int_{-1}^{0}e^{-pt}dt+\frac{1}{p^2}$$

тәнлији алынар. Бурадан

$$X(p)=\frac{p(p-2e^{-p})+1+2p}{p^2(p-2e^{-p})}.$$

Дикәр тәрәфдән

$$\frac{p(p-2e^{-p})+1+2p}{p^2(p-2e^{-p})}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^3}\,\frac{1}{1-2p^{-1}e^{-p}}+$$

$$+\frac{2}{p^2}\,\frac{1}{1-2p^{-1}e^{-p}}=\frac{1}{p}+\sum_{\kappa=0}^{\infty}2^{\kappa}p^{-(\kappa+3)}e^{-\kappa p}+\sum_{\kappa=0}^{\infty}2^{\kappa+1}p^{-(\kappa+2)}e^{-\kappa p}$$

олдуғундан, јухарыдакы гајда илә алырыг ки,

$$x(t)=1+\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left[\frac{2^{\kappa}(t-\kappa)^{\kappa+2}\,\theta(t-\kappa)}{(\kappa+2)!}+\frac{2^{\kappa+1}(t-\kappa)^{\kappa+1}\,\theta(t-\kappa)}{(\kappa+1)!}\right].$$

Бурадан да, истәнилән n тәбии әдәди үчүн

$$x(t)=1+\sum_{\kappa=0}^{n-1}\left[\frac{2^{\kappa}(t-\kappa)^{\kappa+2}}{(\kappa+2)!}-\frac{2^{\kappa+1}(t-\kappa)^{\kappa+1}}{(\kappa+1)!}\right],$$

$$n-1\leqslant t\leqslant n,\quad n=1,2,\ldots$$

дүстуру алынар.

Чалышмалар

1. Ашағыдакы мәсәләләрин көстәрилән парчада һәллини аддым үсулу илә тапмалы:

а) $\dot x(t)=x(t)+x^2(t-1),\quad 0<t\leqslant 2$
$x(t)=1,\ -1\leqslant t\leqslant 0.$ *Чаваб:* $x=\begin{cases}2e^t-1, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 2e^t+4e^{2(t-1)}-4te^{t-1}-1, & 1\leqslant t\leqslant 2.\end{cases}$

б) $\dot x(t)=\dot x^2(t-1)+6t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2,$
$x(t)=0,\ -1\leqslant t\leqslant 0,$ *Чаваб:* $x=\begin{cases}3t^2, & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 12(t-1)^3+3t^2, & 1\leqslant t\leqslant 2\end{cases}$

в) $\dot x(t)=x\left(\frac{t}{2}\right),\quad 1\leqslant t\leqslant 4$
$x(t)=t,\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,$ *Чаваб:* $x=\begin{cases}\frac{1}{4}(t^2+3), & 1\leqslant t\leqslant 2.\\ \frac{t^3}{48}+\frac{3t}{4}+\frac{1}{12}, & 2\leqslant t\leqslant 4\end{cases}$

г) $\dot x(t)=24x\left(\frac{t}{2}\right)\dot x\left(\frac{t}{2}\right),\quad 1\leqslant t\leqslant 4,$
$x(t)=t,\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,$ *Чаваб:* $x=\begin{cases}6t^2-5, & 1\leqslant t\leqslant 2\\ 54t^4-360t^2+595, & 2\leqslant t\leqslant 4\end{cases}$

2. Ашағыдакы дүстурларын доғрулуғуну көстәрин:

а) $e^{\alpha t}\sin\beta t\doteq\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$, **б)** $e^{\alpha t}\cos\beta t\doteq\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$,

в) $e^{\alpha t}\,\mathrm{sh}\,\beta t\doteq\frac{\beta}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$, **г)** $e^{\alpha t}\,\mathrm{ch}\,\beta t\doteq\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$,

ғ) $e^{\alpha t}\cos(t+\beta)\doteq\frac{(p-\alpha)\cos\beta-\sin\beta}{(p-\alpha)^2+1}$,

д) $\sin\alpha t\sin\beta t\doteq\frac{2\alpha\beta p}{[p^2+(\alpha-\beta)^2][p^2+(\alpha+\beta)^2]}$.

3. Садә кәсрләрә ајырма үсулу илә верилмиш тәсвирләрин орижиналларыны тапмалы:

а) $\dfrac{p+1}{p^2+2p}$, Чаваб: $\frac{1}{2}\left(1+e^{-2t}\right)$.

б) $\dfrac{1}{2p^2-2p+5}$, Чаваб: $\frac{1}{3}\, e^{\frac{1}{2}} \sin \frac{3}{2} t$.

в) $\dfrac{3p-4}{p^2-p-6}$, Чаваб: $e^{3t}+2e^{-2t}$.

г) $\dfrac{3p^3+3p+1}{p^4+p^2}$. Чаваб: $3+t-\sin t$.

4. Ашағыдакы ади диференсиал тәнликләрин көстәрилән башланғыч шәртини өдәјән һәллини Лаплас чевирмәси илә тапмалы:

а) $\ddot{x}+3\dot{x}+2x=0,\ x(0)=2,\ \dot{x}(0)=-3.$

Чаваб: $x=e^{-t}+e^{-2t}$.

б) $\ddot{x}+9x=6\cos 3t,\ x(0)=0,\ \dot{x}(0)=9.$

Чаваб: $x=(3+t)\sin 3t$.

в) $4\dddot{x}-8\ddot{x}-\dot{x}-3x=-8e^t,\quad x(0)=\dot{x}(0)=\ddot{x}(0)=1.$

Чаваб: $x=e^t$.

г) $\begin{cases}\dot{x}=-x+3y, & x(0)=0.\\ \dot{y}=x+y+e^t, & y(0)=0.\end{cases}$ Чаваб: $x=\frac{1}{4}e^{-2t}-e^t+\frac{3}{4}e^{2t}$, $y=-\frac{1}{12}e^{-2t}-\frac{2}{3}e^t+\frac{3}{4}e^{2t}$

ғ) $\begin{cases}\dot{x}=x+2y, & x(0)=-1.\\ \dot{y}=x-5\sin t, & y(0)=2.\end{cases}$ Чаваб: $x=3\sin t-\cos t$, $y=2\cos t-\sin t$.

5. Аддым үсулу вә Лаплас чевирмәси илә ашағыдакы мәсәләләри һәлл един:

а) $2\dot{x}(t)-x(t-2)=2,\ t>0$
$x(t)=0,\quad -2\leqslant t\leqslant 0.$

Чаваб: $x=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(t-2k)^{k+1}}{2^k(k+1)!}$,

$2n-2\leqslant t\leqslant 2n,\ n=1,2,\ldots$

б) $\dot{x}(t)=ax(t-\tau),\quad t>0$
$x(t)=1,\ -\tau\leqslant t\leqslant 0\ (\tau>0),$

Чаваб: $x=1+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{a^{k+1}(t-k\tau)^{k+1}}{(k+1)!}$,

$n-1\leqslant t\leqslant n,\ n=1,2,\ldots$

ӘДӘБИЈЈАТ

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения", М., „Наука", 1971.
2. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., „Наука" 1967.
3. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1954.
4. Беллман Р Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М., „Мир", 1967.
5. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., „Наука", 1967.
6. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, „Наука и техника", 1972.
7. Камке Э. Справочник по дифференциалным уравнениям в частных производных первого порядка М., „Наука", 1966.
8. Киселев А. И., Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., „Высшая школа". 1965.
9. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит , 1958.
10. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М., „Наука", 1970.
11. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
12. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, „Вышэйщая школа", 1974.
13. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск, „Вышэйшая школа", 1970.
14. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., „Наука", 1970.
15. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения М., „Наука", 1974.
16. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., т. 1, 1953, т. 2, 1954.
17. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.—Л., „Наука", т. II, 1967, т. IV, 1957.
18. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959.
19. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. М.Изд-во иностр. лит. 1962.
20. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., „Мир", 1970.
21. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., „Наука", 1973.
22. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., „Наука", 1965.
23. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., „Наука", 1971.

МҮНДӘРИЧАТ

Кириш 3

I фәсил. Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмуш биртәртибли диференсиал тәнликләр 5

§ 1. Әсас анлајышлар вә тә'рифләр 5
а) *Диференсиал тәнлик анлајышы* 5
б) *Диференсиал тәнлик анлајышынын һәндәси изаһы* . . . 7
в) *Коши мәсәләси* 10
г) *Үмуми һәлл* 11
ғ) *Хүсуси һәлл* 13
д) *Мәхсуси һәлл* 13
е) *Квадратура илә һәлл олунан тәнликләр* 14
§ 2. Дәјишәнләринә ајрылан тәнликләр 16
§ 3. Бирчинс тәнликләр 18
а) *Үмуми интегралын гурулмасы* 18
б) *Бирчинс тәнлијин һәлләринин һәндәси хассәләри* . . . 20
в) *Бирчинс тәнлијә кәтирилән тәнликләр* 21
§ 4. Хәтти тәнликләр 23
§ 5. Бернулли тәнлији 26
§ 6. Там диференсиаллы тәнликләр 27
§ 7. Интеграллајычы вуруг 30
а) *Интеграллајычы вуруғун тапылмасы* 30
б) *Интеграллајычы вуруғун варлығы* 35
§ 8. Риккати тәнлији 37
Чалышмалар 40

II фәсил. Биртәртибли тәнликләрин һәлләринин варлығы вә јеканәлији 41

§ 1. Ејлер сыныг хәтти 41
§ 2. Арсела теореми 42
§ 3. Һәллин варлығы һаггында Пеано теореми 45
§ 4. Һәллин давамы 52
§ 5. Тонелли јахынлашмалары 56
§ 6. Јеканәлик теоремләри 59
§ 7. Ардычыл јахынлашма үсулу 68
§ 8. Сыхылмыш ин'икас принсипи 76
а) *Сыхылмыш ин'икас принсипи* 77
б) *Сыхылмыш ин'икас принсипинин интеграл тәнлијин һәллинин варлығы мәсәләсинә тәтбиги* 80
в) *Үмумиләшмиш сыхылмыш ин'икас принсипинин Коши мәсәләсинин һәллинә тәтбиги* 81
§ 9. Һәллин һамарлығы һаггында 82
Чалышмалар 83

III фәсил. Төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш биртәртибли диференсиал тәнликләр 85

§ 1. Әсас анлајышлар вә тәклифләр 85
а) *Һәллин тә'рифи* 85
б) *Коши мәсәләси* 86
в) *Үмуми һәлл* 88
§ 2. Мәхсуси һәллин тапылмасы 89
а) *Мәхсуси һәллин дискриминант әјриси васитәсилә тапылмасы* 89
б) *Мәхсуси һәллин интеграл әјриләр аиләсинин гуршајаны кими тапылмасы* 90
§ 3. Натамам диференсиал тәнликләр 92
а) *Анчаг төрәмәдән асылы тәнликләр* 93
б) *Ахтарылан функсија ашкар дахил олмајан тәнликләр* . . 94
в) *Сәрбәст дәјишән ашкар дахил олмајан тәнликләр* . . . 95
г) *Натамам тәнликләрә кәтирилән тәнликләр* 96
§ 4. Параметр дахил етмәјин үмуми үсулу 97
а) *Сәрбәст дәјишәнә нәзәрән һәлл олунан тәнликләр* . . . 99
б) *Ахтарылан функсијаја нәзәрән һәлл олунан тәнликләр* . 99
в) *Клеро тәнлији* 100
г) *Лагранж тәнлији* 101
§ 5. Трајекторија һаггында мәсәлә 102
Чалышмалар 104

IV фәсил. Диференсиал тәнликләр системи 106

§ 1. Үмуми анлајышлар вә тә'рифләр 106
§ 2. Нормал системин һәлли һаггында 109
а) *Системин һәлли* 109
б) *Һәндәси изаһ* 109
в) *Коши мәсәләси* 110
г) *Үмуми, хүсуси вә мәхсус һәлл* 111
ғ) *Системин интегралы. Биринчи интеграл. Үмуми интеграл* . 112
д) *Системин симметрик формасы* 118
§ 3. Јүксәк тәртибли диференсиал тәнликләр 120
а) *Үмуми анлајышлар вә тә'рифләр* 120
б) *Нормал системин јүксәк тәртибли тәнлијә кәтирилмәси* . 123
в) *Јүксәк тәртиб төрәмәјә нәзәрән һәлл олунмамыш тәнликләр һаггында* 126
г) *Аралыг интеграл, биринчи интеграл вә тәнлијин тәртибинин азалдылмасы* 126
§ 4. Јүксәк тәртибли натамам тәнликләр вә тәртиби азалдылабилән тәнликләр 128
а) *Ахтарылан функсија вә онун мүәјјән тәртибә гәдәр төрәмәләри иштирак етмәјән тәнликләр* 128
б) *Сәрбәст дәјишән ашкар шәкилдә дахил олмајан тәнликләр* . 131
в) *Ахтарылан функсија вә онун төрәмәләринә нәзәрән бирчинс олан тәнликләр* 136
г) *Үмумиләшмиш бирчинс тәнликләр* 137
ғ) *Сол тәрәфи там диференсиал олан тәнликләр* 139
§ 5. Нормал системин һәллинин варлығы 140

§ 6. Јеканалик теоремләри 143
§ 7. Нормал систем үчүн ардычыл јахынлашма үсулу 148
§ 8. Даваметдирилмәјән һәлл 151

Чалышмалар 154

V фәсил. Хәтти диференсиал тәнликләр системи 156

§ 1. Үмуми анлајышлар 156
а) *Хәтти систем анлајышы* 156
б) *Векторлар нәзәријјәсинин бә'зи анлајышлары* 156
в) *Матрисләр нәзәријјәсинин елементләри* 159
г) *Системин вектор-матрис шәкли* 163
§ 2. Хәтти бирчинс системләр 164
§ 3. Хәтти бирчинс олмајан системләр. Сабитләрин вариасијасы үсулу 171
§ 4. Гошма систем 173
§ 5. Сабит әмсаллы бирчинс систем 174
§ 6. Сабит әмсаллы бирчинс системин үмуми һәллинин гурулмасы . 177
а) *Характеристик тәнлијин көкләри һәгиги вә мүхтәлифдир* . 178
б) *Характеристик тәнлијин көкләри мүхтәлифдир, лакин онлар ичәрисиндә комплекс әдәд олан вар* 180
в) *Характеристик әдәдләрдән тәкрарлананы олан һал* . . . 180
§ 7. Квдаратура илә һәлл олунан дәјишән әмсаллы системләр һаггында 185
§ 8. Јүксәк тәртибли хәтти тәнликләр 187
а) *Үмуми анлајышлар* 187
б) *Тәртибин азалдылмасы* 191
в) *Гошма тәнлик* 193
г) *Хәтти бирчинс олмајан тәнлик. Сабитләрин вариасијасы үсулу* 194
§ 9. Јүксәк тәртибли сабит әмсаллы хәтти тәнликләр 198
а) *Сабит әмсаллы хәтти бирчинс тәнлијин һәлли* . . . 198
б) *Сабит әмсаллы хәтти бирчинс олмајан тәнлијин бир хүсуси һәллинин гурулмасы* 202
в) *Ејлер тәнлији* 208
§ 10. Периодик әмсаллы хәтти системләр 208

Чалышмалар 217

VI фәсил. Һәллин параметрләрдән вә башланғыч гијмәтләрдән асылылығы 220

§ 1. Һәллин параметрләрә нәзәрән кәсилмәзлији 220
§ 2. Һәллин параметрләрә нәзәри диференсиалланмасы . . . 225
§ 3. Һәллин башланғыч гијмәтләрдән асылылығы. Үмуми интегралын варлығы 231
§ 4. Һәллин аналитиклији һаггында 241
§ 5. Сингулјар һәјәчанланмыш системләр һаггында 250

Чалышмалар 256

VII фәсил. Дајаныглыг нәзәријјәси һаггында 259

§ 1. Әсас анлајышлар 260
§ 2. Хәтти системин дајаныглығы 262
§ 3. Лјапунов функсијалары үсулу 269
§ 4. Биринчи јахынлашмалара нәзәрән дајаныглыг һаггында Лјапунов теореми 277
§ 5. Дајаныгсыз системләр һаггында 280

Чалышмалар 287

VIII фәсил. Икитәртибли тәнликләр нәзәријјәсинин бә'зи мәсәләләри . 290

§ 1. Икитәртибли хәтти бирчинс тәнлијин садә формалары . . 290
§ 2. Һәллин хассәләри 292

§ 3. Сәрһәд мәсәләси. Грин функсијасы 299
§ 4. Мәхсуси әдәд вә мәхсуси функсија һаггында 305
§ 5. Мәхсуси әдәдләрин вә мәхсуси функсијаларын асимптотикасы 311
§ 6. Гејри-хәтти сәрһәд мәсәләси 315
§ 7. Бессел тәнлији вә Бессел функсијалары 322
а) *Бессел тәнлији* 322
б) *Бессел функсијалары арасында әлагә* 328
в) *Бессел функсијаларынын сыфырлары* 330
г) *Бессел функсијаларынын ортогоналлыг хассәси* . . . 330
ғ) *Бессел функсијаларынын бә'зи интеграл көстәрилишләри* . 331

Чалышмалар 335

IX фәсил. Автоном системләр 336

§ 1. Автоном системләрин һәлләринин хассәләри 336
а) *Тә'рифләр вә һәндәси изаһ* 336
б) *Һәллин хассәләри* 337
§ 2. Мүстәви үзәриндә трајекторијаларын лимит вәзијјәтләри . 341
§ 3. Мүстәви үзәриндә мәхсуси нөгтәләрин тәснифаты . . . 350
а) *Мәхсуси нөгтә* 350
б) *Каноник форма* 351
в) *Садә һал үчүн мәхсуси нөгтәнин Пуанкаре тәснифаты* . 353
г) *Үмуми һалда мәхсуси нөгтәләрин тәснифаты* . . . 357

Чалышмалар 358

X фәсил. Биртәртибли хүсуси төрәмәли диференсиал тәнликләр . . 360

§ 1. Хүсуси төрәмәли тәнлик анлајышы. Коши мәсәләси . . . 360
§ 2. Биртәртибли хүсуси төрәмәли хәтти бирчинс тәнлик . . . 363
а) *Үмуми һәллин гурулмасы* 363
б) *Үмуми һәллин варлығы* 366
в) *Коши мәсәләсинин һәлли* 369
§ 3. Ики сәрбәст дәјишән һалы үчүн квази-хәтти тәнликләр . . 372
а) *Һәндәси изаһ* 372
б) *Үмуми Коши мәсәләси* 376
§ 4. Чох сәрбәст дәјишән һалы үчүн квази-хәтти тәнликләр . . 380
а) *Үмуми мә'лумат* 380
б) *Квази-хәтти тәнлијин хәтти бирчинс тәнликлә әлагәси* . . 381
в) *Коши мәсәләси* 385
§ 5. Пфафф тәнлији 389

Чалышмалар 395

XI фәсил. Мејл едән аргументли диференсиал тәнликләр 397

§ 1. Үмуми анлајышлар 397
а) *Мејл едән аргументли тәнликләр* 397
б) *Башланғыч мәсәләнин гојулушу* 398
в) *Мејл едән аргументли тәнликләрин тәснифаты* . . . 400
§ 2. Аддым үсулу 400
а) *Бир сабит кечикмәси олан кечикән аргументли тәнликләр* . 400
б) *Бир дәјишән кечикмәси олан кечикән аргументли тәнликләр* 404
в) *Нејтрал тип тәнликләр* 406
г) *Габаглајан аргументли тәнликләр* 408
§ 3. Һәллин варлығы вә давамы һаггында 409

§ 4. Хәтти тәнликләр 412
а) *Кечикән аргументли тәнликләр* 412
б) *Һәјәчанланмыш кечикән аргументли тәнликләр* . . . 416
в) *Нејтрал тип тәнликләр* 417
§ 5. Сабит әмсаллы кечикән аргументли диференсиал тәнликләр . 420
§ 6. Лаплас чевирмәси вә онун тәтбигләри 422
а) *Лаплас чевирмәси* 422
б) *Тәрс чевирмә* 426
в) *Ади диференсиал тәнликләр* 430
г) *Кечикән аргументли тәнликләр* 432

Чалышмалар 437

Әдәбиjјат 439

Ахмедов Кошкар Теймур оглы,
Гасанов Кязим Кара оглы,
Ягубов Мамед Ахверди оглы

КУРС ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебник для ВУЗ-ов

(на азербайджанском языке)

Нәшријјат редактору *И. Әлијев*
Чилдинин рәссамы *Ә. Шыхәлијев*
Бәдии редактору *Е. Лазымов*
Техники редактору *Б. Кәримова*
Корректорлары *Л. Һачыјева, С. Гасымова*

ИБ—551

Јығылмаға верилмиш 30/XII 1977-чи ил. Чапа имзаланмыш 25/V 1978 чи-ил. Кағыз форматы 60×90[1]/16. Кағыз № 1. Физики вә шәрти ч. в. 27,75. Учот нәшр. вәрәги 22. Сифариш № 260. Тиражы 16000. Чилддә гијмәти 1 ман. 10 гәп.

Азәрбајчан ССР Назирләр Совети Дөвләт Нәшријјат, Полиграфија вә Китаб Тичарәти Ишләри Комитәсинин «Маариф» Нәшријјаты, Бакы, Ә. Тағызадә күчәси, № 4.

Азәрбајчан ССР Назирләр Совети Дөвләт Нәшријјат, Полиграфија вә Китаб Тичарәти Ишләри Комитәсинин Јени Китаб мәтбәәси, Бакы, Ә. Тағызадә күчәси. № 4.